





Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

Sechster Theil.

Mit fünf lithographirten Tafeln.

Greifswald.
Verlag von C. A. Koch.

1845.

Inhaltsverzeichniss des sechsten Theils.

Mathematische Methode.

Arithmetik.

Trigonometrie.

Geodäsie.

Mechanik.

Optik.

Astronomie.

Physik.

Geschichte der Mathematik und Physik.

*) Ich bemerke hierbei, dass die literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

Druckfehler.

S. 429. Z. 4. v. u. setze man $q^3 + q_1{}^3$ statt $q^3 + q_1$.

I.

Ueber den Vortrag der Lehre von der Auflösung der Gleichungen des dritten Grades.

Von

dem Herausgeber.

Der in den Elementen gewöhnliche Vortrag der Lehre von der Auflösung der Gleichungen des dritten Grades hat mir immer der Natur der Sache nicht recht entsprechend geschienen. Vielleicht dürfte sich die folgende Darstellung einigermassen zur Berücksichtigung beim Unterrichte empfehlen.

Die aufzulösende Gleichung, in welcher das zweite Glied fehlt, sei

$$1)\quad x^3 = ax + b,$$

wo a und b reelle Grössen sind. Man setze

$$2)\quad x = (p + q\sqrt{-1}) + (p_1 + q_1\sqrt{-1})$$
$$= p + p_1 + (q + q_1)\sqrt{-1},$$

wo auch p, q, p_1, q_1 reelle Grössen sein sollen, so ist, wie man leicht findet:

$$x^3 = 3(p + q\sqrt{-1})(p_1 + q_1\sqrt{-1})\{p + p_1 + (q + q_1)\sqrt{-1}\}$$
$$+ (p + q\sqrt{-1})^3 + (p_1 + q_1\sqrt{-1})^3$$

oder

$$x^3 = 3(p + q\sqrt{-1})(p_1 + q_1\sqrt{-1})x + (p + q\sqrt{-1})^3$$
$$+ (p_1 + q_1\sqrt{-1})^3;$$

und wenn also

$$x = p + p_1 + (q + q_1)\sqrt{-1}$$

eine Wurzel unserer Gleichung sein soll, so müssen die Grössen p, q, p_1, q_1 so bestimmt werden, dass den beiden Gleichungen

$$3(p + q\sqrt{-1})(p_1 + q_1\sqrt{-1}) = a,$$
$$(p + q\sqrt{-1})^3 + (p_1 + q_1\sqrt{-1})^3 = b;$$

d. i., wie man nach leichter Entwickelung findet, den beiden Gleichungen

$$pp_1 - qq_1 + (pq_1 + qp_1)\sqrt{-1} = \tfrac{1}{3}a,$$
$$\left.\begin{array}{l} p^3 + p_1^3 - 3pq^2 - 3p_1q_1^2 \\ -(q^3 + q_1^3 - 3p^2q - 3p_1^2q_1)\sqrt{-1} \end{array}\right\} = b;$$

also den vier Gleichungen

$$3)\quad \begin{cases} pp_1 - qq_1 = \tfrac{1}{3}a,\ pq_1 + qp_1 = 0, \\ p^3 + p_1^3 - 3pq^2 - 3p_1q_1^2 = b, \\ q^3 + q_1^3 - 3p^2q - 3p_1^2q_1 = 0 \end{cases}$$

genügt wird.

Richten wir nun aber unser Augenmerk zunächst und vorzüglich auf die Auffindung einer reellen Wurzel unserer gegebenen Gleichung, ohne uns für's Erste darum zu bekümmern, ob es auch eine reelle Wurzel in allen Fällen wirklich giebt, so kommt zu den vier obigen Bedingungsgleichungen noch die Gleichung

$$q + q_1 = 0,$$

und wir müssen also die vier Grössen p, q, p_1, q_1 so zu bestimmen suchen, dass den fünf Gleichungen

$$4)\quad \begin{cases} q + q_1 = 0, \\ pp_1 - qq_1 = \tfrac{1}{3}a,\ pq_1 + qp_1 = 0, \\ p^3 + p_1^3 - 3pq^2 - 3p_1q_1^2 = b, \\ q^3 + q_1^3 - 3p^2q - 3p_1^2q_1 = 0 \end{cases}$$

genügt wird, wobei nun aber die zwei folgenden Fälle von einander unterschieden werden müssen.

I. Wenn man der ersten der fünf vorhergehenden Gleichungen zufolge $q_1 = -q$ setzt, zugleich aber annimmt, dass die Grössen q und q_1 beide verschwinden, so sind offenbar die fünf Gleichungen 4) vollständig erfüllt, wenn man die Grössen p, p_1 so bestimmt, dass den zwei Gleichungen

$$pp_1 = \tfrac{1}{3}a,\ p^3 + p_1^3 = b$$

genügt wird.

Setzt man $p^3 = u$, $p_1{}^3 = u_1$, so werden diese Gleichungen

$$uu_1 = \tfrac{1}{27}a^3,\; u + u_1 = b;$$

und weil nun

$$(u - u_1)^2 = (u + u_1)^2 - 4uu_1 = b^2 - \tfrac{4}{27}a^3$$

ist, so hat man zur Bestimmung von u, u_1 die beiden Gleichungen

$$u + u_1 = b,\; u - u_1 = \pm\sqrt{b^2 - \tfrac{4}{27}a^3},$$

aus denen sich

$$u = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - \frac{4}{27}a^3}}{2},\quad u_1 = \frac{b \mp \sqrt{b^2 - \frac{4}{27}a^3}}{2};$$

also

$$p = \sqrt[3]{\frac{b \pm \sqrt{b^2 - \frac{4}{27}a^3}}{2}},$$

$$p_1 = \sqrt[3]{\frac{b \mp \sqrt{b^2 - \frac{4}{27}a^3}}{2}}$$

ergiebt. Wenn daher

$$\tfrac{4}{27}a^3 \overline{\overline{<}}\, b^2$$

ist, so ist

$$5)\quad p + p_1 = \sqrt[3]{\frac{b + \sqrt{b^2 - \frac{4}{27}a^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{b - \sqrt{b^2 - \frac{4}{27}a^3}}{2}}$$

eine reelle Wurzel unserer Gleichung, und folglich

$$(p + p_1)^3 - a(p + p_1) - b = 0.$$

Zieht man dies von

$$x^3 - ax - b$$

ab, so erhält man

$$x^3 - ax - b = x^3 - (p + p_1)^3 - a\{x - (p + p_1)\},$$

oder, wie man leicht findet:

$$x^3 - ax - b = \{x - (p + p_1)\}\{x^2 + (p + p_1)x + (p + p_1)^2 - a\},$$

und die beiden anderen Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - ax - b = 0 \text{ oder } x^3 = ax + b$$

ergeben sich daher durch Auflösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 + (p + p_1)x + (p + p_1)^2 - a = 0,$$

wodurch man nach dem bekannten Verfahren

$$6)\quad x = -\tfrac{1}{2}(p+p_1) \pm \sqrt{a - \tfrac{3}{4}(p+p_1)^2}$$

erhält. Hier frägt sich nun, ob diese beiden Wurzeln reell oder imaginär sind, welche Frage auf folgende Art beantwortet werden kann.

Wenn $\frac{4}{27}a^3 = b^2$ ist, so ist

$$(p-p_1)^2 = 0,$$

also

$$p^2 + p_1^2 = 2pp_1,$$

und folglich

$$(p+p_1)^2 = 4pp_1,$$

d. i. wegen der Gleichung $pp_1 = \frac{1}{3}a$:

$$(p+p_1)^2 = \tfrac{4}{3}a$$

oder

$$\tfrac{3}{4}(p+p_1)^2 = a,$$

also

$$a - \tfrac{3}{4}(p+p_1)^2 = 0,$$

und die Wurzeln 6) sind also in diesem Falle beide reell und einander gleich.

Wenn $\frac{4}{27}a^3 < b^2$ ist, so ist

$$(p-p_1)^2 > 0,$$

also

$$p^2 + p_1^2 > 2pp_1,$$

und folglich

$$(p+p_1)^2 > 4pp_1,$$

d. i. wegen der Gleichung $pp_1 = \frac{1}{3}a$:

$$(p+p_1)^2 > \tfrac{4}{3}a$$

oder

$$\tfrac{3}{4}(p+p_1)^2 > a,$$

also

$$a - \tfrac{3}{4}(p+p_1)^2 < 0,$$

und die Wurzeln 6) sind also in diesem Falle beide imaginär.

Die gegebene Gleichung hat also drei reelle oder eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln, jenachdem $\frac{4}{27}a^3 = b^2$ oder $\frac{4}{27}a^3 < b^2$ ist; im ersten Falle sind zwei der drei reellen Wurzeln einander gleich.

II. Wenn man der ersten der fünf Gleichungen 4) zufolge $q_1 = -q$ setzt, zugleich aber annimmt, dass die Grössen q und q_1

nicht verschwinden, so folgt aus der dritten der fünf genannten Gleichungen, nämlich aus der Gleichung

$$pq_1 + qp_1 = 0,$$

auf der Stelle $p_1 = p$, und die fünfte Gleichung, nämlich die Gleichung

$$q^3 + q_1{}^3 - 3p^2q - 3p_1{}^2q_1 = 0$$

ist nun identisch gleich Null. Die zweite und vierte Gleichung, nämlich die Gleichungen

$$pp_1 - qq_1 = \tfrac{1}{3}a,$$
$$p^3 + p_1{}^3 - 3pq^2 - 3p_1q_1{}^2 = b,$$

werden aber

$$p^2 + q^2 = \tfrac{1}{3}a,\ p^3 - 3pq^2 = \tfrac{1}{2}b;$$

und die Grössen p und q sind also jetzt so zu bestimmen, dass diesen beiden Gleichungen genügt wird.

Hierbei sind wir nach I. offenbar berechtigt anzunehmen, dass

$$\tfrac{4}{27}a^3 > b^2,$$

also auch a nothwendig positiv ist. Demzufolge können wir die erste der beiden zu erfüllenden Gleichungen auf die Form

$$\left(p\sqrt{\frac{3}{a}}\right)^2 + \left(q\sqrt{\frac{3}{a}}\right)^2 = 1$$

bringen, und sind also offenbar berechtigt,

$$p\sqrt{\frac{3}{a}} = \sin\varphi,\ q\sqrt{\frac{3}{a}} = \cos\varphi$$

d. i.

$$p = \sin\varphi\sqrt{\frac{a}{3}},\ q = \cos\varphi\sqrt{\frac{a}{3}}$$

zu setzen. Führen wir diese Ausdrücke von p und q in die zweite der beiden zu erfüllenden Gleichungen ein, so wird dieselbe nach einigen leichten Reductionen

$$\sin\varphi^3 - 3\sin\varphi\cos\varphi^2 = \frac{3b}{2a}\sqrt{\frac{3}{a}} = \sqrt{\frac{27b^2}{4a^3}}.$$

Weil nun aber nach einer bekannten goniometrischen Relation

$$\sin 3\varphi = 3\sin\varphi\cos\varphi^2 - \sin\varphi^3$$

ist, so ist

$$\sin 3\varphi = -\sqrt{\frac{27b^2}{4a^3}}.$$

Da nach der Voraussetzung

$$\tfrac{4}{27}a^3 > b^2, \text{ also } \frac{27b^2}{4a^3} < 1$$

ist, so kann aus der vorhergehenden Gleichung 3φ immer bestimmt werden. Bezeichnen wir nun den seinem absoluten Werthe nach $\frac{1}{2}\pi$ nicht übersteigenden, der Gleichung

$$\sin 3\varphi = -\sqrt{\frac{27b^2}{4a^3}}$$

genügenden Werth von 3φ durch $-\omega$, so sind, weil

$$\sin(\omega - \pi) = \sin(-\omega),\ \sin(\omega + \pi) = \sin(-\omega)$$

ist, auch $\omega - \pi$ und $\omega + \pi$ Werthe von 3φ, und für φ erhält man also die drei Werthe $-\frac{1}{3}\omega$, $\frac{1}{3}(\omega - \pi)$, $\frac{1}{3}(\omega + \pi)$; folglich für $p = p_1$ die drei folgenden reellen Werthe:

$$-\sin\tfrac{1}{3}\omega\sqrt{\frac{a}{3}},\ \sin\tfrac{1}{3}(\omega - \pi)\sqrt{\frac{a}{3}},\ \sin\tfrac{1}{3}(\omega + \pi)\sqrt{\frac{a}{3}}.$$

Da nun $p + p_1 = 2p$ eine Wurzel unserer Gleichung ist, so hat dieselbe im vorliegenden Falle jederzeit die drei folgenden reellen Wurzeln:

$$7)\quad x = \begin{cases} -2\sin\tfrac{1}{3}\omega\sqrt{\frac{a}{3}} \\ 2\sin\tfrac{1}{3}(\omega - \pi)\sqrt{\frac{a}{3}} \\ 2\sin\tfrac{1}{3}(\omega + \pi)\sqrt{\frac{a}{3}} \end{cases}$$

oder

$$8)\quad x = \begin{cases} -2\sin\tfrac{1}{3}\omega\sqrt{\frac{a}{3}} \\ -2\sin\tfrac{1}{3}(\pi - \omega)\sqrt{\frac{a}{3}} \\ 2\sin\tfrac{1}{3}(\pi + \omega)\sqrt{\frac{a}{3}}. \end{cases}$$

Auch erhellet leicht, dass die zwei ersten dieser drei reellen Wurzeln immer negativ sind, die dritte Wurzel dagegen stets positiv ist. Dass die drei Wurzeln im vorliegenden Falle jederzeit sämmtlich unter einander ungleich sind, fällt eben so leicht in die Augen.

Aus der vorhergehenden Entwickelung ergiebt sich also überhaupt Folgendes.

1. Wenn $\frac{4}{27}a^3 = b^2$ oder $4a^3 = 27b^2$ ist, so hat die gegebene Gleichung drei reelle Wurzeln, von denen zwei einander gleich sind.

2. Wenn $\frac{4}{27}a^3 < b^2$ oder $4a^3 < 27b^2$ ist, so hat die gegebene Gleichung eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln.

3. Wenn $\frac{4}{27}a^3 > b^2$ ist, so hat die gegebene Gleichung drei sämmtlich unter einander ungleiche reelle Wurzeln, zwei negative und eine positive.

4. Die gegebene Gleichung hat also hiernach auch immer mindestens eine reelle Wurzel.

Sind auch die im Vorhergehenden gefundenen Resultate nicht neu, so scheint mir doch die obige Darstellung eine bessere Einsicht als die gewöhnliche in die eigentliche Natur des Gegenstandes zu gewähren, und deshalb beim Elementarunterrichte vielleicht einiger Berücksichtigung nicht ganz unwerth zu sein.

II.

Ueber die geometrischen Oerter der Mittelpunkte einiger Begränzungscurven des Schattens.

Von

Herrn L. Mossbrugger,

Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau.

Bestimmung der Oerter, auf welchen die Mittelpunkte der Begränzungscurven der Schatten liegen, die eine Fläche zweiten Grades auf eine gegebene Ebene wirft, wenn sich:

A) der leuchtende Punkt auf einer ausserhalb der Fläche gegebenen Linie zweiten Grades bewegt und die Ebene, auf welche die Schatten geworfen werden, fest bleibt.

B) Wenn der leuchtende Punkt fest bleibt, der Mittelpunkt der Fläche zweiten Grades aber (oder wenn diese keinen Mittelpunkt hat, ihr Scheitel) sammt der Fläche sich so auf einer Linie zweiten Grades bewegt, dass eine ihrer Hauptebenen mit der Ebene jener Linie zweiten Grades zusammenfällt und ihre Achsen sich immer parallel bleiben. Auch in diesem Fall sollen die fraglichen Mittelpunktsörter bestimmt werden, wenn die Ebene, worauf die Schatten geworfen werden, fest bleibt.

Wir schicken zum bessern Verständniss des Folgenden einige wenige Erklärungen und Sätze voraus.

1) Denken wir uns irgend eine Fläche F zweiten Grades und ausserhalb derselben, aber auf entgegengesetzten Seiten der Fläche F, zwei parallele Ebenen E und E' (z. B. die erstere oberhalb und

die andere unterhalb der Fläche F). In der erstern befinde sich ein Punkt P; wird aus diesem eine stetige Folge von geraden Berührenden an die Fläche F gezogen, so liegen diese bekanntlich auf der Oberfläche eines Kegels K zweiten Grades, welcher die zweite Ebene E' in einer Linie L zweiten Grades schneiden, die Fläche F aber in einer andern Linie L' desselben Grades berühren wird.

2) Der Punkt P heisst der Pol der Ebene, in welcher sich die Linie L' befindet, so wie diese Ebene die Polarebene des Punktes P genannt wird.

3) Bewegt sich der Punkt P in einer Ebene, so dreht sich die Ebene der Berührungscurve um einen Punkt; bewegt er sich aber auf einer Geraden, so dreht sich letztere Ebene ebenfalls um eine Gerade.

4) Ist der Punkt P leuchtend, und die Fläche F dunkel, so ist ebenfalls bekannt, dass die Linie L die Begränzungscurve des Schattens ist, welchen die Fläche F auf die Ebene E' wirft; ferner ist die Berührungscurve L' des Kegels K und der Fläche F die Trennungscurve des beleuchteten und dunkeln Theiles der letztern.

Nach diesen vorausgeschickten Erklärungen gehen wir zur Lösung der folgenden speciellen Aufgaben über:

I. Es ist ein Ellipsoid der Lage und Grösse nach gegeben; ausserhalb, und zwar oberhalb der Ebene, in welcher die beiden Hauptachsen $2A$ und $2B$ des Ellipsoids liegen, in der Entfernung h von dieser und parallel mit ihr befinde sich eine Ebene E, und ebenfalls ausserhalb, aber auf entgegengesetzter Seite in Beziehung auf die Ebene der Hauptachsen $2A$ und $2B$, befinde sich in der Entfernung $(-h')$ von dieser eine zweite parallele Ebene E'. In der ersteren Ebene E bewege sich ein leuchtender Punkt P so, dass er:

a) eine Ellipse, b) eine Hyperbel, c) eine Parabel, d) eine Gerade beschreibt. Die Mittelpunkte der beiden erstern und der Scheitel der dritten dieser Curven befinden sich im Durchschnittspunkte der verlängerten dritten Hauptachse $2C$ des Ellipsoids mit der Ebene E; und die beiden ersten Achsen 2α der beiden erstern, so wie der Hauptdurchmesser der dritten jener Leitcurven seien mit der Achse $2A$ des Ellipsoids parallel. Man soll die in der Ueberschrift verlangten Stücke der Aufgabe bestimmen.

Wir nehmen den Mittelpunkt des Ellipsoids zum Coordinatenanfang und seine Achsen zu Coordinatenachsen; alsdann ist dessen Gleichung:

$$\left\{\frac{x}{A}\right\}^2 + \left\{\frac{y}{B}\right\}^2 + \left\{\frac{z}{C}\right\}^2 = 1 \dots \quad (1)$$

Bezeichnen wir mit x', y' die veränderlichen Coordinaten eines Punktes P in der Ebene E, deren Gleichung $z = h$ ist, so ist, wenn dieser Punkt eine Ellipse beschreibt, deren Achsen 2α, 2β respective mit den Achsen $2A$ und $2B$ parallel sind, und deren Mittelpunkt im Durchschnitt der verlängerten Achse $2C$ mit der Ebene E ist,

$$\left\{\frac{x'}{\alpha}\right\}^2 + \left\{\frac{y'}{\beta}\right\}^2 = 1 \dots \quad (2)$$

die Gleichung jener Ellipse.

Ferner ist die Gleichung desjenigen Kegels, dessen Scheitel sich in irgend einem Punkte (x', y', h) dieser Ellipse befindet, und der das Ellipsoid (1) berührt, folgende:

$$\left.\begin{array}{l} \{A^2y'^2+B^2x'^2-A^2B^2\}(z-h)^2 \\ +\{A^2h^2+C^2x'^2-A^2C^2\}(y-y')^2 \\ +\{B^2h^2+C^2y'^2-B^2C^2\}(x-x')^2 \\ -2C^2x'y'(x-x')(y-y')-2B^2hx'(x-x')(z-h) \\ -2A^2hy'(y-y')(z-h) \end{array}\right\}=0 \ldots. \quad (3)$$

Setzen wir in dieser Gleichung $z=-h'$, so erhalten wir die Gleichung der Curve, in welcher die Kegelfläche (3) die Ebene E' durchdringt, oder der Curve, welche den Schatten begränzt, den das Ellipsoid (1) auf die Ebene E' wirft, wenn sich der leuchtende Punkt in einem Punkte P der Ellipse (2) befindet, dessen Coordinaten x', y', h sind.

Diese Gleichung ist:

$$\left.\begin{array}{l} \{A^2h^2+C^2x'^2-A^2C^2\}y^2-2C^2x'y'.xy \\ +\{B^2h^2+C^2y'^2-B^2C^2\}x^2+2A^2(C^2+hh')y'.y \\ +2B^2(C^2+hh')x'.x+(h'^2-C^2)\{A^2y'^2+B^2x'^2\} \\ -A^2B^2(h+h')^2 \end{array}\right\}=0 \ldots. \quad (4)$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir leicht:

$$y = \frac{C^2x'y'x - A^2(C^2+hh')y'}{A^2h^2+C^2x'^2-A^2C^2} \pm \frac{\sqrt{\left\{ \{A^2C^2y'^2+B^2C^2x'^2-A^2B^2(C^2-h^2\}\{(C^2-h^2)x^2-2(C^2+hh')x'x+(C^2-h'^2)x'^2\} \atop -A^4(C^2-h'^2)(C^2-h^2)y'^2 \right\}}}{A^2h^2+C^2x'^2-A^2C^2}$$

Nehmen wir nun an, es sei Taf. I. Fig. 1. $PCBQDA$ diejenige Curve, welche den Schatten in der Ebene E begränzt, und welche durch die Gleichung (4) dargestellt ist; ferner seien bei dem angenommenen rechtwinklichten Coordinatensystem $PL = q'$ und $QN = q''$ diejenigen Ordinaten, welche die Curve $PCBQDA$ in den Punkten P und Q tangiren; endlich seien $OL = p'$ und $ON = p'$ die den Ordinaten q' und q'' entsprechenden Abscissen, so erhalten wir mittelst des letzten Ausdrucks für y:

$$q' = \frac{C^2x'y'p' - A^2(C^2+hh')y'}{A^2h^2+C^2x'^2-A^2C^2} \pm \frac{\sqrt{\left\{ \{A^2C^2y'^2+B^2C^2x'^2-A^2B^2(C^2-h^2)\}\{(C^2-h^2)p'^2-2(C^2+hh')x'p'+(C^2-h'^2)x'^2\} \atop -A^4(C^2-h'^2)(C^2-h^2)y'^2 \right\}}}{A^2h^2+C^2x'-A^2C^2}$$

$$q'' = \frac{C^2x'y'p'' - A^2(C^2+hh')y'}{A^2h^2+C^2x'^2-A^2C^2} \pm \frac{\sqrt{\left\{ \{A^2C^2y'^2+B^2C^2x'^2-A^2B^2(C^2-h^2)\}\{(C^2-h^2)p''^2-2(C^2+hh')x'p''+(C^2-h'^2)x'^2\} \atop -A^4(C^2-h'^2)(C^2-h^2)y'^2 \right\}}}{A^2h^2+C^2x'^2-A^2C^2}$$

Es ist aber offenbar, dass sowohl q' als auch q'' nur einen einzigen Werth haben kann, woraus hervorgeht, dass die unter den Wurzelzeichen befindlichen Ausdrücke Null sein müssen, wodurch wir zur Bestimmung von p' und p'' die beiden Gleichungen

$$\{A^2C^2y'^2+B^2C^2x'^2-A^2B^2(C^2-h^2)\}\{(C^2-h^2)p'^2-2(C^2+hh')x'p'+(C^2-h'^2)x'^2\}$$
$$-A^4(C^2-h'^2)(C^2-h^2)y'^2 = 0 \ldots\ldots \quad (5)$$

$$\{A^2C^2y'^2+B^2C^2x'^2-A^2B^2(C^2-h^2)\}\{(C^2-h^2)p''^2-2(C^2+hh')x'p''+(C^2-h'^2)x'^2\}$$
$$-A^4(C^2-h'^2)(C^2-h^2)y'^2 = 0 \ldots\ldots \quad (6)$$

erhalten. Dadurch wird aber auch:

$$q' = \frac{C^2x'y'p' - A^2(C^2 + hh')y'}{A^2h^2 + C^2x'^2 - A^2C^2}, \quad q'' = \frac{C^2x'y'p'' - A^2(C^2 + hh')y'}{A^2h^2 + C^2x'^2 - A^2C^2} \Bigg\} \ldots. \quad (7)$$

Subtrahiren wir die Gleichung (6) von der Gleichung (5) und dividiren den Rest mit $p' - p''$, so erhalten wir:

$$(C^2 - h^2)(p' + p'') - 2(C^2 + hh')x' = 0,$$

also

$$p' + p'' = \frac{2(C^2 + hh')x'}{C^2 - h^2} \ldots. \quad (8)$$

Addiren wir die Gleichungen (7), so erhalten wir

$$q' + q'' = \frac{2(C^2 + hh')y'}{C^2 - h^2} \ldots. \quad (9)$$

Bezeichnen wir jetzt die Coordinaten des Mittelpunkts der Begränzungscurve $PCBQDA$ des Schattens mit t und u, so ist bekanntlich

$$t = \frac{p' + p''}{2}, \quad u = \frac{q' + q''}{2}.$$

Aus diesen Gleichungen und aus (8) und (9) erhalten wir:

$$t = \frac{(C^2 + hh')x'}{C^2 - h^2}, \quad u = \frac{(C^2 + hh')y'}{C^2 - h^2} \Bigg\} \ldots. \quad (10)$$

Ist jedoch der leuchtende Punkt P nicht fest, sondern bewegt er sich auf der Ellipse (2), so wird auch die Curve (3) in jedem Augenblick eine andere Lage und Gestalt annehmen, mithin auch ihr Mittelpunkt stetig seinen Platz ändern, also eine Curve beschreiben. Die Gleichung dieser Curve werden wir aber erhalten, wenn wir aus den Gleichungen (2) und (10) die Grössen x' und y' eliminiren. Dadurch erhalten wir

$$\left\{\frac{(C^2 - h^2)t}{\alpha(C^2 + hh')}\right\}^2 + \left\{\frac{(C^2 - h^2)u}{\beta(C^2 + hh')}\right\}^2 = 1 \ldots. \quad (11)$$

als die Gleichung des Orts der Mittelpunkte der Begränzungscurven des Schattens, wenn der leuchtende Punkt die Ellipse beschreibt, welche durch die Gleichung (2) dargestellt ist. Die Gleichung (11) drückt aber ebenfalls eine Ellipse aus, und zwar verhalten sich ihre beiden Achsen wie $\alpha : \beta$; mithin ist sie derjenigen Ellipse ähnlich, auf welcher sich der leuchtende Punkt P bewegt.

Es ist bei der Curve (11) zu bemerken, dass dieselbe für jeden positiven oder negativen Werth von h' reell bleibt, was begreiflich allen Vorstellungen und Begriffen von Schatten widerspricht, indem offenbar weder von Begränzungscurven des Schattens, noch von ihren Mittelpunkts-Oertern die Rede sein kann, wenn z. B. die Ebene E' sich in solchen Lagen befindet, die entweder zwischen dem Ellipsoid und dem leuchtenden Punkt, oder gar oberhalb von beiden liegen. In diesen Fällen muss die Gleichung (4) nicht betrachtet

werden, als drücke sie die Begränzungscurve des Schattens aus, sondern sie stellt alsdann offenbar nur die Durchschnittscurve des Umhüllungskegels (3) mit der Ebene E' vor, welche für alle positiven und negativen Werthe von h' reell sein wird. Bei dieser Betrachtung kann man mit jenen Untersuchungen die Frage verbinden: „Auf welcher Fläche liegen die sämmtlichen Mittelpunktscurven, wenn sich die Ebene E' parallel mit sich selbst bewegt?"

Wir werden die Gleichung dieser Fläche sogleich erhalten, wenn wir die Grösse h' als veränderlich betrachten und statt dieser in der Gleichung (11) eine neue Veränderliche $(\pm v)$ einführen, wodurch wir als Gleichung der gesuchten Fläche erhalten:

$$\left\{\frac{(C^2-h^2)t}{\alpha C^2}\right\}^2+\left\{\frac{(C^2-h^2)u}{\beta C^2}\right\}^2-\left\{\frac{hv}{C^2}\right\}^2\mp 2\left\{\frac{hv}{C^2}\right\}=1\ldots.\quad(12)$$

Diese Gleichung drückt offenbar ein eintheiliges Hyperboloid aus, dessen Achsenrichtungen mit jenen des Ellipsoids (1) dieselben sind, dessen Mittelpunkt zwar auf der Achse der z, jedoch nicht auf dem des Ellipsoids liegt.

Eben so finden wir, wenn sich der leuchtende Punkt P in der Ebene E auf einer Hyperbel, Parabel oder einer Geraden bewegt, deren Gleichungen

$$\left\{\frac{x'}{\alpha}\right\}^2-\left\{\frac{y'}{\beta}\right\}^2=1\ldots.\quad(13)$$

$$y'^2=px'\ldots.\quad(14)$$

$$y'=m+nx'\ldots.\quad(15)$$

sind, dass respective

$$\left\{\frac{(C^2-h^2)t}{\alpha(C^2+hh')}\right\}^2-\left\{\frac{(C^2-h^2)u}{\beta(C^2+hh')}\right\}^2=1\ldots.\quad(16)$$

$$u=\sqrt{\frac{p(C^2+hh')t}{C^2-h^2}}\ldots.\quad(17)$$

$$u=\frac{m(C^2+hh')}{C^2-h^2}+nt\ldots.\quad(18)$$

die Gleichungen der Mittelpunkts-Oerter der Begränzungscurven der Schatten sind. Auch sehen wir aus diesen Gleichungen, dass die erstere eine Hyperbel ist, welche derjenigen ähnlich ist, welche durch die Gleichung (13) dargestellt ist; die zweite aber ist eine Parabel, die mit der in No. 14. ausgedrückten ähnlich ist; die dritte endlich ist eine mit der Geraden (15) parallele Linie.

Bewegt sich die Ebene E' wieder so, dass sie immer in paralleler Lage bleibt, so erhalten wir, wie vorhin, für die Gleichungen der Flächen, auf welchen sich die bezüglichen Mittelpunktscurven befinden, folgende:

$$\beta^2(C^2-h^2)^2t^2-\alpha^2(C^2-h^2)^2u^2-\alpha^2\beta^2h^2v^2\mp 2\alpha^2\beta^2C^2hv=\alpha^2\beta^2C^4\ldots.\quad(19)$$

$$(C^2-h^2)u^2+phtv-C^2pt=0\ldots.\quad(20)$$

$$mhv-(C^2-h^2)u+nt+mC^2=0\ldots.\quad(21)$$

Die erste drückt ein zweitheiliges Hyperboloid aus, die zweite ein Paraboloid und die dritte eine Ebene.

Um den zweiten Theil der allgemeinen Aufgabe auf den speciellen Fall, wenn die Fläche F ein Ellipsoid ist, anzuwenden, nehmen wir an:

II. In der Ebene E befinde sich ein leuchtender, jedoch fester Punkt P, dessen Coordinaten a, b, c sein sollen; ferner sei ein Ellipsoid gegeben, das sich so bewegt, dass sein Mittelpunkt in der Ebene seiner beiden Achsen $2A$ und $2B$, welche sich während dessen Bewegung immer parallel bleiben sollen, a) eine Ellipse, b) eine Hyperbel, c) eine Parabel, d) eine Gerade beschreibt. Welches ist der Ort der Mittelpunkte der Begränzungscurven der Schatten, welche jenes Ellipsoid in seinen verschiedenen Lagen auf eine mit der Ebene der Achsen $2A$ und $2B$ parallele Ebene E' wirft, wenn diese von jener den Abstand h' hat?

Sind X, Y, Z die veränderlichen Coordinaten eines Punktes des Ellipsoids in irgend einer seiner in a) angegebenen Lagen; u, t jene seines beweglichen Mittelpunkts und

$$\left\{\frac{t}{\alpha}\right\}^2 + \left\{\frac{u}{\beta}\right\}^2 = 1 \ldots. \quad (22)$$

die Gleichung der Ellipse, auf der sich jener Mittelpunkt bewegt, so ist die Gleichung des Ellipsoids:

$$\left\{\frac{X-t}{A}\right\}^2 + \left\{\frac{Y-u}{B}\right\}^2 + \left\{\frac{Z}{C}\right\}^2 = 1 \ldots. \quad (23)$$

und die der umhüllenden Kegelfläche, deren Scheitel sich im Punkt (a, b, c) befindet:

$$\left.\begin{aligned} &\{B^2c^2 + C^2(b-u)^2 - B^2C^2\}(X-a)^2 \\ &+ \{A^2c^2 + C^2(a-t)^2 - A^2C^2\}(Y-b)^2 \\ &+ \{A^2(b-u)^2 + B^2(a-t)^2 - A^2B^2\}(Z-c)^2 \\ &- 2C^2(a-t)(b-u)(X-a)(Y-b) \\ &- 2B^2c(a-t)(X-a)(Z-c) \\ &- 2A^2c(b-u)(Y-b)(Z-c) \end{aligned}\right\} = 0 \ldots. \quad (24)$$

Setzen wir in dieser Gleichung $Z = -h'$, so erhalten wir die Gleichung der Curve, in welcher die Kegelfläche (23) die Ebene E' schneidet, d. h. die Gleichung der Curve, welche den Schatten begränzt, den das Ellipsoid (22) in irgend einer seiner Lagen auf die Ebene E' wirft. Diese ist daher:

$$\left.\begin{aligned}&\{C^2(u-t)^2-A^2(C^2-c^2)\}Y^2-2C^2(a-t)(b-u)XY\\+&\{C^2(b-u)^2-B^2(C^2-c^2)\}X^2-2Y\{\{C^2(a-t)^2-A^2(C^2-c^2)\}b-aC^2(a-t)(b-u)-A^2c(c+h')(b-u)\}\\-&2X\{\{C^2(b-u)^2-B^2(C^2-c^2)\}a-bC^2(a-t)(b-u)-B^2c(c+h')(a-t)\}\\+&a^2\{C^2(b-u)^2-B^2(C^2-c^2)\}+b^2\{C^2(a-t)^2-A^2(C^2-c^2)\}\\+&(c+h')^2\{A^2(b-u)^2+B^2(a-t)^2-A^2B^2\}-2abC^2(a-t)(b-u)\\-&2ac(c+h')B^2(a-t)-2bc(c+h')A^2(b-u)\end{aligned}\right\}=0\,\ldots\ (25)$$

Bemerken wir, dass wenn allgemein

$$\mathfrak{A}y^2+2\mathfrak{B}xy+\mathfrak{C}x^2+2\mathfrak{D}y+2\mathfrak{E}x+\mathfrak{F}=0$$

die Gleichung einer Linie zweiten Grades darstellt, und x_1, y_1 die Coordinaten des Mittelpunkts der letztern sind, alsdann

$$x_1=\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{E}-\mathfrak{B}\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}^2-\mathfrak{A}\mathfrak{C}},\quad y_1=\frac{\mathfrak{C}\mathfrak{D}-\mathfrak{B}\mathfrak{E}}{\mathfrak{B}^2-\mathfrak{A}\mathfrak{C}}$$

ist. Bezeichnen wir daher die Coordinaten des Mittelpunkts der durch die Gleichung (25) ausgedrückten Linie zweiten Grades mit T und U, so erhalten wir nach jener vorausgeschickten Bemerkung nach einigen Reductionen:

$$T=\frac{c(c+h')(a-t)+a(C^2-c^2)}{C^2-c^2},\quad U=\frac{c(c+h')(b-u)+b(C^2-c^2)}{C^2-c^2}\Big\}\ \ldots\ (26)$$

Eliminiren wir aus den Gleichungen (22) und (26) die Grössen t und u, so erhalten wir für die Gleichung der Curve, welche den gesuchten Ort ausdrückt, folgende:

$$\left.\begin{aligned}&\beta^2(C^2-c^2)^2T^2+\alpha^2(C^2-c^2)^2U^2-2\alpha^2b(C^2+ch')(C^2-c^2)U\\&-2\beta^2a(C^2+ch')(C^2-c^2)T+(C^2+ch')^2(a^2\beta^2+b^2\alpha^2)\\&\qquad-\alpha^2\beta^2c^2(c+h')^2\end{aligned}\right\}=0\ \ldots\ (27)$$

Diese Gleichung drückt aber eine mit der durch die Gleichung (22) dargestellten Ellipse ähnliche Ellipse aus.

Nehmen wir statt der Leitcurve (22) des Mittelpunkts vom Ellipsoid eine Hyperbel, eine Parabel, oder eine Gerade, deren Gleichungen

$$\left\{\frac{t}{\alpha}\right\}^2 - \left\{\frac{u}{\beta}\right\}^2 = 1 \ldots. \quad (28)$$

$$u^2 = pt \ldots. \quad (29)$$

$$u = m + nt \ldots. \quad (30)$$

sind, so erhalten wir auf gleiche Weise, wie oben, für die Gleichungen der Ortscurven der fraglichen Mittelpunkte respective folgende:

$$\left.\begin{aligned}&\beta^2(C^2-c^2)^2T^2-\alpha^2(C^2-c^2)^2U^2\\&+2\alpha^2b(C^2+ch')(C^2-c^2)U\\&-2\beta^2a(C^2+ch')(C^2-c^2)T\\&+(C^2+ch')^2(a^2\beta^2-b^2\alpha^2)\\&-\alpha^2\beta^2c^2(c+h')^2\end{aligned}\right\} = 0 \ldots. \quad (31)$$

$$U^2 - \frac{2b(C^2+ch')U}{C^2-c^2} + \frac{c(c+h')p}{C^2-c^2}T$$
$$+\frac{(C^2+ch')^2}{(C^2-c^2)^2}\{ac(c+h')p - b^2(C^2+ch')\} = 0 \ldots. \quad (32)$$

$$U = \frac{(C^2+ch')(b-an)-c(c+h')m}{C^2-c^2} + nT \ldots. \quad (33)$$

Die erste dieser Gleichungen drückt eine Hyperbel aus, die mit der Leitcurve (28) ähnlich ist; die zweite eine Parabel, welche ebenfalls mit der entsprechenden Leitparabel (29) ähnlich ist; die dritte endlich eine mit der Geraden (30) parallele Gerade.

III. Wir können auf gleiche Art die nämlichen Aufgaben in Beziehung auf andere Flächen des zweiten Grades lösen. Um jedoch Wiederholungen zu vermeiden, werden wir nur noch bei einer derselben die Resultate angeben.

Ist nämlich

$$\left\{\frac{x}{A}\right\}^2 + \left\{\frac{y}{B}\right\}^2 - \left\{\frac{z}{C}\right\}^2 = 1 \ldots. \quad (34)$$

die Gleichung eines eintheiligen Hyperboloids, so finden wir in Beziehung auf die in Aufgabe I. gestellte Forderung für die Gleichung der Begränzungscurve des Schattens, welchen das Hyperboloid auf eine Ebene E', deren Gleichung $z = -h'$ ist, wirft, wenn (x', y', h) die Coordinaten des leuchtenden Punktes sind:

$$\left.\begin{array}{l} \{C^2x'^2 - A^2(C^2+h^2)\}y^2 - 2C^2x'y'.xy \\ + \{C^2y'^2 - B^2(C^2+h^2)\}x^2 + 2A^2(C^2-hh')y'.y \\ + 2B^2(C^2-hh')x'.x + A^2B^2(h+h')^2 \\ - (C^2+h'^2)(A^2y'^2+B^2x'^2) \end{array}\right\} = 0 \ldots. \quad (35)$$

Die Coordinaten t, u des Mittelpunkts dieser Curve sind:

$$t = \frac{(C^2-hh')x'}{C^2+h^2}, \quad u = \frac{(C^2-hh')y'}{C^2+h^2} \ldots. \quad (36)$$

Beschreibt der leuchtende Punkt (x', y', h) a) in der Ebene $z=h$ eine Ellipse, b) eine Hyperbel, c) eine Parabel, d) eine Gerade, deren Gleichungen respective

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\frac{x'}{\alpha}\right\}^2 + \left\{\frac{y'}{\beta}\right\}^2 = 1, \ \left\{\frac{x'}{\alpha}\right\}^2 - \left\{\frac{y'}{\beta}\right\}^2 = 1 \\ y'^2 = px', \ y' = m + nx' \end{array}\right\} \ldots. \quad (37)$$

sind, so finden wir beziehungsweise für die Gleichungen der Curve, welche der Ort der Schattencurven Mittelpunkte ist, folgende:

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\frac{(C^2+h^2)t}{\alpha(C^2-hh')}\right\}^2 + \left\{\frac{(C^2+h^2)u}{\beta(C^2-hh')}\right\}^2 = 1 \\ \left\{\frac{(C^2+h^2)t}{\alpha(C^2-hh')}\right\}^2 - \left\{\frac{(C^2+h^2)u}{\beta(C^2-hh')}\right\}^2 = 1 \\ u^2 = \frac{p(C^2-hh')t}{C^2+h^2}, \ u = \frac{m(C^2-hh')}{C^2+h^2} + nt \end{array}\right\} \ldots. \quad (38)$$

Wir erkennen aus der Form dieser Gleichungen die Aehnlichkeit der Curven, welche sie ausdrücken, mit den entsprechenden in No. 37.

Bleibt aber der leuchtende Punkt, dessen Coordinaten wir jetzt mit a, b, c bezeichnen wollen, fest, und bewegt sich das Hyperboloid so, dass sein Mittelpunkt in der Ebene der Kehlellipse a) eine Ellipse, b) eine Hyperbel, c) eine Parabel, d) eine Gerade beschreibt, und die drei Achsen des beweglichen Hyperboloids immer mit ihrer erst gegebenen Lage parallel bleiben, so finden wir bei den gleichen angenommenen Bezeichnungen, wie beim Ellipsoid in Aufgabe II., für irgend eine angegebene Lage des Hyperboloids, dessen Gleichung:

$$\left\{\frac{X-t}{A}\right\}^2 + \left\{\frac{Y-u}{B}\right\}^2 - \left\{\frac{Z}{C}\right\}^2 = 1 \ldots. \quad (39)$$

für die Gleichung des Schattenkegels aber:

$$\left.\begin{array}{l} \{C^2(a-t)^2 - A^2(C^2+c^2)\}(Y-b)^2 \\ + \{C^2(b-u)^2 - B^2(C^2+c^2)\}(X-a)^2 \\ - \{A^2(b-u)^2 + B^2(a-t)^2 - A^2B^2\}(Z-c)^2 \\ - 2C^2(a-t)(b-u)(X-a)(Y-b) \\ + 2B^2c(a-t)(X-a)(Z-c) \\ + 2A^2c(b-u)(Y-b)(Z-c) \end{array}\right\} = 0 \ldots. \quad (40)$$

und für die Gleichung der Begränzungscurve des Schattens in der Ebene $z = -h'$:

$$\left.\begin{array}{l} \{C^2(a-t)^2 - A^2(C^2+c^2)\} Y^2 - 2C^2(a-t)(b-u) X Y \\ + \{C^2(b-u)^2 - B^2(C^2+c^2)\} X^2 \\ - 2\{\{C^2(a-t)^2 - A^2(C^2+c^2)\} b - aC^2(a-t)(b-u) + A^2c(c+h')(b-u)\} Y \\ - 2\{\{C^2(b-u)^2 - B^2(C^2+c^2)\} a - bC^2(a-t)(b-u) + B^2c(c+h')(a-t)\} X \\ + a^2\{C^2(b-u)^2 - B^2(C^2+c^2)\} - 2abC^2(a-t)(b-u) + b^2\{C^2(a-t)^2 - A^2(C^2+c^2)\} \\ - (c+h')^2\{A^2(b-u)^2 + B^2(a-t)^2 - A^2B^2\} + 2acB^2(c+h')(a-t) \\ + 2bcA^2(c+h')(b-u) \end{array}\right\} = 0 \; \ldots . \quad (41)$$

Sind T, U die Coordinaten des Mittelpunkts dieser Curve, so finden wir, wie in Aufgabe II., dass

$$\left. T = \frac{a(C^2+c^2) - c(c+h')(a-t)}{C^2+c^2}, \quad U = \frac{b(C^2+c^2) - c(c+h')(b-u)}{C^2+c^2} \right\} \ldots . \quad (42)$$

Sind

$$\left\{\frac{t}{\alpha}\right\}^2 + \left\{\frac{u}{\beta}\right\}^2 = 1, \quad \left\{\frac{t}{\alpha}\right\}^2 - \left\{\frac{u}{\beta}\right\}^2 = 1, \quad u^2 = pt; \; u = m + nt \; \ldots . \quad (43)$$

die Gleichungen der in a), b), c), d) angegebenen Curven, auf welchen sich der Mittelpunkt des Hyperboloids bewegt, so sind die Gleichungen der fraglichen Mittelpunktsörter folgende:

Im Fall a):

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^2(C^2+c^2)^2U^2+\beta^2(C^2+c^2)^2T^2\\ +2\alpha^2b(ch'-C^2)(C^2+c^2)U\\ +2\beta^2a(ch'-C^2)(C^2+c^2)T\\ +(ch'-C^2)^2(a^2\beta^2+b^2\alpha^2)-\alpha^2\beta^2c^2(c+h')^2\end{array}\right\}=0\ldots\ldots(44)$$

Im Fall b):

$$\left.\begin{array}{l}\beta^2(C^2+c^2)^2T^2-\alpha^2(C^2+c^2)^2U^2\\ -2\alpha^2b(ch'-C^2)(C^2+c^2)U\\ +2\beta^2a(ch'-C^2)(C^2+c^2)T\\ +(ch'-C^2)^2(a^2\beta^2-b^2\alpha^2)-\alpha^2\beta^2c^2(c+h')^2\end{array}\right\}=0\ldots\ldots(45)$$

Im Fall c):

$$\left.\begin{array}{l}U^2=\frac{(ch'-C^2)}{(C^2+c^2)^2}\{pc(c+h')a-b^2(ch'-C^2)\}\\ \qquad-\frac{2b(ch'-C^2)U}{C^2+c^2}+\frac{pc(c+h')T}{C^2+c^2}\end{array}\right\}\ldots\ldots(46)$$

Im Fall d):

$$U=\frac{(ch'-C^2)(an-b)+cm(c+h')}{C^2+c^2}+nT\ldots\ldots(47)$$

Auch diese vier Curven sind ähnlich mit jenen in (43). Bei den übrigen Flächen des zweiten Grades wird man bei ähnlichen Untersuchungen Resultate erhalten, welche mit den bereits gefundenen im Allgemeinen übereinstimmen.

III.

Ueber elliptische Flächenräume.

Von

Herrn L. Mossbrugger,

Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau.

Es bewegt sich ein Punkt P innerhalb einer Ellipse $DCBE$, (Taf. I. Fig. 2.), deren Achsen $2a$, $2b$ sein sollen, so, dass wenn man durch denselben parallel mit den beiden Achsen DB und EC Linien zieht, wie KS und NL, die Flächenräume $ACNL$ und $AKSB$, welche zwischen der parallelen Halbachse, dem von jenen Linien auf der andern Achse abgeschnittenen Stück und dem zwischenliegenden elliptischen Bogen begränzt sind, einander gleich werden. Welches ist der geometrische Ort des Punktes P?

Es sei $AL = x$, $LN = y$, $AK = x'$, $KS = y'$, so ist bekanntlich der Inhalt der

$$\text{Fläche } ACNL = \frac{bx}{2a}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{ab}{2} \text{ Arc sin } \frac{x}{a} \ldots. \quad (1)$$

und der Inhalt der

$$\text{Fläche } AKSB = \frac{ax'}{2b}\sqrt{b^2 - x'^2} + \frac{ab}{2} \text{ Arc sin } \frac{x'}{b} \ldots. \quad (2)$$

Nach der Bedingung der Aufgabe muss also die Gleichung

$$\frac{bx}{2a}\sqrt{a^2-x^2} - \frac{ax'}{2b}\sqrt{b^2-x'^2} + \frac{ab}{2}\text{Arc sin}\frac{x}{a} - \frac{ab}{2}\text{Arc sin}\frac{x'}{b} = 0 \ldots. \quad (3)$$

statt finden.

Dieser Gleichung wird aber Genüge geleistet, wenn wir entweder die transcendenten, oder die algebraischen Grössen einander gleich setzen; dadurch erhalten wir im ersten Fall:

$$\text{Arc sin } \frac{x}{a} = \text{Arc sin } \frac{x'}{b},$$

folglich auch

$$\frac{x}{a} = \pm \frac{x'}{b},$$

mithin

$$x' = \pm \frac{bx}{a}.$$

Im zweiten Fall aber bekommen wir

$$\frac{bx}{2a}\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{ax'}{2b}\sqrt{b^2 - x'^2};$$

hieraus ist aber

$$x'^2 = \frac{b^2}{2} \pm b^2\left\{\frac{x^2}{a^2} - \tfrac{1}{2}\right\}.$$

Nehmen wir denjenigen Werth von x'^2, welcher sich hieraus für das Zeichen $+$ ergiebt, so erhalten wir: $x'^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$, also wiederum $x' = \pm \frac{bx}{a}$.

Dieser Werth wird offenbar die Gleichung (3) befriedigen. Wir sehen aber daraus ferner, dass es nicht nur einen, sondern eine stetige Folge von Punkten giebt, welche der in der Aufgabe gegebenen Forderung entsprechen. Bezeichnen wir daher die Coordinaten des veränderlichen Punktes P mit t und u, so haben wir $x = t$, $x' = u$, also ist die Gleichung des gesuchten Orts:

$$u = \pm \frac{bt}{a} \; .... \quad (4)$$

Bei dieser Gleichung erkennen wir aber auch gleich, dass durch sie die beiden Asymptoten einer Hyperbel dargestellt werden, die mit der gegebenen Ellipse denselben Mittelpunkt hat, und deren Scheitel in den Endpunkten der grossen Achse $2a$ der Ellipse sind, deren imaginäre Achse aber die gleiche absolute Grösse und Lage hat, wie die der kleinern Achse $2b$ der gegebenen Ellipse, die also allgemein unter dem Namen einer zugeordneten Hyperbel bekannt ist. Weil aber aus dem Obigen auch folgt, dass der elliptische Raum *CNnE* gleich dem ell. R. *BSsD*, so haben wir den allgemeinen, so viel mir bekannt ist, noch neuen Satz:

I. Dass wenn man aus irgend einem Punkt der Asymptoten einer Hyperbel, welcher innerhalb der zugehörigen Ellipse liegt, mit den Achsen der letztern parallele Sehnen zieht, alsdann diejenigen beiden elliptischen Räume einander gleich sind, deren einer von der kleinen Achse, der ihr parallelen Sehne und den beiden elliptischen Bogen, welche zwischen jenen liegen, begränzt ist; der andere aber ist von der grossen Achse der ihr parallelen Sehne und den beiden zwischen diesen liegenden elliptischen Bogen eingeschlossen.

Mittelst dieses Satzes, den wir, wie besser unten gezeigt wird, noch weiter ausdehnen können, sind wir im Stande, die Gleichheit einer Menge elliptischer Räume herzuleiten und deren Flächen selbst zu bestimmen.

Der Kürze wegen wollen wir im Allgemeinen die fernern Bestimmungen nur auf Theile eines einzigen elliptischen Quadranten, nämlich von *ACFBA* beschränken, und zuerst die Vergleichungen

zwischen den elliptischen Flächenräumen und alsdann erst die nähere Bestimmung ihres Inhalts vornehmen.

Wir haben daher nach dem obigen Satz:

$$\text{ellipt. Raum } ACNL = \text{ellipt. Raum } AKSB \ldots . \quad (5)$$

Nehmen wir von jedem dieser Räume das Rechteck $AKPL$ hinweg, so bleibt:

$$\text{ell. R. } KCNP = \text{ell. R. } LPSB \ldots . \quad (6)$$

Aus dem gefundenen allgemeinen Satze folgt ferner, wenn man $F\mathfrak{J}$ parallel AB, und FT parallel AC zieht, dass

$$\text{ell. R. } ACFT = \text{ell. R. } A\mathfrak{J}FB \ldots . \quad (7)$$

mithin ist auch

$$\text{ell. R. } \mathfrak{J}CNF = \text{ell. R. } TFSB \ldots . \quad (8)$$

Beschreiben wir endlich das Rechteck $BRCeDgEi$ um die gegebene Ellipse und verlängern TF und $\mathfrak{J}F$ bis sie die Seiten desselben in V und W treffen, so folgt aus (7) und (5), dass

$$\text{ell. R. } LNFT = \text{ell. R. } K\mathfrak{J}FS \ldots . \quad (9)$$

mithin ist auch

$$\text{ell. R. } GNF = \text{ell. R. } hFS \ldots . \quad (10)$$

und

$$\text{ell. R. } UNVF = \text{ell. R. } FWHS \ldots . \quad (11)$$

$$\text{ell. R. } CFR = \text{ell. R. } BFR \ldots . \quad (12)$$

Aus (8) folgt aber auch

$$\text{ell. R. } AFNC = \text{ell. R. } AFSB \ldots . \quad (13)$$

Nehmen wir ferner ausserhalb der Ellipse $BCDE$ auf einer der Asymptoten, z. B. auf AFR, einen beliebigen Punkt P' und ziehen $P'K'$ parallel mit AB, $P'L'$ parallel mit AC, so folgt aus (13), dass auch

$$\text{Raum } CK'P'F = \text{Raum } BFP'L' \ldots . \quad (14)$$

ist. Da wir den Punkt P' an einem ganz beliebigen Ort, jedoch auf einer der beiden Asymptoten liegend, angenommen haben, so ergiebt sich aus No. (14) als Erweiterung des Satzes I. noch folgender:

II. Wo wir auf einer der Asymptoten einer Hyperbel einen Punkt annehmen und von demselben auf die verlängerten Achsen der zugehörigen Ellipse Perpendikel fällen, so ist der Raum, welcher zwischen einem solchen Perpendikel, dem ihm nicht parallelen Achsenstück, das zwischen dem Scheitel der Ellipse und dem Fusspunkt

jenes Perpendikels liegt, dem Asymptotenstück, das zwischen dem angenommenen Punkt und ihrem Durchschnitt mit der Ellipse befindlich ist, und endlich zwischen dem elliptischen Bogen, welcher zwischen diesem Durchschnitt und jenem Scheitel befindlich ist, gleich dem elliptischen Raum, der von den analogen Stücken auf der andern Seite der Asymptote begränzt ist.

Ziehen wir BC, so wird diese von AR in X halbirt, und wir haben $AX = RX = BX = CX$, und wenn wir XY parallel mit AC, OFI parallel mit BC ziehen, so ist auch $AY = BY$, $AT = IT$, $OF = IF = AF$. Also ist $\Delta\, AOF = \Delta\, AIF$, und $\Delta\, ACX = \Delta\, ABX$, mithin ist auch, wegen No. 13.,

$$\text{ell. R. } CNFO = \text{ell. R. } BSFI \ldots. \quad (15)$$

und

$$\text{ell. R. } CNFX = \text{ell. R. } BSFX \ldots. \quad (16)$$

Diese Vergleichungen, welche alle aus dem durch die Gleichung (5) dargestellten und in I. durch Worte ausgedrückten allgemeinen Satz abgeleitet sind, lassen sich noch auf vielfache Art vermehren. Wir wollen jedoch schliesslich, um nicht allzu weitläufig zu werden, einige Inhalte der bereits verglichenen elliptischen Räume bestimmen.

Bezeichnen wir die Coordinaten des Punktes F mit t', u', nämlich $AT = t'$, $TF = u'$, so finden wir leicht:

$$t' = \frac{a}{\sqrt{2}},\ u' = \frac{b}{\sqrt{2}},\ AF = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Da aber nach No. (1)

$$\text{ell. R. } ACFT = \frac{bt'}{2a}\sqrt{a^2 - t'^2} + \frac{ab}{2}\text{ Arc sin }\frac{t'}{a},$$

so finden wir wegen No. (7):

$$\text{ell. R. } A\mathfrak{F}FB = \text{ell. R. } ACFT = \frac{ab}{8}(\pi + 2) \ldots. \quad (17)$$

Aus No. (1), (6) und (8) folgt:

$$\text{ell. R. } KCNP = \text{ell. R. } LPSB$$
$$= \frac{bx}{2a}\{\sqrt{a^2 - x^2} - 2x\} + \frac{ab}{2}\text{ Arc sin }\frac{x}{a} \ldots. \quad (18)$$

Aus (17) und (8) ist aber

$$\text{ell. R. } \mathfrak{F}CNF = \text{ell. R. } TFSB = \frac{ab}{8}(\pi - 2) \ldots. \quad (19)$$

Aus (1), (17) und (9) folgt:

$$\text{ell. R. } LNFT = \text{ell. R. } K\mathfrak{F}FS$$
$$= \frac{ab}{8}(\pi + 2) - \frac{bx}{2a}\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{ab}{2}\text{ Arc sin }\frac{x}{a} \ldots. \quad (20)$$

Aus (18), (19) und (10) folgt:

ell. R. $GNF =$ ell. R. hFS

$$= \frac{ab}{8}(\pi - 2) - \frac{bx}{2a}\{\sqrt{a^2 - x^2} - a\sqrt{2}\} - \frac{ab}{2} \text{ Arc sin } \frac{x}{a} \ldots. \quad (21)$$

und auch

ell. R. $ThSB =$ ell. R. $CNGF$

$$= \frac{bx}{2a}\{\sqrt{a^2 - x^2} - a\sqrt{2}\} + \frac{ab}{2} \text{ Arc sin } \frac{x}{a} \ldots. \quad (22)$$

Ferner finden wir noch:

$$\text{ell. R. } AFNC = \text{ell. R. } AFSB = \frac{ab\pi}{8} \ldots. \quad (23)$$

$$\text{ell. R. } CFR = \text{ell. R. } BFR = \frac{ab}{8}(4 - \pi) \ldots. \quad (24)$$

$$\text{ell. R. } CNFO = \text{ell. R. } BSFI = \frac{ab}{8}(4 - \pi) \ldots. \quad (25)$$

Aus (24) und (25) folgt auch, dass die elliptischen Räume $CNFO$, $BSFI$, $CNFR$, $BSFR$ einander gleich sind.

Ferner ist auch

$$\text{ell. R. } CFX = \text{ell. R. } BFX = \frac{ab}{8}(\pi - 2) \ldots. \quad (26)$$

Aus (19) und (26) geht auch hervor, dass die elliptischen Räume $CNFX$, $BSFX$, $\mathfrak{F}CNF$, $BSFT$ ebenfalls einander gleich sind.

Setzen wir endlich $AL' = x''$, so ist $P'L' = \frac{bx''}{a}$, und wir finden leicht, dass

$$\text{ell. R. } CFP'K' = \text{ell. R. } BFP'L' = \frac{b}{8a}\{4x''^2 - a^2\pi\} \ldots. \quad (27)$$

Wir würden die nämlichen Resultate wie in (13) und (23) erhalten haben, wenn wir die Frage gestellt hätten:

Wo ist der Ort des Punktes P, dass, wenn NPL parallel AC gezogen und AP bis zum Durchschnitt mit der Ellipse verlängert wird, alsdann der Flächenraum $ACNP$ gleich dem elliptischen Sector $AFSB$ wird?

Denken wir uns, um die Figur nicht mit Linien zu überladen, es sei AFR nicht die Asymptote der Hyperbel $e'Bg'$, und setzen $AL = x$, $NL = y$, $AT = x'$, $FT = y'$, so ist

$$\text{ell. R. } ACNP = \text{ell. R. } ACNL - \Delta\, APL$$

und

$$\text{ell. Sect. } AFSB = \text{ell. R. } BSFT + \Delta\, AFT,$$

oder da $x : PL = x' : y'$ und $PL = \frac{xy'}{x'} = \frac{bx}{ax'}\sqrt{a^2 - x'^2}$ ist, so haben wir:

$$\text{ell. R. } ACNP = \frac{bx}{2a}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{ab}{2}\text{ Arc sin }\frac{x}{a} - \frac{bx^2}{2ax'}\sqrt{a^2 - x'^2},$$

$$\text{ell. Sect. } AFSB = \frac{ab}{2}\text{ Arc cos }\frac{x'}{a}.$$

Folglich haben wir die Bedingungsgleichung:

$$\frac{bx}{2a}\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{bx^2}{2ax'}\sqrt{a^2 - x'^2} + \frac{ab}{2}\left\{\text{Arc sin}\frac{x}{a} - \text{Arc cos}\frac{x'}{a}\right\} = 0 \ldots (28)$$

Es ist aber

$$\text{Arc cos }\frac{x'}{a} = \text{Arc sin }\frac{\sqrt{a^2 - x'^2}}{a},$$

mithin wird die Gleichung (28) zu

$$\frac{bx}{2a}\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{bx^2}{2ax'}\sqrt{a^2 - x'^2} + \frac{ab}{2}\left\{\text{Arc sin}\frac{x}{a} - \text{Arc sin}\frac{\sqrt{a^2 - x'^2}}{a}\right\} = 0.$$

Setzen wir in dieser Gleichung die transcendenten Grössen einander gleich, so muss auch

$$x = \sqrt{a^2 - x'^2}$$

sein, woraus wir

$$x' = \sqrt{a^2 - x^2}$$

erhalten.

Setzen wir diesen Werth von x' in die letzte Gleichung, so finden wir, dass derselben nur in dem Fall genügt wird, wenn $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ist; mithin muss der Punkt P auf F fallen, und es ergeben sich wieder die Gleichungen in No. (13) und (23).

IV.

Entwickelung der beiden im Literarischen Berichte. No. XVIII. S. 278. und S. 279. angeführten Lehrsätze des Herrn Clausen.

Von

Herrn A. Göpel

zu Berlin.

Man erkennt sehr leicht, dass diese beiden Theoreme zu der Gattung derjenigen gehören, welche man aus der Vergleichung zweier verschiedenen Entwickelungen von einer und derselben Function nach Potenzen ihrer Variabeln als Corollare erhält. So kann man z. B. die Function $(1+x)^{m+n}$ erstens nach dem binomischen Lehrsatze entwickeln; dies giebt

$$1+(m+n)_1x+(m+n)_2x^2+\ldots;$$

dann kann man sie aber auch in das Product $(1+x)^m(1+x)^n$ verwandeln und jeden Factor entwickeln; dies giebt

$$(1+m_1x+m_2x^2+\ldots)(1+n_1x+n_2x^2+\ldots)$$

oder

$$1+(m_1+n_1)x+(m_2+m_1n_1+n_2)x^2+\ldots$$

Diese Entwickelung ist der obigen gleich; und man wird also auf die Gleichheit der Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von x schliessen können und als Corollar den bekannten Satz erhalten:

$$(m+n)_p=m_p+m_{p-1}n_1+m_{p-2}n_2+\ldots+n_p.$$

Es kommt nun im Falle unserer beiden Lehrsätze nur darauf an, gerade diejenige Reihenentwickelung zu finden, aus welcher sie gefolgert werden können.

Der erste Lehrsatz ist folgender:

„Alle Combinationen von ganzen Zahlen, deren Summe n ist, „seien

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots.$$

$$\beta + \beta' + \beta'' + \ldots.$$

$$\gamma + \gamma' + \gamma'' + \ldots.$$

u. s. w.

„und die Anzahl der gleichen α, α', α'', ... seien λ, λ', λ'', ...; „der gleichen β, β', β'', ... seien μ, μ', μ'', ...; der gleichen γ, γ', „γ'', ... seien ν, ν', ν'', ...; so ist

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha \cdot \alpha' \cdot \alpha'' \ldots.} \cdot \frac{1}{\lambda!\lambda'!\lambda''!\ldots.} \\ + &\frac{1}{\beta \cdot \beta' \cdot \beta'' \ldots.} \cdot \frac{1}{\mu!\mu'!\mu''!\ldots.} \qquad (A) \\ + &\frac{1}{\gamma \cdot \gamma' \cdot \gamma'' \ldots.} \cdot \frac{1}{\nu!\nu'!\nu''!\ldots.} \\ + &\text{u. s. w.} = 1. \end{aligned}$$

Zum Beispiel, wenn $n = 7$, so hat man unter andern die Combination $2 + 2 + 1 + 1 + 1$. Hier wäre etwa $\alpha = 2$, $\alpha' = 2$, $\alpha'' = 1$, $\alpha''' = 1$, $\alpha^{IV} = 1$. Unter diesen Zahlen kommt die 2 zweimal, die 1 dreimal vor; es wäre daher $\lambda = 2$, $\lambda' = 3$; und dieser Zerlegung entspräche daher in der zu beweisenden Gleichung das Glied

$$\frac{1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2!3!}.$$

Um nun die Richtigkeit derselben darzuthun, betrachte ich den Ausdruck (A) als Coefficienten von x^n oder $x^{\alpha+\alpha'+\alpha''+\ldots.}$ und habe daher für sein erstes Glied das Product

$$\frac{x^\alpha}{\alpha} \cdot \frac{x^{\alpha'}}{\alpha'} \cdot \frac{x^{\alpha''}}{\alpha''} \ldots. \frac{1}{\lambda!\lambda'!\lambda''!\ldots.}.$$

Ein solches Product kommt aber offenbar vor, wenn ich eine Reihe aus lauter Gliedern wie $\frac{x^\alpha}{\alpha}$, d. h. die Reihe

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots.$$

bilde, welche der Kürze wegen mit y bezeichnet sein mag, und wenn ich diese Reihe eben so oft setze als die Anzahl der Zahlen α, α', α'', ... anzeigt, und dann sämmtliche Reihen mit einander multiplicire. Ist nämlich p die Anzahl der in der Combination $\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots.$ enthaltenen Glieder und wird die Potenz y^p, d. h. das Product

$$(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots.)$$
$$\times (x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots.)$$
$\times$ u. s. w.
$$\times (x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots.)$$

entwickelt, so hat man jedes Glied der ersten Reihe mit jedem Gliede der zweiten, dritten u. s. w. bis zur letzten zu multipliciren. In der ersten Reihe kommt aber das Glied $\frac{x^\alpha}{\alpha}$, in der zweiten das Glied $\frac{x^{\alpha'}}{\alpha'}$, in der dritten das Glied $\frac{x^{\alpha''}}{\alpha''}$ u. s. w. vor; es wird also im Product das Glied $\frac{x^\alpha}{\alpha} \cdot \frac{x^{\alpha'}}{\alpha'} \cdot \frac{x^{\alpha''}}{\alpha''} \ldots.$ vorkommen. Inzwischen, da das Glied $\frac{x^\alpha}{\alpha}$ nicht allein in der ersten, sondern in allen übrigen Reihen vorkommt, und da dasselbe auch von den Gliedern $\frac{x^{\alpha'}}{\alpha'}$, $\frac{x^{\alpha''}}{\alpha''}$, ... gilt, so wird im Product auch z. B. das Glied

$$\frac{x^{\alpha'}}{\alpha'} \cdot \frac{x^\alpha}{\alpha} \cdot \frac{x^{\alpha''}}{\alpha''} \ldots.$$

vorkommen, in welchem der erste Factor von der ersten Reihe, der zweite von der zweiten, u. s. w. herrührt. Das Glied $\frac{x^\alpha}{\alpha} \cdot \frac{x^{\alpha'}}{\alpha'} \cdot \frac{x^{\alpha''}}{\alpha''} \ldots.$ wird also im Product so oft vorkommen, als man aus den Elementen α, α', α'' .... verschiedene Permutationen bilden kann. Die Anzahl dieser Elemente ist aber p; wären sie alle von einander verschieden, so wäre die Anzahl ihrer Permutationen gleich $p!$ Nun zerfallen sie aber der Voraussetzung zufolge in Gruppen, welche zu λ, zu λ', u. s. w. unter sich gleich sind. Daher beschränkt sich die Anzahl ihrer unter sich verschiedenen Permutationen bekanntlich auf

$$\frac{p!}{\lambda!\,\lambda'!\,\lambda''!\ldots.}.$$

In der Entwickelung von y^p erhält das Glied $\frac{x^\alpha}{\alpha} \cdot \frac{x^{\alpha'}}{\alpha'} \cdot \frac{x^{\alpha''}}{\alpha''} \ldots.$ daher diese Zahl zum Coefficienten, oder y^p enthält das Glied

$$\frac{x^n}{\alpha \cdot \alpha' \cdot \alpha'' \ldots.} \cdot \frac{p!}{\lambda!\,\lambda'!\,\lambda''!\ldots.};$$

folglich enthält die Entwickelung von $\frac{y^p}{p!}$ das Glied

$$\frac{x^n}{\alpha \cdot \alpha' \cdot \alpha'' \ldots.} \cdot \frac{1}{\lambda!\,\lambda'!\,\lambda''!\ldots.}.$$

Dasselbe gilt natürlich von den Gliedern

$$\frac{x^n}{\beta \cdot \beta' \cdot \beta'' \ldots\ldots} \cdot \frac{1}{\mu!\,\mu'!\,\mu''!\ldots\ldots}$$

in denen die Anzahl der Zahlen β, β', β'', ... ebenfalls gleich p ist; und somit wird es klar, dass der Coefficient von x^n in der Entwickelung von $\frac{y^p}{p!}$ aus denjenigen Gliedern des Ausdrucks (A) bestehen wird, welche solchen Combinationen

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots\ldots$$
$$\beta + \beta' + \beta'' + \ldots\ldots$$

u. s. w.

zur Summe n entsprechen, in denen die Anzahl der Elemente α, α', α'' (oder β, β', β'' ..... u. s. w.) gleich p ist.

Geben wir nun dem p sämmtliche Werthe von 1 bis zum Unendlichen, so wird in der Entwickelung der Summe

$$\frac{y}{1} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots\ldots \quad (B)$$

nach Potenzen von x der Coefficient von x^n aus sämmtlichen Gliedern des Ausdrucks (A) bestehen, weil die Combinationen

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots\ldots$$
$$\beta + \beta' + \beta'' + \ldots\ldots$$

u. s. w.,

denen sie entsprechen, entweder aus einem, oder aus zwei, oder aus mehreren Elementen bestehen müssen. Die Summe (B) ist also der fragliche Ausdruck, auf dessen Auffindung es ankam, und den man jetzt nur noch auf eine andere Art nach Potenzen von x zu entwickeln hat, um sofort den Werth des Ausdrucks (A) durch Vergleichung mit dem Coefficienten von x^n zu erhalten.

Eigentlich könnte man die Summe (B) bei dem Gliede $\frac{y^n}{n!}$ abbrechen, weil die höheren Glieder $\frac{y^{n+1}}{(n+1)!}$ u. s. w. ohnehin höhere Potenzen von x als die $n$te enthalten und daher auf den Coefficienten von x^n keinen Einfluss üben. Indessen können diese höheren Glieder aus demselben Grunde auch beibehalten werden, was um so zweckmässiger ist, da die Summe (B) nur dann leicht auf anderweitige Art nach Potenzen von x entwickelt werden kann, wenn sie bis ins Unendliche fortgesetzt wird. Man hat nämlich bekanntlich

$$\frac{y}{1} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots\ldots = e^y - 1.$$

Nun ist aber

$$y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots = -ln(1-x),$$

folglich

$$e^y - 1 = \frac{1}{1-x} - 1 = x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Der Coefficient von x^n, welcher dem Ausdrucke (A) gleich sein muss, ist in dieser Entwickelung aber gleich 1. Der Lehrsatz ist also erwiesen. Ein dazu gehöriges Beispiel ist schon an der oben angeführten Stelle gegeben worden, und ich will nur noch erwähnen, dass sich das Wilsonsche Theorem aus unserm Lehrsatze wiederum als Corollar ergiebt.

Ist nämlich n eine Primzahl, so kann der Ausdruck (A) nur zwei Glieder enthalten, welche den Factor n im Nenner haben: es sind diejenigen beiden, welche den Combinationen

$$n \text{ und } 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots (n\text{mal})$$

entsprechen. Denn entweder ist eine der Zahlen $\alpha, \alpha' \ldots$ gleich n, und dies kann nur bei einer einzigen Combination der Fall sein, weil $\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots$ genau gleich n sein muss; oder eine der Zahlen $\lambda, \lambda', \lambda'', \ldots$ ist gleich n, und dies kann wieder nur bei einer einzigen Combination stattfinden, weil $\lambda + \lambda' + \lambda'' + \ldots$ mindestens gleich der Anzahl der Elemente $\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots$ sein muss, diese aber höchstens gleich n sein kann, in welchem Falle $\alpha = \alpha' = \alpha'' = \ldots = 1$ ist. Den beiden oben angegebenen Combinationen entsprechen im Ausdruck (A) die Glieder

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n!},$$

und sie sind daher gleich der Einheit weniger den übrigen Gliedern, folglich gleich einem Bruche, der keinen Factor n im Nenner hat. Aus der Summe $\frac{1}{n} + \frac{1}{n!}$ muss daher der Factor n im Nenner verschwinden, folglich auch aus dem Product derselben mit der ganzen Zahl $(n-1)!$, d. h. aus $\frac{(n-1)!+1}{n}$. Dieser Ausdruck hat aber keine anderen Factoren als n im Nenner, er muss also eine ganze Zahl sein; und hierin besteht eben das Wilsonsche Theorem.

Der zweite der angeführten Lehrsätze ist folgender:

„Die Summe der Reihe

$$1 - \frac{n}{1} + \frac{(n-1)(n-2)}{2.3} - \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4} + \ldots$$

„bis ein Glied verschwindet, ist:

$$\frac{3}{n+3}, \frac{2}{n+3}, 0, -\frac{1}{n+3}, 0, \frac{2}{n+3},$$

„jenachdem n beziehungsweise von der Form ist:

$$6v,\ 6v+1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

Mit der Analyse des Beweises will ich mich der Kürze wegen nicht aufhalten.

Es ist

$$(C)\quad ln(1-x+x^2)-ln(1-x)=ln\frac{1-x+x^2}{1-x}=ln\frac{1+x^3}{1-x^2}.$$

Wird nun die linke Seite dadurch entwickelt, dass in die Formel

$$ln(1-y)=-y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}-\ldots.$$

y der Reihe nach gleich $x-x^2$ und x gesetzt wird, so ergiebt sich

$$x-x(1-x)+\frac{x^2-x^2(1-x)^2}{2}+\frac{x^3-x^3(1-x)^3}{3}+\ldots. \\ +\frac{x^{n-1}-(1-x)^{n-1}}{n-1};$$

bei diesem Gliede kann man abbrechen, denn die folgenden würden doch keine $n$ten Potenzen von x mehr erhalten. Nun ist nach dem binomischen Lehrsatze

$$1-(1-x)^{n-1}=(n-1)x-(n-1)_2x^2+\ldots.$$
$$1-(1-x)^{n-2}=(n-2)x-(n-2)_2x^2+\ldots.$$

u. s. w.

$$1-(1-x)^2=2x-2_2x^2$$
$$1-(1-x)\ =1\,.\,x.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach einander mit $\frac{x^{n-1}}{n-1}$, $\frac{x^{n-2}}{n-2}$, $\ldots.\frac{x^2}{2}$, $\frac{x}{1}$, und addirt dann alles, so hat man

$$\frac{x^{n-1}-x^{n-1}(1-x)^{n-1}}{n-1}+\frac{x^{n-2}-x^{n-2}(1-x)^{n-2}}{n-2}+\ldots.+\frac{x-x(1-x)}{1}=$$

$$x^n-\ldots.$$

$$+x^{n-1}-\frac{(n-2)_2}{n-2}x^n+\ldots.$$

$$+x^{n-2}-\frac{(n-3)_2}{n-3}x^{n-1}+\frac{(n-3)_3}{n-3}x^n-\ldots.$$

u. s. w. bis

$$+x^4-\ldots.$$

$$+x^3-\frac{2_2}{2}x^4$$

$$+x^2$$

Der Coefficient von x^n ist in dieser Entwickelung also

$$1-\frac{(n-2)_2}{n-2}+\frac{(n-3)_3}{n-3}-\frac{(n-4)_4}{n-4}+\ldots.$$

oder

$$1-\frac{n-3}{2}+\frac{(n-4)(n-5)}{2.3}-\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{2.3.4}+\dots \quad (D)$$

bis ein Glied Null wird.

Wird nun auch die rechte Seite der Gleichung (C), nämlich $ln\frac{1+x^3}{1-x^2}$ oder $ln(1+x^3)-ln(1-x^2)$ entwickelt, so entspringen aus $ln(1+x^3)$ lauter Glieder von der Form

$$(-1)^{\mu+1}\frac{x^{3\mu}}{\mu},$$

und aus $-ln(1-x^2)$ lauter Glieder von der Form

$$\frac{x^{2\nu}}{\nu}.$$

Die Potenz x^n kann daher nur dann vorkommen, wenn n entweder durch 3, oder durch 2, oder durch beide zugleich theilbar ist, also wenn n eine der Formen $6v$, $6v+2$, 3, 4 hat. Der Ausdruck (D) verschwindet also, wenn n eine der beiden Formen $6v+1$, 5 hat.

Suchen wir nun den Coefficienten von x^n für die ersteren Fälle. Wenn n nur durch 2 theilbar ist und also eine der Formen $6v+2$, 4 hat, so kommt x^n nur unter den Gliedern $\frac{x^{2\nu}}{\nu}$ vor und sein Coefficient ist $\frac{1}{\nu}$ oder $\frac{2}{n}$, da jetzt $n=2\nu$ ist.

Wenn n nur durch 3 theilbar ist und also die Form $6v+3$ hat, so kommt x^n nur unter den Gliedern $(-1)^{\mu+1}\frac{x^{3\mu}}{\mu}$ vor und sein Coefficient ist $(-1)^{\mu+1}\frac{1}{\mu}$ oder $\frac{3}{n}$, da jetzt $n=3\mu$ und μ ungerade, mithin $\mu+1$ gerade ist.

Wenn schliesslich n sowohl durch 2, als durch 3 theilbar ist, und also die Form $6v$ hat, so kommt x^n sowohl unter den Gliedenn $(-1)^{\mu+1}\frac{x^{3\mu}}{\mu}$, als auch unter den Gliedern $\frac{x^{2\nu}}{\nu}$ vor. Dort hat es den Coefficienten $(-1)^{\mu+1}\frac{1}{\mu}$ oder $-\frac{3}{n}$, da jetzt $n=3\mu$ und μ gerade, mithin $\mu+1$ ungerade ist; hier hat es den Coefficienten $\frac{1}{\nu}$ oder $\frac{2}{n}$, da n auch $=2\nu$ ist. Die Summe dieser beiden Coefficienten ist aber gleich $-\frac{1}{n}$.

Fassen wir alles Vorstehende zusammen, so ergiebt sich, dass der Ausdruck (D) oder

$$1-\frac{n-3}{2}+\frac{(n-4)(n-5)}{2.3}-\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{2.3.4}+\dots$$

bis ein Glied Null wird, gleich

$$-\frac{1}{n},\ 0,\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n},\ \frac{2}{n},\ 0$$

ist, jenachdem n eine der Formen $6v$, $6v+1$, 2, 3, 4, 5 hat Wird hier $n+3$ anstatt n gesetzt, so ist die Summe der Reihe

$$1-\frac{n}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2.3}-\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4}+\ldots.$$

gleich

$$-\frac{1}{n+3},\ 0,\ \frac{2}{n+3},\ \frac{3}{n+3},\ \frac{2}{n+3},\ 0$$

jenachdem $n+3$ die Formen $6v$, $6v+1$, 2, 3, 4, 5, d. h. jenachdem n die Formen $6v+3$, 4, 5, 0, 1, 2 hat; oder jene Summe ist gleich

$$\frac{3}{n+3},\ \frac{2}{n+3},\ 0,\ -\frac{1}{n+3},\ 0,\ \frac{2}{n+3},$$

jenachdem n die Formen $6v+0$, 1, 2, 3, 4, 5 hat, welches der zu beweisende Lehrsatz ist.

Man kann aber auch diese lästige Unterscheidung der Formen von n vermeiden und einen generellen Summenausdruck für (D) finden, wenn man die rechte Seite der Gleichung (C) mit Hülfe des Imaginären auf eine andere Art entwickelt. Sind nämlich α und β die beiden primitiven Cubikwurzeln der Einheit, so ist $\alpha = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$, $\beta = \cos\frac{2}{3}\pi - i\sin\frac{2}{3}\pi$, $\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=1$, und man hat

$$ln\left(\frac{1+x^3}{1-x^2}\right) = ln\left(\frac{1-x+x^2}{1-x}\right) = ln\frac{(1+\alpha x)(1+\beta x)}{1-x}$$
$$= ln(1+\alpha x) + ln(1+\beta x) - ln(1-x).$$

In den Entwickelungen dieser drei Glieder kommt die Potenz x^n beziehlich mit den Coefficienten

$$(-1)^{n+1}\frac{\alpha^n}{n},\ (-1)^{n+1}\frac{\beta^n}{n},\ \frac{1}{n}$$

vor, folglich ist der Ausdruck (D) gleich

$$\frac{(-1)^{n+1}(\alpha^n+\beta^n)+1}{n}.$$

Es ist aber

$$\alpha^n = (\cos\tfrac{2}{3}\pi + i\sin\tfrac{2}{3}\pi)^n = \cos\frac{2n}{3}\pi + i\sin\frac{2n}{3}\pi,$$

$$\beta^n = (\cos\tfrac{2}{3}\pi - i\sin\tfrac{2}{3}\pi)^n = \cos\frac{2n}{3}\pi - i\sin\frac{2n}{3}\pi,$$

$$\alpha^n+\beta^n = 2\cos\frac{2n}{3}\pi;$$

daher hat man (D) gleich

$$\frac{(-1)^{n+1}\,2\cos\frac{2n}{3}\pi+1}{n}.$$

Wird hier wieder $n+3$ statt n gesetzt, so ist die Summe

$$1-\frac{n}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2.3}-\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4}+\ldots.$$
$$=\frac{1+(-1)^n\,2\cos\frac{2n}{3}\pi}{n+3};$$

woraus wieder die obigen sechs verschiedenen Werthe hervorgehen, wenn man die Formen der Zahl n in Bezug auf den Modulus 6 unterscheiden will.

Zur Uebung für Lernende füge ich noch einige ähnliche Sätze hinzu:

1) $$1-n_1+(n-1)_2-(n-2)_3+\ldots=(-1)^n\frac{\sin\frac{2n+1}{3}\pi}{\sin\frac{1}{3}\pi}$$

2) $$(n+1)_1-2.n_2+3.(n-1)_3-4.(n-2)_4+\ldots.$$
$$=(-1)^n 2.\frac{n+1}{3}.\cos\frac{2n+1}{3}\pi+(-1)^{n+1}\tfrac{2}{3}.\frac{\sin\frac{2n-1}{3}\pi}{\sin\frac{1}{3}\pi}$$

3) $$\frac{m.m+1\ldots.m+n-1}{1.2\ldots.n}-m_1.\frac{m.m+1\ldots.m+n-3}{1.2\ldots.n-2}$$
$$+m_2.\frac{m.m+1\ldots.m+n-5}{1.2\ldots.n-4}-\ldots.=m_n.$$

4) Auch der im 4ten Bande No. XVII. zum Beweise vorgelegte Satz gehört hierher:

$$m_n=m_n.m_n-2.m_{n-1}.m_{n+1}+2.m_{n-2}.m_{n+2}-\ldots.$$
$$+(-1)^n 2.m_0.m_{2n};$$

und man wird sich leicht überzeugen, dass m weder reell noch imaginär, geschweige denn eine positive ganze Zahl zu sein braucht, wie dort angegeben ist.

V.

Ueber die Rechnungsspielerei im V. Theile S. 223. dieses Archivs.

Von

Herrn A. Göpel

zu Berlin.

1.

Die zu lösende Aufgabe ist folgende:
„Man soll die Zahlen von 1 bis 9 dergestalt in das Schema

$$\begin{matrix} a, & b, & c \\ d, & e, & f \\ g, & h, & i \end{matrix}$$

„schreiben, dass die Summen der drei Horizontalreihen, der drei „Verticalreihen und der ersten Diagonalreihe (a, e, i) gleiche „Werthe ergeben."

Bezeichnet man die drei Horizontalreihen der Kürze wegen beziehlich mit h_1, h_2, h_3; eben so die Verticalreihen mit v_1, v_2, v_3; die erste Diagonale mit d_1, so hat man die Gleichungen

$$1) \quad h_1 = h_2 = h_3 = v_1 = v_2 = v_3 = d_1.$$

Nun ist aber die Summe aller 9 Zahlen gleich 45; folglich

$$h_1 + h_2 + h_3 = 45,$$
$$v_1 + v_2 + v_3 = 45;$$

woraus sich in Verbindung mit 1) die Gleichungen

$$2) \quad \begin{matrix} h_1 = 15, & v_1 = 15, & d_1 = 15 \\ h_2 = 15, & v_2 = 15, & \\ h_3 = 15, & v_3 = 15, & \end{matrix}$$

ergeben, von denen eine, z. B. $v_3 = 15$, weggelassen werden kann, weil sie sich durch die übrigen von selbst erfüllt. Es bleiben demnach sechs Gleichungen zur Bestimmung der neun Unbekannten, und das gewöhnliche Verfahren würde nun weiter darin bestehen, dass man dreien von ihnen versuchsweise beliebige Werthe aus der Zahlenreihe 1 .... 9 beilegte, bis man zu sämmtlichen Com-

binationen gelangt wäre, welche für die übrigen 6 Unbekannten geeignete Werthe lieferten; nämlich solche Werthe, die nebst den 3 willkührlich angenommenen die Zahlenreihe 1....9 erschöpften. In dieser Beziehung wäre unsere Aufgabe also nicht des Erwähnens werth. Vielleicht ist aber die folgende Behandlung im Stande, ihr dadurch einiges Interesse zu verleihen, dass sie die Versuche regelt und mindert.

Die Wirksamkeit der Auflösung, welche ich zu geben im Begriff bin, erstreckt sich viel weiter als auf die vorliegende Aufgabe. Um gleich ihre ganze Bedeutung erkennen zu lassen, stelle ich daher die folgende Aufgabe, welche jene als besondern Fall in sich schliesst.

2.

„Man soll neun beliebig gegebene Zahlen dergestalt in das „Schema

$$\begin{matrix} a, & b, & c \\ d, & e, & f \\ g, & h, & i \end{matrix}$$

„einschreiben, dass die Summen $h_1 + v_1$, $h_2 + v_2$, $h_3 + v_3$, „$d_1 + d_1$ gleiche Werthe haben."

Die Bedeutung der Buchstaben h_1 bis d_1 ist dieselbe wie oben.

Bezeichnet man die Summe aller neun Zahlen mit s, so hat man

$$h_1 + h_2 + h_3 = s$$
$$v_1 + v_2 + v_3 = s$$

folglich

$$(h_1 + v_1) + (h_2 + v_2) + (h_3 + v_2) = 2s$$

und, wegen $h_1 + v_1 = h_2 + v_2 = h_3 + v_3$:

$$h_1 + v_1 = \tfrac{2}{3}s.$$

Die Bedingungen der Aufgabe sind also ausgedrückt durch die Gleichungen:

3) $h_1 + v_1 = \frac{2}{3}s$, 6) $d_1 + d_1 = \frac{2}{3}s$

4) $h_2 + v_2 = \frac{2}{3}s$

5) $h_3 + v_3 = \frac{2}{3}s$

Substituirt man hier für h_1 bis d_1 ihre Werthe in a bis i, so erhält man

7) $2a + b + c + d + g = \frac{2}{3}s$, 10) $2a + 2e + 2i = \frac{2}{3}s$

8) $2e + b + f + d + h = \frac{2}{3}s$

9) $2i + c + f + g + h = \frac{2}{3}s$

Addirt man nun 7) und 8) und zieht davon 9) und 10) ab, so ergiebt sich

$$11)\quad b+d=2i;$$

addirt man 7) und 9) und zieht davon 8) und 10) ab, so hat man

$$12)\quad c+g=2e;$$

addirt man 8) und 9) und zieht davon 7) und 10) ab, so wird

$$13)\quad f+h=2a;$$

oder mit andern Worten:
„die Gruppen b, i, d; g, e, c; f, a, h bilden drei arithmetische „Proportionen".
Umgekehrt: wenn dies der Fall ist, so sind die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, d. h. wenn die Gleichungen 11), 12), 13) stattfinden, so ergeben sich daraus die Gleichungen 7) bis 10). Denn addirt man 11), 12), 13) und fügt auf beiden Seiten $a+e+i$ hinzu, so hat man

$$s=3(a+e+i)$$

oder die Gleichung 10). Addirt man 11) und 12) und fügt auf beiden Seiten $2a$ hinzu, so hat man

$$2a+b+c+d+g=2(a+e+i)$$
$$=\tfrac{2}{3}s$$

oder die Gleichung 7) u. s. f.

Desshalb ist die Aufgabe folgendermaassen vollständig gelöst:
„Man bilde aus den gegebenen Zahlen auf alle möglichen „Arten drei Gruppen, deren jede eine arithmetische Proportion „sei; und setze jede dieser Ternionen von Gruppen auf alle mög„lichen Arten der Ternion b, i, d; g, e, c; f, a, h gleich."

3.

Wendet man dies z. B. auf die Zahlenreihe 1 bis 9 an, so übersieht man auf einen Blick, dass sich aus ihr auf die vorgeschriebene Art nur folgende Gruppen bilden lassen:

α) 1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9
β) 1, 2, 3; 4, 6, 8; 5, 7, 9
γ) 1, 3, 5; 2, 4, 6; 7, 8, 9
δ) 1, 4, 7; 2, 5, 8; 3, 6, 9.

Man würde also unter andern (aus 8.) folgende Auflösungen erhalten:

b, i, d; g, e, c; f, a, h
2, 4, 6; 1, 3, 5; 7, 8, 9;

aber auch

$$b,\ i,\ d;\ g,\ e,\ c;\ f,\ a,\ h$$
$$2,\ 4,\ 6;\ 1,\ 3,\ 5;\ 9,\ 8,\ 7;$$

woraus die beiden Quadrate entstehen:

8, 2, 5		8, 2, 5
6, 3, 7	und	6, 3, 9
1, 9, 4		1, 7, 4.

4.

Wenn man in der Aufgabe (2) noch die Bedingung hinzufügt, dass $h_1 = v_1$, $h_2 = v_2$, $h_3 = v_3$ sein soll, so dass also sämmtliche Buchstaben h_1 bis d_1 gleiche Werthe erhalten, so treten zu den Gleichungen 11), 12), 13) nur noch die Gleichungen $h_1 = v_2$, $h_1 = v_3$; denn aus diesen folgen sehr leicht die obigen: $h_1 = v_1$, $h_2 = v_2$, $h_3 = v_3$. Es muss also sein:

$$a + b + c = b + e + h,\ a + b + c = c + f + i$$

oder

$$c - e = h - a,\ a - f = i - b.$$

Mithin erleidet die Auflösung unter (2) die Beschränkung, dass „die Gruppen b, i, d; g, e, c; f, a, h nicht nur arithmetische „Proportionen mit einer und derselben Differenz, sondern „auch zugleich fallende oder steigende sein müssen".

5.

Wendet man dies auf die Zahlenreihe 1 bis 9 an, so erhält man die Auflösung jener sogenannten Rechnungsspielerei. Es erhellt nämlich, dass von den unter (3) aufgeführten Gruppen die β) und γ) ausser Betrachtung fallen; und von den beiden andern giebt α) z. B. folgende Auflösung:

$$b,\ i,\ d;\ g,\ e,\ c;\ f,\ a,\ h$$
$$1,\ 2,\ 3;\ 7,\ 8,\ 9;\ 4,\ 5,\ 6;$$

aber auch

$$b,\ i,\ d;\ g,\ e,\ c;\ f,\ a,\ h$$
$$3,\ 2,\ 1;\ 9,\ 8,\ 7;\ 6,\ 5,\ 4;$$

woraus die beiden Quadrate entstehen:

5, 1, 9		5, 3, 7
3, 8, 4	und	1, 8, 6
7, 6, 2		9, 4, 2;

in denen sämmtliche Reihen mit Ausnahme der (hier so genannten) zweiten Diagonalreihe gleiche Summen, nämlich $\frac{1}{3}s$ oder 15, geben. Dass von den so zu erzielenden Auflösungen manche, wie z. B. die eben angeführten, als identisch zu betrachten sind, ist ein Anderes und überdiess augenfällig genug.

VI.

Ueber einen Satz von der Convergenz der Reihen.

Aus einer Abhandlung des Herrn Professor C. J. Malmsten zu Upsala in den Nov. Act. Reg. Soc. scientiarum Upsaliensis. Vol. XII. Upsaliae. MDCCCXLIV. p. 255. mitgetheilt

von

dem Herausgeber.

In einer „Note sur la convergence des séries" überschriebenen sehr lesenswerthen Abhandlung, welche in dem so eben erschienenen neuesten Bande der Schriften der Königlichen Societät der Wissenschaften zu Upsala a. a. O. abgedruckt ist, hat Herr Professor C. J. Malmsten zu Upsala den folgenden bemerkenswerthen Satz von der Convergenz der Reihen bewiesen:

Soit $f(x)$ une fonction de x, qui, en conservant le même signe pour toutes valeurs très-considérables de x, va toujours en diminuant et s'évanouit pour $x = \infty$; si

$$\lim. \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$$

les séries

$$\mathrm{Cos}\,\alpha\,.f(1) + \mathrm{Cos}\,2\alpha\,.f(2) + \mathrm{Cos}\,3\alpha\,.f(3) + \ldots. + \mathrm{Cos}\,n\alpha\,.f(n) + \text{etc.}$$

$$\mathrm{Sin}\,\alpha\,.f(1) + \mathrm{Sin}\,2\alpha\,.f(2) + \mathrm{Sin}\,3\alpha\,.f(3) + \ldots. + \mathrm{Sin}\,n\alpha\,.f(n) + \text{etc.}$$

sont toujours convergentes pour toutes les valeurs de α, qui ne sont pas infiniment près de 0, 2π, 4π, etc.

Nachdem Herr Professor Malmsten diesen Satz mit Hülfe der Integralrechnung gerechtfertigt hat, sagt er am Schlusse seiner Ab-

handlung: A présent nous allons donner pour ce théorème important une démonstration aussi simple qu'élémentaire, qui pour cela même nous semble mériter une place dans les Traités élémentaires des séries. Diesen elementaren Beweis werde ich im Folgenden den Lesern des Archivs mit des Herrn Verfassers eigenen Worten mittheilen.

Désignons par S_k et S'_k les sommes respectives des k premiers termes des séries

$$\mathrm{Cos}\,\alpha.f(1)+\mathrm{Cos}\,2\alpha.f(2)+\mathrm{Cos}\,3\alpha.f(3)+\ldots+\mathrm{Cos}\,n\alpha.f(n)+\text{etc.}$$
$$\mathrm{Sin}\,\alpha.f(1)+\mathrm{Sin}\,2\alpha.f(2)+\mathrm{Sin}\,3\alpha.f(3)+\ldots+\mathrm{Sin}\,n\alpha.f(n)+\text{etc.}$$

il s'ensuit que

$$\left.\begin{array}{l} S_{n+k}-S_k=\sum\limits_{i=1}^{i=n}\mathrm{Cos}\,(k+i)\alpha\,.f(k+i) \\ S'_{n+k}-S'_k=\sum\limits_{i=1}^{i=n}\mathrm{Sin}\,(k+i)\alpha\,.f(k+i)\end{array}\right\}\ldots\ldots (1)$$

Les séries, dont il s'agit, sont donc convergentes si pour les valeurs infiniment grandes de k

$$S_{n+k}-S_k \text{ et } S'_{n+k}-S'_k$$

s'approchent infiniment de zéro, quelque grand soit le nombre entier n, c'est à dire, si

$$\lim\{S_{n+k}-S_k\}=0,$$
$$\lim\{S'_{n+k}-S'_k\}=0.$$

A cause des formules connues

$$\mathrm{Cos}\,a=\frac{\mathrm{Sin}\,(a+b)-\mathrm{Sin}\,(a-b)}{2\mathrm{Sin}\,b},$$
$$\mathrm{Sin}\,a=-\frac{\mathrm{Cos}\,(a+b)-\mathrm{Cos}\,(a-b)}{2\mathrm{Sin}\,b},$$

on poura mettre les formules (1) sous cette forme

$$S_{n+k}-S_k=\frac{1}{2\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha}{2}}.\sum_{i=1}^{i=n}f(k+i)\{\mathrm{Sin}\,(k+i+\tfrac{1}{2})\alpha-\mathrm{Sin}\,(k+i-\tfrac{1}{2})\alpha\},$$

$$S'_{n+k}-S'_k=-\frac{1}{2\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha}{2}}.\sum_{i=1}^{i=n}f(k+i)\{\mathrm{Cos}(k+i+\tfrac{1}{2})\alpha-\mathrm{Cos}(k+i-\tfrac{1}{2})\alpha\},$$

d'où, en se rappelant que

$$\mathrm{Sin}\,(k+i+\tfrac{1}{2})\alpha=\mathrm{Sin}\,(k+i+1)\alpha\,.\,\mathrm{Cos}\,\frac{\alpha}{2}-\mathrm{Cos}(k+i+1)\alpha\,.\,\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha}{2},$$

$$\mathrm{Cos}(k+i+\tfrac{1}{2})\alpha=\mathrm{Cos}(k+i+1)\alpha\,.\,\mathrm{Cos}\,\frac{\alpha}{2}+\mathrm{Sin}(k+i+1)\alpha\,.\,\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha}{2},$$

on trouvera par une séparation nouvelle

$$S_{n+k} - S_k = \tfrac{1}{2}\text{Cotang}\,\frac{\alpha}{2}\,.\sum_{i=1}^{i=n} f(k+i)\,\{\text{Sin}\,(k+i+1)\alpha - \text{Sin}\,(k+i)\alpha)$$

$$-\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} f(k+i)\,\{\text{Cos}\,(k+i+1)\alpha - \text{Cos}\,(k+i)\alpha\},$$

$$S_{n+k} - S'_k = -\tfrac{1}{2}\text{Cotang}\,\frac{\alpha}{2}\,.\sum_{i=1}^{i=n} f(k+i)\,\{\text{Cos}(k+i+1)\alpha - \text{Cos}(k+i)\alpha\}$$

$$-\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} f(k+i)\,\{\text{Sin}\,(k+i+1)\alpha - \text{Sin}\,(k+i)\alpha\},$$

c'est à dire

$$\left.\begin{aligned} S_{n+k} - S_k &= \tfrac{1}{2}\text{Cotang}\,\frac{\alpha}{2}\,.\,\Delta - \tfrac{1}{2}\Delta' \\ S'_{n+k} - S'_k &= -\tfrac{1}{2}\text{Cotang}\,\frac{\alpha}{2}\,.\,\Delta' - \tfrac{1}{2}\Delta \end{aligned}\right\}\ldots.\ (2)$$

en supposant pour abréger les expressions

$$\Delta = \sum_{i=1}^{i=n} f(k+i)\,\{\text{Sin}\,(k+i+1)\alpha - \text{Sin}\,(k+i)\alpha\},$$

$$\Delta' = \sum_{i=1}^{i=n} f(k+i)\,\{\text{Cos}\,(k+i+1)\alpha - \text{Cos}\,(k+i)\alpha\}.$$

Mais les quantités Δ et Δ' peuvent aussi être mises sous cette forme

$$\Delta = \sum_{i=1}^{i=n}\Big\{\frac{f(k+i)}{f(k+i+1)}\text{Sin}(k+i+1)\alpha\,.f(k+i+1) - \text{Sin}(k+i)\alpha\,.f(k+i)\Big\},$$

$$\Delta' = \sum_{i=1}^{i=n}\Big\{\frac{f(k+i)}{f(k+i+1)}\text{Cos}(k+i+1)\alpha\,.f(k+i+1) - \text{Cos}(k+i)\alpha\,.f(k+i)\Big\},$$

d'où, étant $k=\infty$ et dans ce cas

$$\frac{f(k+i)}{f(k+i+1)} = 1,$$

on aura immédiatement

$$\Delta = \sum_{i=1}^{i=n}\{\text{Sin}\,(k+i+1)\alpha\,.f(k+i+1) - \text{Sin}\,(k+i)\alpha\,.f(k+i)\}$$

$$\Delta' = \sum_{i=1}^{i=n}\{\text{Cos}(k+i+1)\alpha\,.f(k+i+1) - \text{Cos}(k+i)\alpha\,.f(k+i)\},$$

'est à dire

$$\Delta = \text{Sin}\,(k+n+1)\alpha\,.f(k+n+1) - \text{Sin}\,(k+1)\alpha\,.f(k+1),$$
$$\Delta' = \text{Cos}(k+n+1)\alpha\,.f(k+n+1) - \text{Cos}(k+1)\alpha\,.f(k+1).$$

Cela étant, si $f(x)$ s'évanouit pour les valeurs infiniment grandes de x, il s'ensuit évidemment, que

$$\Delta = 0 \text{ et } \Delta' = 0,$$

et partant, en vertu des formules (2),

$$S_{n+k} - S_k = 0,$$
$$S'_{n+k} - S'_k = 0$$

pour toutes les valeurs de α, qui ne s'approchent infiniment de 0, 2π, 4π etc.

C. Q. F. D.

VII.

Note sur l'Intégrale finie $\Sigma e^x y$.

Par

Monsieur C. J. Malmstén,

Professeur des Mathématiques à l'Université d'Upsala.

(Aus den Novis Actis Regiae Societatis scientiarum Upsaliensis. Vol. XII. Upsaliae. 1844. mitgetheilt vom Herausgeber.)

Etant y une fonction entière de x, on sait bien, que l'intégrale finie

$$\Sigma e^x y$$

peut toujours se trouver sous la forme finie par la formule connue

$$(e^h - 1)\Sigma e^x y = e^x y + Ahe^x \cdot \frac{dy}{dx} + Bh^2 e^x \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + Ch^3 e^x \cdot \frac{d^3 y}{dx^3} + \text{etc.} \ldots \quad (1)$$

où les coëfficiens sont déterminés par les équations *)

---

*) Voyez Lacroix Traité des Différ. et des Séries. Paris. 1800. pag. 109.

$$A(e^h-1)+e^h=0$$

$$B(e^h-1)+\frac{1}{1}.Ae^h+\frac{e^h}{1.2}=0$$

$$C(e^h-1)+\frac{1}{1}Be^h+\frac{1}{1.2}Ae^h+\frac{e^h}{1.2.3}=0$$

$$D(e^h-1)+\frac{1}{1}Ce^h+\frac{1}{1.2}Be^h+\frac{1}{1.2.3}Ae^h+\frac{e^h}{1.2.3.4}=0$$

etc.

Le tout consiste à trouver une expression générale pour calculer l'un quelconque de ces coëfficiens indépendamment des autres. En effet une telle expression est dejà trouvée par Eytelwein *); mais, que je sache, personne n'a observé la relation intime de ces coëfficiens aux dérivées successives de la fonction

$$\frac{1}{e^h-1}.$$

C'est cette relation que je vais faire connaître dans la note présente, et qui, je crois, doit être d'autant plus importante, qu'elle nous fournit un moyen aisé de démontrer rigoureusement la formule symbolique

$$\Sigma e^x y=\frac{1}{e^{\frac{dy}{dx}h}-1},$$

y étant une fonction entière de x.

Soit y une fonction entière de x de $m$ième dégré, et substituons dans (1)

$$(e^h-1)A_1,\ (e^h-1)A_2,\ (e^h-1)A_3,\ (e^h-1)A_4,\ \text{etc.}$$

au lieu de

$$A,\ B,\ C,\ D,\ \text{etc.};$$

la formule (1) pourra être présentée sous cette forme

$$\Sigma e^x y=\overset{i=m}{\underset{i=0}{S}}A_i h^i e^x y^{(i)},\ \ldots.\quad (2)$$

où

$$A_0=\frac{1}{e^h-1}\ldots.\quad (3)$$

---

*) Grundlehren der höhern Analysis von J. A. Eytelwein. II. Bd. §. 578.

Mais par la formule connue

$$\Sigma e^x y = \frac{e^x y - e^h \Sigma e^x \Delta y}{e^h - 1},$$

on aura

$$e^x y = (e^h - 1)\Sigma e^x y + e^h \Sigma e^x \Delta y,$$

d'où, en substituant pour Δy

$$\Delta y = \mathop{S}_{k=1}^{k=m} . \frac{h^k y^{(k)}}{1.2\ldots.k},$$

on conclura

$$e^x y = (e^h - 1)\Sigma e^x y + e^h \mathop{S}_{k=1}^{k=m} \frac{h^k}{1.2\ldots.k} \Sigma e^x y^{(k)},$$

et, en posant $y^{(i)}$ au lieu de y,

$$e^x y^{(i)} = (e^h - 1)\Sigma e^x y^{(i)} + e^h \mathop{S}_{k=1}^{k=m} \frac{h^k}{1.2\ldots.k} \Sigma e^x y^{(i+k)}.$$

Substituons à présent cette valeur de $e^x y^{(i)}$ dans (2); en se rappelant que

$$y^{(i+k)} = 0 \text{ pour } i + k > m$$

on aura

$$\Sigma e^x y = \mathop{S}_{i=0}^{i=m} A_i (e^h - 1) h^i \Sigma e^x y^{(i)} + e^h \mathop{S}_{i=0}^{i=m-k} . \mathop{S}_{k=1}^{k=m} A_i . \frac{h^{k+i}}{1.2\ldots.k} \Sigma e^x y^{(i+k)},$$

ou, si l'on pose dans la dernière somme i au lieu de $i + k$,

$$\Sigma e^x y = \mathop{S}_{i=0}^{i=m} A_i (e^h - 1) h^i \Sigma e^x y^{(i)} + e^h \mathop{S}_{i=k}^{i=m} h^i \Sigma e^x y^{(i)} . \mathop{S}_{k=1}^{k=m} \frac{A_{i-k}}{\Gamma(k+1)}.$$

On en conclura très facilement, pour la détermination des coëfficiens A:

$$1 = A_0 (e^h - 1)$$

$$0 = A_1 (e^h - 1) + \frac{e^h A_0}{\Gamma(2)}$$

$$0 = A_2 (e^h - 1) + \frac{e^h A_1}{\Gamma(2)} + \frac{e^h A_0}{\Gamma(3)}$$

et généralement

$$0 = A_m (e^h - 1) + e^h \mathop{S}_{k=1}^{k=m} \frac{A_{m-k}}{\Gamma(k+1)}$$

ou

$$A_m = e^h \mathop{S}_{k=0}^{k=m} \frac{A_{m-k}}{\Gamma(k+1)}$$

ou enfin

$$A_m = e^h \overset{k=m}{\underset{k=0}{S}} \frac{A_k}{\Gamma(m+1-k)} \ldots . \quad (4)$$

En mettant $m-1$ à la place de m, on aura

$$A_{m-1} = e^h \overset{k=m-1}{\underset{k=0}{S}} \frac{A_k}{\Gamma(m-k)},$$

d'où, en différentiant par rapport à h,

$$\frac{dA_{m-1}}{dh} = \frac{e^h A_0}{\Gamma(m)} + e^h \overset{k=m}{\underset{k=1}{S}} \frac{\left\{(m-k)A_k + \frac{dA_{k-1}}{dh}\right\}}{\Gamma(m+1-k)} \ldots . \quad (5)$$

Multiplions à présent la formule (4) par m, et en retranchons (5); nous aurons l'équation

$$mA_m - \frac{dA_{m-1}}{dh} = e^h \overset{k=m}{\underset{k=1}{S}} \frac{\left\{kA_k - \frac{dA_{k-1}}{dh}\right\}}{\Gamma(m+1-k)},$$

qui, pour être satisfaite, exige évidemment que

$$iA_i = \frac{dA_{i-1}}{dh},$$

i étant un nombre entier. En posant ici successive $i-1$, $i-2$, $i-3$, etc. au lieu de i, il en résultera

$$A_i = \frac{1}{\Gamma(i+1)} \cdot \frac{d^i A_0}{dh^i},$$

c'est à dire, en vertu de (3),

$$A_i = \frac{1}{\Gamma(i+1)} \cdot d^i \frac{\left\{\frac{1}{e^h-1}\right\}}{dh} \ldots . \quad (6)$$

Voilà l'équation très simple, qui fait dependre la détermination des coëfficiens A de l'expression générale des dérivées de la fonction

$$\frac{1}{e^h-1}.$$

Quant à la valeur de

$$\frac{d^i\left\{\frac{1}{e^h-1}\right\}}{dh^i},$$

elle pourra se trouver immédiatement par une formule que nous avons autrefois demontrée *), savoir

$$Z_r = (-1)^{\frac{r}{2}} \cdot \underset{k=1}{\overset{k=r+1}{S}} (-1)^{k-1} \overset{(r,k)}{\mathfrak{a}} Z_0{}^k$$

étant

$$Z_0 = \frac{1}{1 + ye^{-a\sqrt{-1}}},$$

$$Z_r = \frac{d^r \left\{ \frac{1}{1 + ye^{-a\sqrt{-1}}} \right\}}{da^r}$$

$$\overset{(r,k)}{\mathfrak{a}} = k^r - \frac{k-1}{1} \cdot (k-1)^r + \frac{k-1}{1} \cdot \frac{k-2}{2} (k-2)^r - \frac{k-1}{1} \cdot \frac{k-2}{2} \cdot \frac{k-3}{3} (k-3)^r + \text{etc.}$$

En faisant ici

$$a = h\sqrt{-1}, \quad y = -1, \quad r = i,$$

nous aurons

$$\frac{d^i \left\{ \frac{1}{e^h - 1} \right\}}{dh^i} = (-1)^i \underset{k=1}{\overset{k=i+1}{S}} \frac{\overset{(i,k)}{\mathfrak{a}}}{(e^h - 1)^k},$$

$$\overset{(i,k)}{\mathfrak{a}} = k^i - \frac{k-1}{1} \cdot (k-1)^i + \frac{k-1}{1} \cdot \frac{k-2}{2} (k-2)^i - \frac{k-1}{1} \cdot \frac{k-2}{2} \cdot \frac{k-3}{3} (k-3)^i + \text{etc.}$$

---

*) Theoremata Nova de Integr. Defin. etc. Upsaliae. 1842. Cfr. Archiv der Mathematik und Physik von Grunert. III. Th. p. 44.

VIII.

Ueber das reguläre Siebzehneck.

Nach einem Aufsatze des Herrn B. Amiot, Professeur au Collège Saint-Louis, in den Nouvelles Annales de Mathématiques. Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, rédigé par Terquem et Gerono. T. III. Paris. 1844. p. 271. frei bearbeitet

von

dem Herausgeber.

Wenn auch die folgende, auf die Auflösung von fünf quadratischen Gleichungen gebrachte Berechnung des regulären Siebzehnecks im Kreise nicht eben viel Neues enthält, so scheint dieselbe doch deshalb zu verdienen, allgemein bekannt und bei'm Unterrichte benutzt zu werden, weil sie bloss die elementarsten Sätze der ebenen Geometrie in Anspruch nimmt.

Wenn in Taf. I. Fig. 3. der um den Mittelpunkt O mit einem der Einheit gleichen Halbmesser beschriebene Kreis von dem Punkte A aus in siebzehn gleiche Theile eingetheilt ist, und die Bogen

$$AB,\ AC,\ AD,\ AE$$

respective

$$\frac{1}{17},\ \frac{2}{17},\ \frac{4}{17},\ \frac{8}{17}$$

der ganzen Peripherie betragen; so ist nach dem pythagoräischen Lehrsatze, wie auf der Stelle erhellen wird:

$$1=\tfrac{1}{4}AC^2+(1-\sqrt{AB^2-\tfrac{1}{4}AC^2})^2,$$

$$1=\tfrac{1}{4}AD^2+(1-\sqrt{AC^2-\tfrac{1}{4}AD^2})^2,$$

$$1=\tfrac{1}{4}AE^2+(1-\sqrt{AD^2-\tfrac{1}{4}AE^2})^2,$$

$$1=\tfrac{1}{4}AB^2+(1-\sqrt{AE^2-\tfrac{1}{4}AB^2})^2;$$

woraus man, wenn man die Quadrate auf der rechten Seite der Gleichheitszeichen gehörig entwickelt, leicht erhält:

$$AB^2 = 2\sqrt{AB^2 - \tfrac{1}{4}AC^2},$$

$$AC^2 = 2\sqrt{AC^2 - \tfrac{1}{4}AD^2},$$

$$AD^2 = 2\sqrt{AD^2 - \tfrac{1}{4}AE^2},$$

$$AE^2 = 2\sqrt{AE^2 - \tfrac{1}{4}AB^2}.$$

Man gelangt zu diesen Gleichungen auch unmittelbar, wenn man sich von den Punkten B, C, D, E auf den Durchmesser AA_1 Perpendikel gefällt denkt, weil man dann nach einem bekannten geometrischen Satze die folgenden Proportionen hat:

$$2 : AB = AB : \sqrt{AB^2 - \tfrac{1}{4}AC^2},$$

$$2 : AC = AC : \sqrt{AC^2 - \tfrac{1}{4}AD^2},$$

$$2 : AD = AD : \sqrt{AD^2 - \tfrac{1}{4}AE^2},$$

$$2 : AE = AE : \sqrt{AE^2 - \tfrac{1}{4}AB^2}.$$

Macht man die obigen Gleichungen rational, so erhält man:

$$AB^4 - 4AB^2 = -AC^2,$$
$$AC^4 - 4AC^2 = -AD^2,$$
$$AD^4 - 4AD^2 = -AE^2,$$
$$AE^4 - 4AE^2 = -AB^2;$$

und hieraus ergiebt sich weiter:

$$AB^2 = 2 \pm \sqrt{4 - AC^2},$$

$$AC^2 = 2 \pm \sqrt{4 - AD^2},$$

$$AD^2 = 2 \pm \sqrt{4 - AE^2},$$

$$AE^2 = 2 \pm \sqrt{4 - AB^2};$$

wo sich nun frägt, wie die Zeichen zu nehmen sind, was leicht auf folgende Art entschieden werden kann.

Weil nämlich

$$0 < \frac{1}{17} < \frac{1}{4},$$

$$0 < \frac{2}{17} < \frac{1}{4},$$

$$0 < \frac{4}{17} < \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{4} < \frac{8}{17} < \frac{1}{2}$$

und das Quadrat der Sehne des vierten Theils der Peripherie 2, das Quadrat des Durchmessers oder der Sehne der halben Peripherie 4 ist; so ist offenbar

$$0 < AB^2 < 2,$$

$$0 < AC^2 < 2,$$

$$0 < AD^2 < 2,$$

$$2 < AE^2 < 4;$$

und man muss also in den drei ersten der vier obigen Gleichungen das untere, in der vierten Gleichung das obere Zeichen nehmen, d. h. man muss

$$AB^2 = 2 - \sqrt{4 - AC^2},$$

$$AC^2 = 2 - \sqrt{4 - AD^2},$$

$$AD^2 = 2 - \sqrt{4 - AE^2},$$

$$AE^2 = 2 + \sqrt{4 - AB^3}$$

oder

$$4 - AB^2 = 2 + \sqrt{4 - AC^2},$$

$$4 - AC^2 = 2 + \sqrt{4 - AD^2},$$

$$4 - AD^2 = 2 + \sqrt{4 - AE^2},$$

$$4 - AE^2 = 2 - \sqrt{4 - AB^3}$$

setzen.

Bezeichnen wir nun die vier Sehnen

$$A_1B,\ A_1C,\ A_1D,\ A_1E$$

durch u, v, w, x; so ist offenbar nach dem pythagoräischen Lehrsatze

$$u = \sqrt{4 - AB^2},$$

$$v = \sqrt{4 - AC^2},$$

$$w = \sqrt{4 - AD^2},$$

$$x = \sqrt{4 - AE^2};$$

und wir haben daher nach dem Obigen die vier folgenden Gleichungen:

$$1)\quad \begin{cases} u^2 = 2 + v, \\ v^2 = 2 + w, \\ w^2 = 2 + x, \\ x^2 = 2 - u. \end{cases}$$

Zieht man die dritte Gleichung von der ersten, und die vierte Gleichung von der zweiten ab, so erhält man:

$$u^2 - w^2 = v - x,$$
$$v^2 - x^2 = u + w;$$

also, wenn man multiplicirt und dann aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$2) \quad (u-w)(v+x) = 1$$

oder

$$3) \quad uv - vw + ux - wx = 1.$$

Zieht man die zweite Gleichung von der ersten, die dritte Gleichung von der zweiten, die vierte Gleichung von der dritten, und die erste Gleichung von der vierten ab, so erhält man:

$$u^2 - v^2 = v - w,$$
$$v^2 - w^2 = w - x,$$
$$w^2 - x^2 = x + u,$$
$$x^2 - u^2 = -(u + v);$$

also, wenn man multiplicirt und aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$4) \quad (u-v)(v+w)(w+x)(x-u) = -1$$

oder

$$5) \quad (uw - vx + ux - vw)(uw - vx + uv - wx) = 1.$$

Man setze nun

$$6) \quad \begin{cases} X = -u + v + w + x, \\ Y = \quad vx - uw, \\ Z = -uvwx. \end{cases}$$

Quadrirt man die erste dieser drei Gleichungen, so erhält man:

$$\begin{aligned} X^2 = \quad & u^2 + v^2 + w^2 + x^2 \\ & - 2(uv - vw + ux - wx) \\ & + 2(vx - uw), \end{aligned}$$

also, weil nach 1)

$$u^2 + v^2 + w^2 + x^2 = X + 8$$

ist, und wegen der Gleichung 3) und der zweiten der Gleichungen 6):

$$7) \quad X^2 - X - 2Y = 6.$$

Die Gleichung 5) kann man auf folgende Art darstellen:

$$(Y - ux + vw)(Y - uv + wx) = 1,$$

also, wenn man multiplicirt:

$$\left.\begin{array}{l} Y^2 - (uv - vw + ux - wx)Y \\ \quad + u^2vx - v^2uw + w^2vx - x^2uw \end{array}\right\} = 1,$$

d. i. nach 3)

$$Y^2 - Y + u^2vx - v^2uw + w^2vx - x^2uw = 1.$$

Nach 1) ist aber, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned} & u^2vx - v^2uw + w^2vx - x^2uw \\ = & u^2w + v^2x - w^2u + x^2v \\ & + 4(vx - uw) \\ = & -(uv - vw + ux - wx) \\ & + 2(-u + v + w + x) + 4(vx - uw) \\ = & -1 + 2X + 4Y, \end{aligned}$$

und folglich nach dem Obigen

$$8) \quad Y^2 + 3Y + 2X = 2.$$

Quadrirt man die zweite der Gleichungen 6), so erhält man:

$$Y^2 = u^2w^2 + v^2x^2 - 2uvwx,$$

d. i.

$$Y^2 = u^2w^2 + v^2x^2 + 2Z.$$

Nach 1) ist aber, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned} u^2w^2 + v^2x^2 = 8 + 2(-u + v + w + x) \\ + vx - uw, \end{aligned}$$

d. i.

$$u^2w^2 + v^2x^2 = 8 + 2X + Y,$$

und folglich nach dem Obigen

$$Y^2 = 8 + 2X + Y + 2Z.$$

Weil nun aber nach 8)

$$Y^2 = 2 - 2X - 3Y$$

ist, so erhält man die Gleichung

$$9) \quad 2(X + Y) + Z = -3.$$

Zwischen den Grössen X, Y, Z hat man daher jetzt die drei folgenden Gleichungen:

$$10)\quad \begin{cases} X^2 - X - 2Y = 6, \\ Y^2 + 3Y + 2X = 2, \\ 2(X+Y) + Z = -3; \end{cases}$$

oder

$$11)\quad \begin{cases} X(X-1) = 2(Y+3), \\ Y(Y+3) = -2(X-1), \\ Z = -3 - 2(X+Y). \end{cases}$$

Multiplicirt man die beiden ersten Gleichungen in einander, so erhält man die Gleichung

$$12)\quad (XY+4)(X-1)(Y+3) = 0,$$

welche für

$$XY = -4,\ X = 1,\ Y = -3$$

erfüllt ist. Für $X = 1$ folgt aus der ersten und dritten der Gleichungen 11) sogleich $Y = -3$ und $Z = 1$. Für $Y = -3$ folgt aus der zweiten und dritten derselben Gleichungen $X = 1$ und $Z = 1$. In beiden Fällen wäre folglich Z positiv, was ungereimt ist, da nach dem Obigen $Z = -uvwx$ nothwendig eine negative Grösse sein muss. Also kann nur

$$13)\quad XY = -4$$

sein. Eliminirt man aus dieser Gleichung und aus der ersten der Gleichungen 10) die Grösse Y, so erhält man die Gleichung

$$14)\quad X^3 - X^2 - 6X + 8 = 0,$$

und wenn man aus der Gleichung 13) und der zweiten der Gleichungen 10) die Grösse X eliminirt, so erhält man die Gleichung

$$15)\quad Y^3 + 3Y^2 - 2Y - 8 = 0.$$

Eine Wurzel der Gleichung 14) ist 2, und eine Wurzel der Gleichung 15) ist -2. Dividirt man also die Functionen dieser beiden Gleichungen respective durch $X - 2$ und $Y + 2$, so erhält man die beiden folgenden Gleichungen:

$$16)\quad (X-2)(X^2 + X - 4) = 0$$

und

$$17)\quad (Y+2)(Y^2 + Y - 4) = 0.$$

Die Gleichung 16) ist für $X = 2$, und die Gleichung 17) ist für $Y = -2$ erfüllt, welchem letzteren Werthe wegen der Gleichung 13) wieder der Werth $X = 2$ entspricht. Nun ist aber offenbar

$$u < 2,\ v > \sqrt{2},\ w > \sqrt{2},$$

also

$$-u + v + w > 2(\sqrt{2} - 1),$$

d. i.

$$-u+v+w>2,$$

und folglich um so mehr

$$-u+v+w+x>2,$$

d. i. $X>2$. Also kann nach dem Obigen weder $X=2$, noch $Y=-2$ sein, und nach 16) und 17) haben wir daher die beiden folgenden Gleichungen:

$$18)\quad X^2+X-4=0$$

und

$$19)\quad Y^2+Y-4=0.$$

Auch erhellet aus dem Vorhergehenden zugleich, dass X positiv, folglich wegen der Gleichung 13) die Grösse Y negativ ist, und aus den Gleichungen 18) und 19) ergiebt sich daher jetzt, dass X und Y respective die positive und negative Wurzel einer und derselben quadratischen Gleichung, welche wir überhaupt durch

$$20)\quad U^2+U-4=0$$

bezeichnen wollen, sind. Mittelst der dritten der Gleichungen 11) findet man leicht $Z=-1$.

Setzen wir nun

$$21)\quad \begin{cases} u_1 = \quad w-u, \\ v_1 = \quad v+x, \\ w_1 = -uw, \\ x_1 = \quad vx; \end{cases}$$

so haben wir nach dem Obigen die folgenden Gleichungen:

$$22)\quad \begin{cases} u_1+v_1=X, \\ w_1+x_1=Y, \\ \quad w_1x_1=Z. \end{cases}$$

Nehmen wir hierzu noch die Gleichung 2) und beachten, dass $Z=-1$ ist, so erhalten wir die beiden folgenden Systeme von Gleichungen:

$$23)\quad u_1+v_1=X,\ u_1v_1=-1$$

und

$$24)\quad w_1+x_1=Y,\ w_1x_1=-1.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen ergiebt sich:

$$u_1^2-Xu_1-1=0,$$
$$v_1^2-Xv_1-1=0;$$

und aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$w_1^2 - Yw_1 - 1 = 0,$$
$$x_1^2 - Yx_1 - 1 = 0.$$

Weil nun $v_1 = v + x$ offenbar positiv, wegen der Gleichung $u_1 v_1 = -1$ also u_1 negativ ist, so sind u_1 und v_1 respective die negative und positive Wurzel der Gleichung

$$25) \quad U_1^2 - XU_1 - 1 = 0.$$

Weil $x_1 = vx$ offenbar positiv, wegen der Gleichung $w_1 x_1 = -1$ also w_1 negativ ist, so sind w_1 und x_1 respective die negative und positive Wurzel der Gleichung

$$26) \quad U_2^2 - YU_2 - 1 = 0.$$

Nach 21) haben wir die beiden folgenden Systeme von Gleichungen:

$$27) \quad w - u = u_1, \; uw = -w_1$$

und

$$28) \quad v + x = v_1, \; vx = x_1.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen ergiebt sich

$$u^2 + u_1 u + w_1 = 0,$$
$$w^2 - u_1 w + w_1 = 0;$$

und aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$v^2 - v_1 v + x_1 = 0,$$
$$x^2 - v_1 x + x_1 = 0.$$

Weil w_1 negativ ist, so haben die Wurzeln der Gleichung

$$29) \quad U_3^2 - u_1 U_3 + w_1 = 0$$

entgegengesetzte Vorzeichen, und es erhellet aus dem Obigen leicht, dass die negative und positive Wurzel dieser Gleichung respective die Grössen $-u$ und w liefern. Weil ferner x_1 positiv ist, so haben die Wurzeln der Gleichung

$$30) \quad U_4^2 - v_1 U_4 + x_1 = 0$$

gleiche Vorzeichen, und sind, weil auch v_1 positiv ist, beide positiv. Weil nun offenbar $v > x$ ist, so erhellet aus dem Obigen, dass die grössere und kleinere der beiden positiven Wurzeln der vorhergehenden Gleichung respective die beiden Grössen v und x liefern.

Nach dem Vorhergehenden reducirt sich also die Berechnung des regulären Siebzehnecks im Kreise auf die Auflösung der fünf folgenden quadratischen Gleichungen:

$$31)\quad \begin{cases} U^2 + U - 4 = 0, \\ U_1{}^2 - XU_1 - 1 = 0, \\ U_2{}^2 - YU_2 - 1 = 0, \\ U_3{}^2 - u_1 U_3 + w_1 = 0, \\ U_4{}^2 - v_1 U_4 + x_1 = 0. \end{cases}$$

Die positive und negative Wurzel der ersten Gleichung liefern respective X und Y. Die negative und positive Wurzel der zweiten Gleichung liefern u_1 und v_1. Die negative und positive Wurzel der dritten Gleichung liefern w_1 und x_1. Die negative und positive Wurzel der vierten Gleichung liefern $-u$ und w. Die grössere und kleinere der beiden positiven Wurzeln der fünften Gleichung liefern v und x.

Die Grösse x ist die Seite des regulären Vierunddreissigecks. Die Seite des regulären Siebzehnecks ist

$$AB = \sqrt{4-u^2} = \sqrt{(2-u)(2+u)}.$$

Durch die wirkliche Auflösung der obigen quadratischen Gleichungen erhält man nach Herrn Amiot:

$$X = \tfrac{1}{2}(\sqrt{17}-1),\quad Y = -\tfrac{1}{2}(\sqrt{17}+1);$$

$$u_1 = \tfrac{1}{4}\{\sqrt{17} - 1 - \sqrt{(34-2\sqrt{17})}\},$$
$$v_1 = \tfrac{1}{4}\{\sqrt{17} - 1 + \sqrt{(34-2\sqrt{17})}\};$$

$$w_1 = -\tfrac{1}{4}\{\sqrt{17} + 1 + \sqrt{(34+2\sqrt{17})}\},$$
$$x_1 = -\tfrac{1}{4}\{\sqrt{17} + 1 - \sqrt{(34+2\sqrt{17})}\};$$

$$-u = \tfrac{1}{8}\left\{\begin{matrix} \sqrt{17}-1-\sqrt{(34-2\sqrt{17})} \\ -\sqrt{[68+14\sqrt{17}-4\sqrt{(170-26\sqrt{17})}+16\sqrt{(34-2\sqrt{17})}]} \end{matrix}\right\},$$

$$w = \tfrac{1}{8}\left\{\begin{matrix} \sqrt{17}-1-\sqrt{(34-2\sqrt{(17)}} \\ +\sqrt{[68+14\sqrt{17}-4\sqrt{(170-26\sqrt{17})}+16\sqrt{(34-2\sqrt{17})}]} \end{matrix}\right\},$$

$$v = \tfrac{1}{8}\left\{\begin{matrix} \sqrt{17}-1+\sqrt{(34-2\sqrt{17})} \\ +\sqrt{[68+14\sqrt{17}+4\sqrt{(170-26\sqrt{17})}-16\sqrt{(34+2\sqrt{17})}]} \end{matrix}\right\},$$

$$x = \tfrac{1}{8}\left\{\begin{matrix} \sqrt{17}-1+\sqrt{(34-2\sqrt{17})} \\ -\sqrt{[68+14\sqrt{17}+4\sqrt{(170-26\sqrt{17})}-16\sqrt{(34+2\sqrt{17})}]} \end{matrix}\right\}.$$

Um aus den Gleichungen 31) eine Construction des regulären Siebzehnecks abzuleiten, wollen wir dieselben, indem wir, den Halbmesser immer der Einheit gleich annehmend,

$$1.(-w_1) = m^2,\quad 1.x_1 = n^2,$$

d. i.

$$1 : m = m : -w_1,$$
$$1 : n = n : \quad x_1$$

setzen, zuerst auf die folgende Form bringen:

$$U(U+1)=4,$$
$$U_1(U_1-X)=1,$$
$$U_2(U_2-Y)=1,$$
$$U_3(U_3-u_1)=m^2,$$
$$U_4(U_4-v_1)=-n^2.$$

In Taf. I. Fig. 4. nehmen wir nun zuerst

$$O\mathfrak{A}=2,\ \mathfrak{A}\mathfrak{B}=\tfrac{1}{2};$$

so ist nach einem bekannten geometrischen Satze

$$OU\,.\,OU'=4,$$

also

$$OU\,.\,(OU+1)=4,$$
$$OU'\,.\,(OU'-1)=4;$$

oder

$$(+OU)\{(+OU)+1\}=4,$$
$$(-OU')\{(-OU')+1\}=4.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$X=+OU,\ Y=-OU'.$$

Nun nehme man

$$O\mathfrak{C}=\tfrac{1}{2}OU \text{ und } O\mathfrak{D}=\tfrac{1}{2}OU';$$

so ist nach demselben Satze wie vorher

$$A_1U_1\,.\,A_1U'_1=1 \text{ und } A_1U_2\,.\,A_1U'_2=1,$$

also

$$A_1U_1\,.\,(A_1U_1+X)=1,$$
$$A_1U'_1\,.\,(A_1U'_1-X)=1$$

und

$$A_1U_2\,.\,(A_1U_2+Y)=1,$$
$$A_1U'_2\,.\,(A_1U'_2-Y)=1$$

oder

$$(-A_1U_1)\,.\,\{(-A_1U_1)-X\}=1,$$
$$(+A_1U'_1)\,.\,\{(+A_1U'_1)-X\}=1$$

und

$$(-A_1U_2)\,.\,\{(-A_1U_2)-Y\}=1,$$
$$(+A_1U'_2)\,.\,\{(+A_1U'_2)-Y\}=1.$$

Also ist nach dem Obigen

$$u_1 = - A_1 U_1,\ v_1 = + A_1 U'_1$$

und

$$w_1 = - A_1 U_2,\ x_1 = + A_1 U'_2.$$

Nun construire man, wie aus der Figur ohne weitere Erläuterung mit hinreichender Deutlichkeit ersichtlich ist, die Grössen

$$m = + A_1 \mathfrak{M},\ n = + A_1 \mathfrak{N}$$

und nehme

$$A_1 \mathfrak{G} = A_1 \mathfrak{M},\ \mathfrak{G}\mathfrak{H} = \tfrac{1}{2} A_1 U_1;$$

so ist

$$A_1 U_3 \,.\, A_1 U'_3 = m^2,$$

also

$$A_1 U_3 \,.\, (A_1 U_3 + u_1) = m^2,$$
$$A_1 U'_3 \,.\, (A_1 U'_3 - u_1) = m^2$$

oder

$$(- A_1 U_3) \,.\, \{(- A_1 U_3) - u_1\} = m^2,$$
$$(+ A_1 U'_3) \,.\, \{(+ A_1 U'_3) - u_1\} = m^2;$$

und folglich nach dem Obigen

$$u = A_1 U_3,\ w = A_1 U'_3.$$

Endlich nehme man

$$A_1 \mathfrak{J} = A_1 \mathfrak{N},\ A_1 \mathfrak{K} = A_1 U'_1$$

und mache die Construction weiter wie die Figur zeigt, so ist offenbar

$$A_1 U_4 \,.\, A_1 U'_4 = n^2,$$

also

$$A_1 U_4 \,.\, (v_1 - A_1 U_4) = n^2,$$
$$A_1 U'_4 \,.\, (v_1 - A_1 U'_4) = n^2$$

oder

$$(+ A_1 U_4)\ \{(+ A_1 U_4) - v_1\} = - n^2;$$
$$(+ A_1 U'_4)\ \{(+ A_1 U'_4) - v_1\} = - n^2;$$

und folglich nach dem Obigen

$$v = A_1 U_4,\ x = A_1 U'_4.$$

Auf diese Weise sind also die Grössen u, v, w, x durch Construction gefunden, indem dieselben nach der Reihe

$$A_1 U_3,\ A_1 U_4,\ A_1 U'_3,\ A_1 U'_4$$

sind, und dass sich nun auch das reguläre Siebzehneck leicht construiren lässt, erhellet auf der Stelle, indem man bloss $A_1B = A_1U_3$ zu machen braucht, wo dann der Bogen AB der siebzehnte Theil der Peripherie sein wird.

Nach Pauker's Fundamenten der Geometrie. Fünfter bis Siebenter Cursus. Mitau. 1842. S. 43. ist, wenn der Durchmesser der Einheit gleich gesetzt wird,

$$u = 0,98297309968390$$
$$v = 0,93247222940435$$
$$w = 0,73900891722065$$
$$x = 0,09226835946330$$

und die Seite des regulären Siebzehnecks, ebenfalls in Bezug auf den Durchmesser als Einheit, ist

$$0,18374951781657.$$

In dem genannten vortrefflichen Buche findet man überhaupt eine grosse Anzahl genauer numerischer Angaben, welches keiner der geringsten Vorzüge desselben ist.

IX.

Allgemeines Kriterium für die Fälle, in welchen die Logarithmen rationale Brüche sind, nebst einer Methode, die letztern aufzufinden.

Von

Herrn F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Wenn in der Gleichung $b^x = A$ gegeben sind b und A, so ist meine Aufgabe, die Bedingungen des gegenseitigen Zusammenhangs zwischen b und A aufzusuchen, damit x ein rationaler Bruch werde. A ist eine positive ganze Zahl, und b die Basis des logarithmischen Systems, welches also eine positive ganze, die Einheit übersteigende Zahl ist. Es heisst bekanntlich x der Logarithmus von A in Bezug auf die Basis b.

Begreiflicherweise kann diese meine Aufgabe nur durch die Principien der **höhern Zahlentheorie** gelöst werden, und wir erhalten somit eine neue Anwendung dieses schönen Zweiges der Mathematik. Die Methode der Betrachtung wird zugleich ein Mittel an die Hand geben, die Logarithmen, falls sie rationale Brüche sind, auf eine ziemlich einfache Art, ohne Hülfe der höhern Analysis, ganz genau aufzufinden.

Der Bedingung der Aufgabe gemäss setze ich $x = \frac{m}{n}$, und nehme, wozu ich berechtigt bin, an, dass dieser Bruch auf seine kleinste Benennung gebracht sei, oder die ganzen Zahlen m und n relative Primzahlen seien.

I. Nun sei zuvörderst $b > A$. Da $b^m = A^n$, so wird m kleiner als n, oder $\frac{m}{n}$ ein ächter Bruch sein. Weil letztere Gleichung erfordert, dass b^m durch A theilbar ist, so können A und b nicht relative Primzahlen sein, sondern müssen ein grösstes gemeinschaftliches (von der Einheit verschiedenes) Maass Θ haben, so dass $b = \Theta b_1$, und $A = \Theta A_1$ gesetzt werden kann, und b_1 zu A_1 relative Primzahl ist. Hierdurch geht obige Gleichung über in $b_1{}^m = \Theta^{n-m} A_1{}^n$. Es muss also wieder $b_1{}^m$ durch A_1 theilbar sein; da aber A_1 zu b_1 relative Primzahl, so kann A_1 nur die Einheit sein, und dann ist $A = \Theta$, also $b = Ab_1$.

Die Gleichung $b^m = A^n$, in welcher $b > A$, kann also nur dann in ganzen Zahlen aufgelöst werden, wenn b durch A ohne Rest theilbar ist.

Die Gleichung $b_1{}^m = \Theta^{n-m} A_1{}^n$ geht durch die Substitutionen von $A_1 = 1$ und $A = \Theta$ über in $b_1{}^m = A^{n-m}$. Ist also b_1 noch grösser als A, so darf auf diese Gleichung derselbe Schluss, wie auf die ursprüngliche angewandt werden, nämlich es muss von Neuem b_1 durch A theilbar sein, und wenn dieses ist, so kommt es auf die Gleichung $b_2{}^m = A^{n-2m}$ an, indem $b_1 = Ab_2$ gesetzt worden.

Ist b_2 auch noch grösser als A, so muss es durch A theilbar sein, und wenn demnach $b_2 = Ab_3$ gesetzt wird, so ist zu lösen die Gleichung $b_3{}^m = A^{n-3m}$.

Diese Schlüsse dürfen so lange fortgesetzt werden, als die neue Wurzel noch grösser als A ist.

Trifft es sich also, dass eine beliebige Wurzel $b_{k-1} > A$, und nicht durch A theilbar ist, so kann die ursprüngliche Gleichung $b^m = A^n$ in ganzen Zahlen nicht auflösbar sein.

Kommt man aber durch die fortgesetzte Division, wie sie oben angedeutet ist, endlich auf den Quotienten 1, in welchem Falle b eine genaue Potenz von $A = A^k$ ist, so wird $b^m = A^{km}$, also $A^n = A^{km}$, $n = km$, folglich $k = \frac{n}{m}$, und $\frac{n}{m}$ eine ganze Zahl; da aber m zu n prim, so kann m nur 1 sein, $k = n$, also $b = A^n$, oder $b^{\frac{1}{n}} = A$. Findet man also, dass die Basis b eine vollständige Potenz von A, z. B. $= A^k$ ist, so wird die Gleichung $b^{\frac{m}{n}} = A$ stets und nur aufgelöst durch $n = k$ und $m = 1$. Z. B. $125 = 5^3$, also $125^{\frac{1}{3}} = 5$.

Kommt man endlich auf einen Quotienten, der kleiner als A ist, z. B. $b = A^k . b_k$, wo $b_k < A$, so hat man nach dem Obigen der Gleichung zu genügen:

$$A^{n-mk} = b_k^m.$$

Da nun $A > b_k$, so lassen sich alle vorigen Schlüsse auf diese Gleichung von Neuem anwenden, wenn man nur A mit b vertauscht.

Nämlich ist A gar nicht durch b_k ohne Rest theilbar, so kann die Gleichung in ganzen Zahlen nicht aufgelöst werden. Ist aber A durch b_k theilbar, so sei b_k^λ die höchste Potenz von b_k, welche in A aufgeht; ist der Quotient 1, so genügen unserer ursprünglichen Gleichung ganze Zahlen, ist der Quotient grösser als b_k, so ist die Gleichung unlösbar, ist er endlich kleiner als b_k, oder $A = b_k^\lambda A_\lambda$, wo $A_\lambda < b_k$, so hat man der Gleichung zu genügen:

$$b_k^{m-\lambda(n-mk)} = A_\lambda^{n-mk},$$

und da jetzt $b_k > A_\lambda$, so werden auf diese Gleichung wieder die vorigen Schlüsse angewandt.

Demnach haben wir folgende Reihe von Gleichungen:

$$(\text{a}) \quad \begin{cases} b = A^k b_k \\ A = b_k^\lambda A_\lambda \\ b_k = A_\lambda^\mu b_\mu \\ A_\lambda = b_\mu^\nu A_\nu \\ b_\mu = A_\nu^\omega \end{cases}$$

In denselben ist $b_k < A_k$, $A_\lambda < b_k$, $b_\mu < A_\lambda$ u. s. w. Soll also unsere obige Gleichung in ganzen Zahlen auflösbar sein, so muss der zweite Factor auf der Rechten endlich die Einheit werden, welches mit b_ω geschehen ist.

Jedoch folgt aus unserer Analyse noch nicht, dass die Gleichungen (a) wirklich ausreichend sind, um behaupten zu dürfen, dass die Gleichung $\overline{b^{\frac{m}{n}}} = A$ in ganzen Zahlen auflösbar sei. Dass dies sich aber wirklich so verhalte, ersieht man aus den allgemeinen Ausdrücken für m und n, die ich aus obigen Relationen auf auf folgende Weise herleite.

1. Substituirt man den Werth von A in der zweiten Relation in die erste, und setzt der Kürze halber

$$k\lambda + 1 = \lambda_1,$$

so entsteht

$$b = b_k^{\lambda_1} A_\lambda^k.$$

2. Substituirt man den Werth von b_k aus der dritten Relation in diese Gleichung, so wird, für

$$\lambda_1 \mu + k = \mu_1,$$
$$b = A_{\lambda}^{\mu_1} b_{\mu}^{\lambda_1}.$$

3. Substituirt man in diese Gleichung den Werth von A_λ aus der vierten Relation, so wird, für

$$\mu_1 \nu + \lambda_1 = \nu_1,$$
$$b = b_{\mu}^{\nu_1} A_{\nu}^{\mu_1}.$$

4. Substituirt man in diese Gleichung den Werth von b_μ aus der fünften Relation, so wird, für

$$\nu_1 \omega + \mu_1 = \omega_1,$$
$$b = A_{\nu}^{\omega_1}.$$

Geht man nicht von der ersten Relation aus, sondern von der zweiten, so erhält man ganz ebenso

$$A = A_{\nu}^{\omega'},$$

wenn nach und nach gesetzt wird:

$$\lambda = \lambda',\ \lambda'\mu + 1 = \mu',\ \mu'\nu + \lambda = \nu',\ \nu'\omega + \mu' = \omega'.$$

Setzen wir nun die für b und A gefundenen Werthe in die Gleichung $b^m = A^n$, so erhalten wir $A_{\nu}^{m\omega_1} = A_{\nu}^{n\omega'}$, also $m\omega_1 = n\omega'$, $\frac{m}{n} = \frac{\omega'}{\omega_1}$, folglich $m = \omega'$, $n = \omega_1$.

Umgekehrt werden für m und n diese Werthe angenommen, so ist $b^m = A_{\nu}^{m\omega_1}$, $A^n = A_{\nu}^{n\omega'}$, oder $b^m = A_{\nu}^{\omega'\omega_1}$, $A^n = A_{\nu}^{\omega_1\omega'}$, folglich $b^m = A^n$.

Zugleich ergiebt sich, dass nur die einzigen Werthe von $m = \omega'$ und $n = \omega_1$ der Gleichung $b^{\frac{m}{n}} = A$ genügen; denn da m und n relative Primzahlen sein sollen, so können für m und n nicht Vielfache von ω' und ω_1 angenommen werden.

Ist $A > b$, so braucht man nur A mit b zu vertauschen, und alle vorhergehenden Schlüsse behalten ihre Kraft.

Nehmen wir nun Alles Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich folgendes Resultat:

Um zu prüfen, ob die Gleichung

$$b^{\frac{m}{n}} = A,$$

in welcher $b > A$ in ganzen Zahlen auflösbar ist, oder nicht, dividire man mit der höchsten Potenz von A in b, mit der höchsten

Potenz des Quotienten b^k in A, mit der höchsten Potenz des neuen Quotienten A_λ in b_k u. s. w.

Geht die Division einmal nicht auf, so ist obige Gleichung in ganzen Zahlen nicht auflösbar; kommt man aber endlich auf den Quotienten 1, so ist sie auflösbar, und nachdem $k, \lambda, \mu, \nu, \omega$ durch die Relationen (a) bestimmt sind, werden die Zahlen m, n durch folgende zwei Reihen recurrirend bestimmt:

$$(b)\quad \begin{cases} k\lambda + 1 = \lambda_1 \\ \lambda_1\mu + k = \mu_1 \\ \mu_1\nu + \lambda_1 = \nu_1 \\ \nu_1\omega + \mu_1 = n \end{cases} \qquad (c)\quad \begin{cases} \lambda = \lambda' \\ \lambda'\mu + 1 = \mu' \\ \mu'\nu + \lambda = \nu' \\ \nu'\omega + \mu' = m \end{cases}$$

Bei dem ersten Anblick erkennt man übrigens sogleich, dass diese Relationen denen ganz ähnlich sind, durch welche die Partialwerthe eines endlichen Kettenbruchs bestimmt werden.

Nimmt man nämlich zu den vorhergehenden Gleichungen noch die $k = 1$, $1 = 1$, so folgt, dass

$$\frac{1}{k}, \frac{\lambda'}{\lambda_1}, \frac{\mu'}{\mu_1}, \frac{\nu'}{\nu_1}$$

die Partialwerthe des Kettenbruchs

$$\frac{m}{n} = \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\mu + \cfrac{1}{\nu + \cfrac{1}{\omega}}}}}$$

sind.

Es ist ferner bekannt, dass der mittelst dieser Kette berechnete Bruch schon immer in den kleinsten Zahlen ausgedrückt ist.

Verwandelt man also einen beliebigen ächten Bruch $\frac{m}{n}$ in einen Kettenbruch, so dass $k, \lambda, \mu, \nu, \omega$ die durch die Division entstandenen Quotienten sind, und bestimmt den Werth A von $b^{\frac{m}{n}}$ (wo b eine willkührliche positive ganze, die Einheit übersteigende Zahl), so lassen sich stets die in (a) dargestellten Gleichungen bilden.

Ich beschliesse diese Abhandlung mit ein Paar Beispielen.

1) Es ist zu untersuchen, ob der Logarithmus von 243 für die Basis 6561 ein rationaler Bruch ist, oder nicht, und im ersteren Falle fordert man seinen Werth.

Hier ist $b = 6561$, $A = 243$. Nach den Gleichungen (a) hat man

$$\begin{aligned} k &= 1, & b_k &= 27, \\ \lambda &= 1, & A_\lambda &= 9, \\ \mu &= 1, & b_\mu &= 3, \\ \nu &= 2, & A_\nu &= 1; \end{aligned}$$

folglich

$$\lambda_1 = 1.1 + 1 = 2, \quad \lambda' = 1,$$
$$\mu_1 = 2.1 + 1 = 3, \quad \mu' = 2,$$
$$n = 3.2 + 2 = 8, \quad m = 5;$$

daher $6561^{\frac{5}{8}} = 243$, und $\frac{5}{8} = \log 243$ (Basis 6561).

2) Ist der Logarithmus von 5 für die Basis 10 ein rationaler Bruch oder nicht?

Hier ist $b = 10$, $A = 5$, also

$$k = 1, \quad b_k = 2$$
$$\lambda = 1, \quad 5 = 2 . A_\lambda .$$

Da aber A_λ keine ganze Zahl ist, so kann log 5 (Basis 10) kein rationaler Bruch sein.

X.

Ueber Systeme von Linsengläsern.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

In der im zweiten Theile dieser Zeitschrift abgedruckten Abhandlung No. XV. habe ich eine strenge und, so viel es die Natur des Gegenstandes zulässt, allgemeine, namentlich auch die Dicke der Gläser gehörig berücksichtigende Entwickelung der Formeln zu geben versucht, durch welche, nach den älteren verdienstlichen Arbeiten von Cotes, Euler und Lagrange über diesen interessanten Gegenstand, in neuerer Zeit von mehreren ausgezeichneten Mathematikern, namentlich von Piola, Möbius, Bessel, Clausen und Gauss, die Haupteigenschaften der Systeme von Linsengläsern vorzüglich mit Hülfe der Kettenbrüche dargestellt worden sind. Nach weiteren Untersuchungen über diesen wichtigen Theil der Optik bin ich aber jetzt der Meinung, dass sich die erwähnten merkwürdigen Ausdrücke auf eine einfachere und elegantere Form bringen lassen, welche insbesondere dadurch sich vor der älteren Form auszeichnet, dass die Anzahl der Glieder der betreffenden

Kettenbrüche eine weit geringere ist als bei jener, wodurch denn, wie es mir wenigstens scheint, zugleich auch bewirkt wird, dass sich die allgemeinen Gesetze, denen jedes beliebige Linsensystem unterworfen ist, noch deutlicher und bestimmter als bei der früheren Darstellungsweise herausstellen. Diese neuen von mir aufgefundenen Formeln werde ich daher zum Gegenstande des vorliegenden, an meine frühere oben erwähnte Abhandlung insofern sich anschliessenden Aufsatzes machen, als ich in demselben von den nämlichen Fundamentalformeln wie dort, welche natürlich jeder derartigen Untersuchung zur Grundlage dienen müssen, ausgehen werde, ohne diese Formeln jetzt von Neuem zu entwickeln.

§. 2.

Die am Ende des vorhergehenden Paragraphen erwähnten Grundformeln sind, mit Beibehaltung aller in der früheren Abhandlung eingeführten Bezeichnungen, die Thl. II. S. 159. und Thl. II. S. 162. gefundenen Formeln 58. und 68., nämlich die Gleichungen

$$\frac{1}{p} \pm \frac{1}{p_1} - (n-1)\left(\frac{1}{R} \pm \frac{1}{R_1}\right) = \pm \frac{D}{n}\left(\frac{1}{p} - \frac{n-1}{R}\right)\left(\frac{1}{p_1} - \frac{n-1}{R_1}\right)$$

und

$$\frac{q}{q_1} = \frac{1-(n-1)\frac{p}{R}}{1-(n-1)\frac{p_1}{R_1}}.$$

Um aber die durch die in der ersten dieser beiden Gleichungen vorkommenden doppelten Zeichen herbeigeführte Unbequemlichkeit, welche namentlich bei dem vorliegenden Gegenstande nicht unbeträchtlich ist, zu vermeiden, ist in §. 11. der mehr erwähnten Abhandlung eine Abänderung der Bezeichnung vorgenommen worden, über welche man das zum Verständnisse des Folgenden Nöthige dort selbst nachsehen muss. Dieser Abänderung der Bezeichnung zufolge muss man in den beiden obigen Gleichungen für

$$D,\ R,\ R_1,\ p,\ p_1$$

jenachdem man in der ersten der beiden in Rede stehenden Gleichungen die oberen oder unteren Zeichen nimmt, respective

$$\mp D,\ \pm R,\ \pm R_1,\ \mp p,\ \mp p_1$$

oder

$$\mp D,\ \pm R,\ \mp R_1,\ \mp p,\ \pm p_1$$

setzen, wodurch, wie man leicht findet, die beiden obigen Gleichungen die folgende ganz allgemein gültige Gestalt erhalten:

$$1)\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p_1} + (n-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right) = \frac{D}{n}\left(\frac{1}{p} + \frac{n-1}{R}\right)\left(\frac{1}{p_1} + \frac{n-1}{R_1}\right)$$

und

$$2)\quad \frac{q}{q_1}=\frac{1+(n-1)\frac{p}{R}}{1+(n-1)\frac{p_1}{R_1}}.$$

Dies sind die Formeln, von denen wir im Folgenden unsern Auslauf nehmen werden.

§. 3.

Bezeichnen wir die Werthe, welche p, p_1 erhalten, wenn respective p_1, p unendlich werden, respective durch f, f_1; so ist wegen der Gleichung 1)

$$3)\quad \begin{cases} \frac{1}{f}+(n-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)=\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{R_1}\left(\frac{1}{f}+\frac{n-1}{R}\right), \\ \frac{1}{f_1}+(n-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)=\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{R}\left(\frac{1}{f_1}+\frac{n-1}{R_1}\right). \end{cases}$$

Zieht man jede dieser beiden Gleichungen von der Gleichung 1) ab, so erhält man die beiden folgenden Gleichungen:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p_1}-\frac{1}{f}$$

$$=\frac{D}{n}\left(\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p_1}+\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{1}{p}+\frac{n-1}{R}\cdot\frac{1}{p_1}-\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{1}{f}\right),$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p_1}-\frac{1}{f_1}$$

$$=\frac{D}{n}\left(\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p_1}+\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{1}{p}+\frac{n-1}{R}\cdot\frac{1}{p_1}-\frac{n-1}{R}\cdot\frac{1}{f_1}\right)$$

oder

$$\frac{D}{n}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p_1}$$

$$=\left(1-\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{D}{n}\right)\frac{1}{p}+\left(1-\frac{n-1}{R}\cdot\frac{D}{n}\right)\frac{1}{p_1}-\left(1-\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{D}{n}\right)\frac{1}{f},$$

$$\frac{D}{n}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p_1}$$

$$=\left(1-\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{D}{n}\right)\frac{1}{p}+\left(1-\frac{n-1}{R}\cdot\frac{D}{n}\right)\frac{1}{p_1}-\left(1-\frac{n-1}{R}\cdot\frac{D}{n}\right)\frac{1}{f_1}.$$

Nun ist aber nach 3), wie man leicht findet:

$$\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}=\left(1-\frac{1}{n}\right)D\left(\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{f}-\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{f_1}\right),$$

also

$$\frac{D}{n}=\frac{\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}}{(n-1)\left(\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{f}-\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{f_1}\right)},$$

und folglich

$$1-\frac{n-1}{R}\cdot\frac{D}{n}=\frac{\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R}}{\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{f}-\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{f}}\cdot\frac{1}{f},$$

$$1-\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{D}{n}=\frac{\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R}}{\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{f}-\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{f_1}}\cdot\frac{1}{f_1}.$$

Führt man diese Ausdrücke in einen jeden der beiden obigen Ausdrücke von

$$\frac{D}{n}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p_1}$$

ein, so erhält man die Gleichung

$$4)\quad \left(\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}\right)\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p_1}$$

$$=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R}\right)\left(\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{p_1}+\frac{1}{f_1}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{f_1}\right),$$

aus welcher sich ferner ohne Schwierigkeit die folgenden Formeln ergeben:

$$5)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{p}=\dfrac{(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{f_1}-\frac{1}{p_1}\right)\frac{1}{f}}{\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}\right)\frac{1}{p_1}+(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)\frac{1}{f_1}}, \\[2ex] \dfrac{1}{p_1}=\dfrac{(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{p}\right)\frac{1}{f_1}}{\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}\right)\frac{1}{p}+(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)\frac{1}{f}}; \end{cases}$$

oder

$$6)\quad \begin{cases} p=\dfrac{\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}\right)\frac{1}{p_1}+(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)\frac{1}{f_1}}{(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{f_1}-\frac{1}{p_1}\right)\frac{1}{f}}, \\[2ex] p_1=\dfrac{\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}\right)\frac{1}{p}+(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)\frac{1}{f}}{(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{p}\right)\frac{1}{f_1}}; \end{cases}$$

oder auch

$$7)\quad \begin{cases} p = \dfrac{\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}\right)f_1+(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)p_1}{(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)(p_1-f_1)}f, \\ p_1 = \dfrac{\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}\right)f+(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)p}{(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)(p-f)}f_1; \end{cases}$$

woraus man ferner ohne Schwierigkeit

$$8)\quad \begin{cases} p-f = \dfrac{\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}+(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)}{(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)(p_1-f_1)}ff_1 \\ p_1-f_1 = \dfrac{\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}+(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)}{(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)(p-f)}ff_1; \end{cases}$$

also

$$9)\quad (p-f)(p_1-f_1) = \left\{1+\frac{\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}}{(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)}\right\}ff_1$$

erhält.

Weil nun nach 3)

$$\frac{1}{f} = \frac{\frac{n-1}{R}\cdot\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{D}{n}-(n-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)}{1-\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{D}{n}},$$

$$\frac{1}{f_1} = \frac{\frac{n-1}{R}\cdot\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{D}{n}-(n-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)}{1-\frac{n-1}{R}\cdot\frac{D}{n}}$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$\frac{\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}}{(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)} =$$

$$-\frac{\frac{D}{n}\left\{\frac{n-1}{R}\cdot\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{D}{n}-(n-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)\right\}}{\left(1-\frac{n-1}{R}\cdot\frac{D}{n}\right)\left(1-\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{D}{n}\right)}$$

also

$$1+\frac{\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}}{(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)}=\frac{1}{(1-\frac{n-1}{R}\cdot\frac{D}{n})(1-\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{D}{n})}$$

und folglich

$$10)\quad \left\{1+\frac{\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}}{(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)}\right\}ff_1$$

$$=\left\{\frac{1}{\frac{n-1}{R}\cdot\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{D}{n}-(n-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)}\right\}^2,$$

so dass also nach 9) auch

$$11)\quad (p-f)(p_1-f_1)$$

$$=\left\{\frac{1}{\frac{n-1}{R}\cdot\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{D}{n}-(n-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)}\right\}^2$$

oder

$$12)\quad (p-f)(p_1-f_1)$$

$$=\left\{\frac{n-1}{R}\cdot\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{D}{n}-(n-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)\right\}^{-2}$$

ist.

§. 4.

Nach 2) ist

$$\frac{q}{q_1}=\frac{1+(n-1)\frac{p}{R}}{1+(n-1)\frac{p_1}{R_1}},$$

also

$$\frac{q}{q_1}=\frac{1+(n-1)\frac{f}{R}+(n-1)\frac{p-f}{R}}{1+(n-1)\frac{f_1}{R_1}+(n-1)\frac{p_1-f_1}{R_1}}.$$

Mittelst der im vorhergehenden Paragraphen gefundenen Formeln ergiebt sich aber ohne Schwierigkeit

$$1+(n-1)\frac{f}{R}=\frac{R}{R+R_1-\frac{n-1}{n}D},$$

$$1+(n-1)\frac{f_1}{R_1}=\frac{R_1}{R+R_1-\frac{n-1}{n}D};$$

und folglich, wenn der Kürze wegen

$$13)\quad K=\frac{1}{R+R_1-\frac{n-1}{n}D}$$

gesetzt wird:

$$14)\quad \frac{q}{q_1}=\frac{KR+(n-1)\frac{p-f}{R}}{KR_1+(n-1)\frac{p_1-f_1}{R_1}}.$$

Nach 11) ist nun

$$(p-f)(p_1-f_1)=\left\{\frac{RR_1}{(n-1)(R+R_1-\frac{n-1}{n}D)}\right\}^2,$$

d. i. nach 13)

$$15)\quad (p-f)(p_1-f_1)=\left(\frac{KRR_1}{n-1}\right)^2,$$

und folglich

$$p_1-f_1=\frac{K^2R^2R_1^{\,2}}{(n-1)^2(p-f)}.$$

Führt man diesen Ausdruck von p_1-f_1 in die Gleichung 14) ein, und hebt auf, was sich aufheben lässt, so erhält man

$$\frac{q}{q_1}=\frac{(n-1)(p-f)}{KRR_1}.$$

Verbindet man nun aber hiermit die Gleichung 15), so erhält man für $\frac{q}{q_1}$ die beiden folgenden Ausdrücke:

$$16)\quad \frac{q}{q_1}=\frac{(n-1)(p-f)}{KRR_1}=\frac{KRR_1}{(n-1)(p_1-f_1)}.$$

Die Grösse

$$\frac{KRR_1}{n-1}=\frac{RR_1}{(n-1)(R+R_1-\frac{n-1}{n}D)}$$

hängt nur von der Grösse n, den beiden Halbmessern des Glases und der Dicke desselben ab, und soll im Folgenden, weil sie für jedes Glas offenbar charakteristisch ist, der Modulus*) desselben genannt und durch M bezeichnet werden, so dass also nach dem Vorhergehenden

$$17)\quad M=\frac{RR_1}{(n-1)(R+R_1-\frac{n-1}{n}D)}$$

und

$$18)\quad (p-f)(p_1-f_1)=M^2,$$

so wie

$$19)\quad \frac{q}{q_1}=\frac{p-f}{M}=\frac{M}{p_1-f_1},$$

also auch, wie hieraus leicht folgt:

$$20)\quad \left(\frac{q}{q_1}\right)^2=\frac{p-f}{p_1-f_1}$$

ist.

Den Modulus kann man auch auf folgende Art ausdrücken:

$$21)\quad M=\frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)-\frac{n-1}{R}\cdot\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{D}{n}}$$

oder

$$22)\quad M=\left\{(n-1)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)-\frac{n-1}{R}\cdot\frac{n-1}{R_1}\cdot\frac{D}{n}\right\}^{-1}.$$

Eliminirt man die Grösse $\frac{D}{n}$ mittelst der aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannten Formel

$$\frac{D}{n}=\frac{\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}}{(n-1)\left(\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{f}-\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{f_1}\right)},$$

so erhält man

$$23)\quad M=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\frac{R}{f}-\frac{R_1}{f_1}}{\frac{1}{R_1}\cdot\frac{R}{f}-\frac{1}{R}\cdot\frac{R_1}{f_1}}$$

---

*) Dieser von mir hier eingeführte Begriff des Modulus einer Linse scheint mir für die ganze optische Theorie nicht unwichtig zu sein.

oder

$$24)\quad M=\frac{RR_1}{n-1}\cdot\frac{Rf_1-R_1f}{R^2f_1-R_1^2f}.$$

Auch ergiebt sich aus 9) und 18) für das Quadrat des Modulus unmittelbar der folgende Ausdruck:

$$25)\quad M^2=\left\{1+\frac{\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}}{(n-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)}\right\}ff_1.$$

Will man bei der Berechnung des Modulus bloss D, f, f_1 als bekannte Grössen ansehen, so muss man aus diesen Grössen die Halbmesser R und R_1 berechnen, was auf folgende Art, freilich nur mit Hülfe einer quadratischen Gleichung, geschehen kann.

Nach dem Obigen ist

$$\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}=(1-\frac{1}{n})D(\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{f}-\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{f_1}),$$

also

$$\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}=(1-\frac{1}{n})D\{(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1})\frac{1}{f}-(\frac{1}{f}+\frac{1}{f_1})\frac{1}{R}\}.$$

Bestimmt man aus der ersten dieser beiden Gleichungen die Grösse

$$\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{R_1},$$

aus der zweiten die Grösse

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1},$$

und führt die erhaltenen Ausdrücke in die zweite der Gleichungen 3) ein, so erhält man nach einigen leichten Reductionen die Gleichung:

$$\left(\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{R}\right)^2-\left(2-\frac{D}{n}\cdot\frac{1}{f}\right)\cdot\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{R}$$

$$=\frac{\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}+\frac{D}{n}\cdot\frac{1}{ff_1}}{\frac{1}{f_1}},$$

und durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung ergiebt sich ohne Schwierigkeit:

$$\frac{D}{n}\cdot\frac{n-1}{R}=1-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{D}{n}\cdot\frac{1}{f}\{1\pm\sqrt{1+\frac{4n^2ff_1}{D^2}}\}.$$

Bestimmt man nun mittelst dieses Ausdrucks von

$$\frac{D}{n} \cdot \frac{n-1}{R}$$

und der ersten der beiden Gleichungen, von denen wir oben ausgegangen sind, auch die Grösse

$$\frac{D}{n} \cdot \frac{n-1}{R_1};$$

so erhält man zur Bestimmung der Halbmesser R und R_1 überhaupt die beiden folgenden Ausdrücke, in denen die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen:

$$26) \begin{cases} \frac{D}{n} \cdot \frac{n-1}{R} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{D}{n} \cdot \frac{1}{f}\{1 \pm \sqrt{1 + \frac{4n^2ff_1}{D^2}}\}, \\ \frac{D}{n} \cdot \frac{n-1}{R_1} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{D}{n} \cdot \frac{1}{f_1}\{1 \pm \sqrt{1 + \frac{4n^2ff_1}{D^2}}\}; \end{cases}$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$\mu = \frac{1}{2} \cdot \frac{D}{n}\{1 \pm \sqrt{1 + \frac{4n^2ff_1}{D^2}}\}$$

setzen, die beiden Ausdrücke:

$$27) \quad \frac{D}{n} \cdot \frac{n-1}{R} = 1 - \frac{\mu}{f}, \quad \frac{D}{n} \cdot \frac{n-1}{R_1} = 1 - \frac{\mu}{f_1};$$

oder

$$28) \quad \frac{1}{R} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{f-\mu}{fD}, \quad \frac{1}{R_1} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{f_1-\mu}{f_1D};$$

oder

$$29) \quad R = (1 - \frac{1}{n})\frac{fD}{f-\mu}, \quad R_1 = (1 - \frac{1}{n})\frac{f_1D}{f_1-\mu}.$$

Auch erhellet aus der vorhergehenden Entwickelung, dass bei jedem Linsenglase

$$1 + \frac{4n^2ff_1}{D^2} \overline{\overline{>}} 0, \quad ff_1 + \frac{1}{4}(\frac{D}{n})^2 \overline{\overline{>}} 0$$

oder

$$\frac{1}{4}(\frac{D}{n})^2 \overline{\overline{>}} -ff_1$$

sein muss.

In dem Folgenden werden wir nun immer den Modulus eines jeden in einem Systeme von Linsengläsern vorkommenden Glases als bekannt annehmen, wozu wir berechtigt sind, da derselbe mittelst der im Vorhergehenden entwickelten Formeln jederzeit ohne Schwierigkeit berechnet werden kann.

§. 5.

Indem wir jetzt zu der Betrachtung eines durch ein System von Linsengläsern von der gewöhnlichen bekannten Beschaffenheit gehenden Strahls übergehen, führen wir zuvörderst die folgenden Bezeichnungen ein.

Die Anzahl der das System bildenden Gläser sei i, und die im Vorhergehenden durch $p, q; p_1, q_1; f, f_1$ bezeichneten Grössen sollen für die einzelnen Gläser des Systems vom 1sten bis zum $i$ten jetzt durch

$$p^{(1)},\ q^{(1)};\ p_1{}^{(1)},\ q_1{}^{(1)};\ f^{(1)},\ f_1{}^{(1)};$$
$$p^{(2)},\ q^{(2)};\ p_1{}^{(2)},\ q_1{}^{(2)};\ f^{(2)},\ f_1{}^{(2)};$$
$$p^{(3)},\ q^{(3)};\ p_1{}^{(3)},\ q_1{}^{(3)};\ f^{(3)},\ f_1{}^{(3)};$$
u. s. w.
$$p^{(i)},\ q^{(i)};\ p_1{}^{(i)},\ q_1{}^{(i)};\ f^{(i)},\ f_1{}^{(i)}$$

bezeichnet werden. Die Moduli der einzelnen Gläser nach der Reihe vom 1sten bis zum $i$ten mögen

$$M^{(1)},\ M^{(2)},\ M^{(3)},\ M^{(4)},\ \ldots.\ M^{(i)}$$

sein, und die sämmtlich als positiv betrachteten Entfernungen der einzelnen Gläser von einander, welche von der hinteren Fläche eines jeden Glases bis zu der vordern Fläche des nächst folgenden Glases gerechnet werden, wollen wir nach der Reihe durch

$$E^{(1)},\ E^{(2)},\ E^{(3)},\ E^{(4)},\ \ldots.\ E^{(i-1)}$$

bezeichnen, wo wir dann die folgenden ganz allgemein gültigen Gleichungen haben *):

$$30)\quad \begin{cases} p_1{}^{(1)} + p^{(2)} = -E^{(1)}, \\ p_1{}^{(2)} + p^{(3)} = -E^{(2)}, \\ p_1{}^{(3)} + p^{(4)} = -E^{(3)}, \\ \quad\text{u. s. w.} \\ p_1{}^{(i-1)} + p^{(i)} = -E^{(i-1)}. \end{cases}$$

Nach 18) ist nun überhaupt

$$(p^{(k)} - f^{(k)})(p_1{}^{(k)} - f_1{}^{(k)}) = (M^{(k)})^2,$$

und nach 30) haben wir die Gleichung

$$p_1{}^{(k-1)} + p^{(k)} = -E^{(k-1)},$$

aus der sich leicht die Gleichung

$$p^{(k)} - f^{(k)} = -E^{(k-1)} - f_1{}^{(k-1)} - f^{(k)} - (p_1{}^{(k-1)} - f_1{}^{(k-1)}),$$

*) Man vergl. Thl. II. S. 178.

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$N^{(k-1)} = E^{(k-1)} + f_1^{(k-1)} + f^{(k)}$$

setzen, die Gleichung

$$p^{(k)} - f^{(k)} = - N^{(k-1)} - (p_1^{(k-1)} - f_1^{(k-1)})$$

ergiebt. Daher haben wir nach dem Obigen die Gleichung

$$31)\quad p_1^{(k)} - f_1^{(k)} = - \frac{(M^{(k)})^2}{N^{(k-1)} + (p_1^{(k-1)} - f_1^{(k-1)})},$$

aus welcher sich ferner leicht die Gleichung

$$32)\quad p_1^{(k-1)} - f_1^{(k-1)} = - N^{(k-1)} - \frac{(M^{(k)})^2}{p_1^{(k)} - f_1^{(k)}}$$

ergiebt.

Setzen wir jetzt analog mit dem Vorhergehenden

$$33)\quad \begin{cases} N^{(1)} = E^{(1)} + f_1^{(1)} + f^{(2)}, \\ N^{(2)} = E^{(2)} + f_1^{(2)} + f^{(3)}, \\ N^{(3)} = E^{(3)} + f_1^{(3)} + f^{(4)}, \\ \text{u. s. w.} \\ N^{(i-1)} = E^{(i-1)} + f_1^{(i-1)} + f^{(i)}; \end{cases}$$

wo die Grössen

$$N^{(1)},\ N^{(2)},\ N^{(3)},\ N^{(4)},\ \ldots\ N^{(i-1)}$$

natürlich eben so wie die Moduli der einzelnen Gläser als gegebene Grössen zu betrachten sind; so haben wir nach 31) und 18) die folgenden Gleichungen:

$$p_1^{(i)} - f_1^{(i)} = - \frac{(M^{(i)})^2}{N^{(i-1)} + (p_1^{(i-1)} - f_1^{(i-1)})},$$

$$p_1^{(i-1)} - f_1^{(i-1)} = - \frac{(M^{(i-1)})^2}{N^{(i-2)} + (p_1^{(i-2)} - f_1^{(i-2)})},$$

$$p_1^{(i-2)} - f_1^{(i-2)} = - \frac{(M^{(i-2)})^2}{N^{(i-3)} + (p_1^{(i-3)} - f_1^{(i-3)})},$$

u. s. w.

$$p_1^{(2)} - f_1^{(2)} = - \frac{(M^{(2)})^2}{N^{(1)} + (p_1^{(1)} - f_1^{(1)})},$$

$$p_1^{(1)} - f_1^{(1)} = \frac{(M^{(1)})^2}{p^{(1)} - f^{(1)}};$$

und nach 18) und 32) haben wir auf ähnliche Weise die folgenden Gleichungen:

$$p^{(1)} - f^{(1)} = \frac{(M^{(1)})^2}{p_1^{(1)} - f_1^{(1)}},$$

$$p_1^{(1)} - f_1^{(1)} = - N^{(1)} - \frac{(M^{(2)})^2}{p_1^{(2)} - f_1^{(2)}},$$

$$p_1^{(2)} - f_1^{(2)} = - N^{(2)} - \frac{(M^{(3)})^2}{p_1^{(3)} - f_1^{(3)}},$$

$$p_1^{(3)} - f_1^{(3)} = - N^{(3)} - \frac{(M^{(4)})^2}{p_1^{(4)} - f_1^{(4)}},$$

u. s. w.

$$p_1^{(i-2)} - f_1^{(i-2)} = - N^{(i-2)} - \frac{(M^{(i-1)})^2}{p_1^{(i-1)} - f_1^{(i-1)}},$$

$$p_1^{(i-1)} - f_1^{(i-1)} = - N^{(i-1)} - \frac{(M^{(i)})^2}{p_1^{(i)} - f_1^{(i)}}.$$

Aus diesen beiden Systemen von Gleichungen ergeben sich aber unmittelbar die beiden folgenden Kettenbrüche:

$$34)\quad p_1^{(i)} - f_1^{(i)} = - \cfrac{(M^{(i)})^2}{N^{(i-1)} - \cfrac{(M^{(i-1)})^2}{N^{(i-2)} - \cfrac{(M^{(i-2)})^2}{N^{(i-3)} - \cdots - \cfrac{(M^{(2)})^2}{N^{(1)} + \cfrac{(M^{(1)})^2}{p^{(1)} - f^{(1)}}}}}}$$

und

$$35)\quad p^{(1)} - f^{(1)} = - \cfrac{(M^{(1)})^2}{N^{(1)} - \cfrac{(M^{(2)})^2}{N^{(2)} - \cfrac{(M^{(3)})^2}{N^{(3)} - \cdots - \cfrac{(M^{(i-1)})^2}{N^{(i-1)} + \cfrac{(M^{(i)})^2}{p_1^{(i)} - f_1^{(i)}}}}}}.$$

Auch ist

$$34^{\circ})\quad f_1^{(i)} - p_1^{(i)} = \cfrac{(M^{(i)})^2}{N^{(i-1)} - \cfrac{(M^{(i-1)})^2}{N^{(i-2)} - \cfrac{(M^{(i-2)})^2}{N^{(i-3)} - \cdots - \cfrac{(M^{(2)})^2}{N^{(1)} - \cfrac{(M^{(1)})^2}{f^{(1)} - p^{(1)}}}}}}$$

und

$$35^{*})\quad f^{(1)}-p^{(1)}=\cfrac{(M^{(1)})^2}{N^{(1)}-\cfrac{(M^{(2)})^2}{N^{(2)}-\cfrac{(M^{(3)})^2}{N^{(3)}-\cdots-\cfrac{(M^{(i-1)})^2}{N^{(i-1)}-\cfrac{(M^{(i)})^2}{f_1^{(i)}-p_1^{(i)}}}}}}.$$

Jeder dieser beiden Kettenbrüche besteht aus i, d. h. gerade aus eben so vielen Gliedern, als das System Linsen enthält. Zur Entwickelung derselben ist nur die Berechnung der Moduli

$$M^{(1)},\ M^{(2)},\ M^{(3)},\ M^{(4)},\ \ldots\ M^{(i)}$$

der einzelnen Linsen, und der oben durch

$$N^{(1)},\ N^{(2)},\ N^{(3)},\ N^{(4)},\ \ldots\ N^{(i-1)}$$

bezeichneten, von den Entfernungen der einzelnen Linsen von einander abhängenden Grössen erforderlich, welche, wie wir aus dem Vorhergehenden wissen, keiner Schwierigkeit unterliegt.

Bezeichnen wir bei unserem aus i Linsen bestehenden Systeme die Werthe, welche die Grössen $p_1^{(i)}$, $p^{(1)}$ erhalten, wenn respective $p^{(1)}$, $p_1^{(i)}$ unendlich werden, respective durch $F_1^{(i)}$, $F^{(i)}$; so ist nach 34) und 35) offenbar

$$36)\quad F_1^{(i)}-f_1^{(i)}=-\cfrac{(M^{(i)})^2}{N^{(i-1)}-\cfrac{(M^{(i-1)})^2}{N^{(i-2)}-\cfrac{(M^{(i-2)})^2}{N^{(i-3)}-\cdots-\cfrac{(M^{(2)})^2}{N^{(1)}}}}}$$

und

$$37)\quad F^{(i)}-f^{(1)}=-\cfrac{(M^{(1)})^2}{N^{(1)}-\cfrac{(M^{(2)})^2}{N^{(2)}-\cfrac{(M^{(3)})^2}{N^{(3)}-\cdots-\cfrac{(M^{(i-1)})^2}{N^{(i-1)}}}}},$$

wo jeder Kettenbruch nur aus $i-1$ Gliedern besteht.

§. 6.

Für ein Glas ist offenbar

$$f^{(1)} = F^{(1)},\quad f_1^{(1)} = F_1^{(1)}$$

und daher nach 18)

$$38)\quad (p^{(1)} - F^{(1)})(p_1^{(1)} - F_1^{(1)}) = (M^{(1)})^2.$$

Für ein aus zwei Gläsern bestehendes System ist nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$p_1^{(2)} - f_1^{(2)} = -\frac{(M^{(2)})^2}{N^{(1)} + \frac{(M^{(1)})^2}{p^{(1)} - f^{(1)}}},\quad p^{(1)} - f^{(1)} = -\frac{(M^{(1)})^2}{N^{(1)} + \frac{(M^{(2)})^2}{p_1^{(2)} - f_1^{(2)}}}$$

und

$$F_1^{(2)} - f_1^{(2)} = -\frac{(M^{(2)})^2}{N^{(1)}},\quad F^{(2)} - f^{(1)} = -\frac{(M^{(1)})^2}{N^{(1)}}.$$

Aus der ersten, dritten und vierten Gleichung folgt:

$$p_1^{(2)} - f_1^{(2)} = \frac{N^{(1)}(F_1^{(2)} - f_1^{(2)})}{N^{(1)} + \frac{(M^{(1)})^2}{p^{(1)} - f^{(1)}}} = \frac{F_1^{(2)} - f_1^{(2)}}{1 + \frac{(M^{(1)})^2}{N^{(1)}} \cdot \frac{1}{p^{(1)} - f^{(1)}}}$$

$$= \frac{F_1^{(2)} - f_1^{(2)}}{1 - \frac{F^{(2)} - f^{(1)}}{p^{(1)} - f^{(1)}}} = \frac{(F_1^{(2)} - f_1^{(2)})(p^{(1)} - f^{(1)})}{p^{(1)} - F^{(2)}};$$

und eben so ergiebt sich aus der zweiten, dritten und vierten Gleichung:

$$p^{(1)} - f^{(1)} = \frac{N^{(1)}(F^{(2)} - f^{(1)})}{N^{(1)} + \frac{(M^{(2)})^2}{p_1^{(2)} - f_1^{(2)}}} = \frac{F^{(2)} - f^{(1)}}{1 + \frac{(M^{(2)})^2}{N^{(1)}} \cdot \frac{1}{p_1^{(2)} - f_1^{(2)}}}$$

$$= \frac{F^{(2)} - f^{(1)}}{1 - \frac{F_1^{(2)} - f_1^{(2)}}{p_1^{(2)} - f_1^{(2)}}} = \frac{(F^{(2)} - f^{(1)})(p_1^{(2)} - f_1^{(2)})}{p_1^{(2)} - F_1^{(2)}}.$$

Also hat man jetzt die beiden folgenden Gleichungen:

$$39)\quad \begin{cases} (F_1^{(2)} - f_1^{(2)})(p^{(1)} - f^{(1)}) = (p^{(1)} - F^{(2)})(p_1^{(2)} - f_1^{(2)}), \\ (p_1^{(2)} - F_1^{(2)})(p^{(1)} - f^{(1)}) = (F^{(2)} - f^{(1)})(p_1^{(2)} - f_1^{(2)}); \end{cases}$$

aus denen sich durch Division

$$\frac{F_1^{(2)}-f_1^{(2)}}{p_1^{(2)}-F_1^{(2)}}=\frac{p^{(1)}-F^{(2)}}{F^{(2)}-f^{(1)}}$$

oder

$$40)\quad (p^{(1)}-F^{(2)})(p_1^{(2)}-F_1^{(2)})=(f^{(1)}-F^{(2)})(f_1^{(2)}-F_1^{(2)})$$

ergiebt. Weil nun aber nach dem Obigen offenbar

$$(f^{(1)}-F^{(2)})(f_1^{(2)}-F_1^{(2)})=\left\{\frac{M^{(1)}M^{(2)}}{N^{(1)}}\right\}^2$$

ist, so ist auch

$$41)\quad (p^{(1)}-F^{(2)})(p_1^{(2)}-F_1^{(2)})=\left\{\frac{M^{(1)}M^{(2)}}{N^{(1)}}\right\}^2.$$

Aus 38) und 41) sieht man, dass für ein Glas das Product

$$(p^{(1)}-F^{(1)})(p_1^{(1)}-F_1^{(1)}),$$

für ein System von zwei Gläsern das ganz ähnliche Product

$$(p^{(1)}-F^{(2)})(p_1^{(2)}-F_1^{(2)})$$

einem constanten Quadrate gleich ist, und es frägt sich nun, ob dieser allerdings sehr merkwürdige Satz allgemein für jedes beliebige Linsensystem als gültig betrachtet werden kann.

Um hierüber zu einer bestimmten Entscheidung zu gelangen, wollen wir den Satz für ein System von $i-1$ Gläsern als gültig annehmen, und untersuchen, ob derselbe dann auch immer für ein System von i Gläsern gültig sein muss. Denken wir uns nun einen Strahl durch alle i Gläser hindurch gehend, so ist nach der Voraussetzung, wenn $\mathfrak{K}^{(i-1)}$ eine gewisse constante Grösse bezeichnet:

$$42)\quad (p^{(1)}-F^{(i-1)})(p_1^{(i-1)}-F_1^{(i-1)})=(\mathfrak{K}^{(i-1)})^2,$$

und für das letzte $i$te Glas ist nach 18)

$$43)\quad (p^{(i)}-f^{(i)})(p_1^{(i)}-f_1^{(i)})=(M^{(i)})^2,$$

oder, weil nach 30)

$$p^{(i)}=-E^{(i-1)}-p_1^{(i-1)}$$

ist:

$$44)\quad (E^{(i-1)}+p_1^{(i-1)}+f^{(i)})(p_1^{(i)}-f_1^{(i)})=-(M^{(i)})^2.$$

Lässt man jetzt $p_1^{(i)}$ unendlich werden, so geht $p^{(1)}$ in $F^{(i)}$ und $p^{(i)}$ in $f^{(i)}$, also, weil nach 30)

$$p_1^{(i-1)}=-E^{(i-1)}-p^{(i)}$$

ist, $p_1^{(i-1)}$ in $-E^{(i-1)}-f^{(i)}$ über, und aus der Gleichung 42) erhält man daher, weil die Grösse $\mathfrak{K}^{(i-1)}$ constant ist, die Gleichung:

$$45)\quad (F^{(i)}-F^{(i-1)})(E^{(i-1)}+F_1^{(i-1)}+f^{(i)})=-(\mathfrak{K}^{(i-1)})^2.$$

Lässt man aber $p^{(1)}$ unendlich werden, so geben offenbar $p_1^{(i-1)}$ und $p_1^{(i)}$ in $F_1^{(i-1)}$ und $F_1^{(i)}$ über, und aus der Gleichung 44) erhält man daher, weil die Grösse $M^{(i)}$ constant ist, die Gleichung:

$$46) \quad (E^{(i-1)} + F_1^{(i-1)} + f^{(i)})(F_1^{(i)} - f_1^{(i)}) = -(M^{(i)})^2.$$

Aus den Gleichungen 42) und 45) erhält man:

$$p^{(1)} = F^{(i-1)} + \frac{(\Re^{(i-1)})^2}{p_1^{(i-1)} - F_1^{(i-1)}},$$

$$F^{(i)} = F^{(i-1)} - \frac{(\Re^{(i-1)})^2}{E^{(i-1)} + F_1^{(i-1)} + f^{(i)}};$$

und aus den Gleichungen 44) und 46) ergiebt sich:

$$p_1^{(i)} = f_1^{(i)} - \frac{(M^{(i)})^2}{E^{(i-1)} + p_1^{(i-1)} + f^{(i)}},$$

$$F_1^{(i)} = f_1^{(i)} - \frac{(M^{(i)})^2}{E^{(i-1)} + F_1^{(i-1)} + f^{(i)}}.$$

Also ist, wie man durch Subtraction leicht findet:

$$p^{(1)} - F^{(i)} = \frac{E^{(i-1)} + p_1^{(i-1)} + f^{(i)}}{(p_1^{(i-1)} - F_1^{(i-1)})(E^{(i-1)} + F_1^{(i-1)} + f^{(i)})}(\Re^{(i-1)})^2,$$

$$p_1^{(i)} - F_1^{(i)} = \frac{p_1^{(i-1)} - F_1^{(i-1)}}{(E^{(i-1)} + p_1^{(i-1)} + f^{(i)})(E^{(i-1)} + F_1^{(i-1)} + f^{(i)})}(M^{(i)})^2;$$

woraus sich durch Multiplication auf der Stelle

$$47) \quad (p^{(1)} - F^{(i)})(p_1^{(i)} - F_1^{(i)}) = \left\{\frac{\Re^{(i-1)} M^{(i)}}{E^{(i-1)} + F_1^{(i-1)} + f^{(i)}}\right\}^2,$$

oder, weil nach 33)

$$E^{(i-1)} + f^{(i)} = N^{(i-1)} - f_1^{(i-1)}$$

ist,

$$48) \quad (p^{(1)} - F^{(i)})(p_1^{(i)} - F_1^{(i)}) = \left\{\frac{\Re^{(i-1)} M^{(i)}}{N^{(i-1)} + F_1^{(i-1)} - f_1^{(i-1)}}\right\}^2$$

ergiebt.

Hieraus sieht man, dass der Satz, von welchem oben die Rede gewesen ist, für ein aus i Linsen bestehendes System gilt, wenn er für ein aus $i - 1$ Linsen bestehendes System gilt, und daher allgemein gültig ist, weil er oben für eine Linse und ein aus zwei Linsen bestehendes System schon als richtig erkannt worden ist.

Zugleich hat sich bei der vorhergehenden Betrachtung, wenn allgemein

$$49) \quad (p^{(1)} - F^{(i)})(p_1^{(i)} - F_1^{(i)}) = (\Re^{(i)})^2$$

gesetzt wird, die bemerkenswerthe Relation

$$50)\quad \mathfrak{K}^{(i)} = \frac{\mathfrak{K}^{(i-1)}M^{(i)}}{E^{(i-1)}+F_1^{(i-1)}+f^{(i)}} = \frac{\mathfrak{K}^{(i-1)}M^{(i)}}{N^{(i-1)}+F_1^{(i-1)}-f_1^{\overline{(i-1)}}}$$

ergeben, mit deren Hülfe wir nun einen independenten Ausdruck der Grösse $\mathfrak{K}^{(i)}$ aufzufinden versuchen wollen.

Bei dieser Untersuchung wollen wir

$$51)\quad \frac{\mathfrak{Z}^{(i)}}{\mathfrak{N}^{(i)}} = N^{(i)} - \cfrac{(M^{(i)})^2}{N^{(i-1)} - \cfrac{(M^{(i-1)})^2}{N^{(i-2)} - \cdots - \cfrac{(M^{(2)})^2}{N^{(1)}}}}$$

und zugleich

$$52)\quad \frac{\mathfrak{Z}^{(0)}}{\mathfrak{N}^{(0)}} = \frac{1}{0},\ \frac{\mathfrak{Z}^{(1)}}{\mathfrak{N}^{(1)}} = \frac{N^{(1)}}{1}$$

setzen, d. h. Zähler und Nenner des dem Kettenbruche auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens der Gleichung 51) gleichen gemeinen Bruchs durch $\mathfrak{Z}^{(i)}$ und $\mathfrak{N}^{(i)}$ bezeichnen, und

$$\mathfrak{Z}^{(0)} = 1,\ \mathfrak{N}^{(0)} = 0;\ \mathfrak{Z}^{(1)} = N^{(1)},\ \mathfrak{N}^{(1)} = 1$$

setzen.

Weil wegen der Gleichung 51) offenbar

$$\frac{\mathfrak{Z}^{(i)}}{\mathfrak{N}^{(i)}} = N^{(i)} - (M^{(i)})^2 \cdot \frac{\mathfrak{N}^{(i-1)}}{\mathfrak{Z}^{(i-1)}} = \frac{N^{(i)}\,.\,\mathfrak{Z}^{(i-1)} - (M^{(i)})^2\,.\,\mathfrak{N}^{(i-1)}}{\mathfrak{Z}^{(i-1)}}$$

ist, so haben wir die beiden folgenden Relationen:

$$53)\quad \begin{cases} \mathfrak{Z}^{(i)} = N^{(i)}\,.\,\mathfrak{Z}^{(i-1)} - (M^{(i)})^2\,.\,\mathfrak{N}^{(i-1)}, \\ \mathfrak{N}^{(i)} = \mathfrak{Z}^{(i-1)}; \end{cases}$$

welche wegen der Gleichungen 52) offenbar auch noch für $i=1$ und $i=2$ gelten.

Weil nun nach 38) und 41) offenbar

$$\mathfrak{K}^{(1)} = M^{(1)},\ \mathfrak{K}^{(2)} = \frac{M^{(1)}M^{(2)}}{N^{(1)}}$$

ist, so ist nach 52)

$$\mathfrak{K}^{(1)} = \frac{M^{(1)}}{\mathfrak{Z}^{(0)}},\ \mathfrak{K}^{(2)} = \frac{M^{(1)}M^{(2)}}{\mathfrak{Z}^{(1)}}.$$

Weil nach 36)

$$N^{(i-1)}+F_1{}^{(i-1)}-f_1{}^{(i-1)}=N^{(i-1)}-\cfrac{(M^{(i-1)})^2}{N^{(i-2)}-\cfrac{(M^{(i-2)})^2}{N^{(i-3)}-\ldots-\cfrac{(M^{(2)})^2}{N^{(1)}}}},$$

d. i. nach 51)

$$N^{(i-1)}+F_1{}^{(i-1)}-f_1{}^{(i-1)}=\frac{\mathfrak{Z}^{(i-1)}}{\mathfrak{N}^{(i-1)}}$$

ist, so ist nach 50)

$$\mathfrak{K}^{(i)}=\frac{\mathfrak{K}^{(i-1)}\mathfrak{N}^{(i-1)}M^{(i)}}{\mathfrak{Z}^{(i-1)}},$$

und folglich, weil nach der zweiten der Relationen 53)

$$\mathfrak{N}^{(i-1)}=\mathfrak{Z}^{(i-2)}$$

ist:

$$\mathfrak{K}^{(i)}=\frac{\mathfrak{K}^{(i-1)}\mathfrak{Z}^{(i-2)}M^{(i)}}{\mathfrak{Z}^{(i-1)}}.$$

Also ist

$$\mathfrak{K}^{(1)}=\frac{M^{(1)}}{\mathfrak{Z}^{(0)}},$$

$$\mathfrak{K}^{(2)}=\frac{\mathfrak{K}^{(1)}\mathfrak{Z}^{(0)}M^{(2)}}{\mathfrak{Z}^{(1)}}=\frac{M^{(1)}M^{(2)}}{\mathfrak{Z}^{(1)}},$$

$$\mathfrak{K}^{(3)}=\frac{\mathfrak{K}^{(2)}\mathfrak{Z}^{(1)}M^{(3)}}{\mathfrak{Z}^{(2)}}=\frac{M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}}{\mathfrak{Z}^{(2)}},$$

$$\mathfrak{K}^{(4)}=\frac{\mathfrak{K}^{(3)}\mathfrak{Z}^{(2)}M^{(4)}}{\mathfrak{Z}^{(3)}}=\frac{M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}M^{(4)}}{\mathfrak{Z}^{(3)}},$$

$$\mathfrak{K}^{(5)}=\frac{\mathfrak{K}^{(4)}\mathfrak{Z}^{(3)}M^{(5)}}{\mathfrak{Z}^{(4)}}=\frac{M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}M^{(4)}M^{(5)}}{\mathfrak{Z}^{(4)}},$$

u. s. w.

und folglich allgemein

$$54)\quad \mathfrak{K}^{(i)}=\frac{M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}M^{(4)}\ldots\ldots M^{(i)}}{\mathfrak{Z}^{(i-1)}},$$

oder wegen der zweiten der Gleichungen 53):

$$55)\quad \mathfrak{K}^{(i)}=\frac{M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}M^{(4)}\ldots\ldots M^{(i)}}{\mathfrak{N}^{(i)}}.$$

Nach 49) ist also

$$56)\quad (p^{(1)}-F^{(i)})(p_1{}^{(i)}-F_1{}^{(i)})=\left\{\frac{M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}M^{(4)}\ldots\ldots M^{(i)}}{\mathfrak{Z}^{(i-1)}}\right\}^2$$

oder

$$57)\quad (p^{(1)}-F^{(i)})(p_1{}^{(i)}-F_1{}^{(i)})=\left\{\frac{M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}M^{(4)}\ldots\ldots M^{(i)}}{\mathfrak{N}^{(i)}}\right\}^2.$$

Die Grössen $\mathfrak{Z}^{(i-1)}$ und $\mathfrak{N}^{(i)}$ können nach den aus der Theorie der Kettenbrüche bekannten Regeln immer leicht berechnet werden.

§. 7.

Nach 19) hat man die folgenden Gleichungen:

$$\frac{q^{(1)}}{q_1{}^{(1)}}=\frac{p^{(1)}-f^{(1)}}{M^{(1)}}=\frac{M^{(1)}}{p_1{}^{(1)}-f_1{}^{(1)}},$$

$$\frac{q^{(2)}}{q_1{}^{(2)}}=\frac{p^{(2)}-f^{(2)}}{M^{(2)}}=\frac{M^{(2)}}{p_1{}^{(2)}-f_1{}^{(2)}},$$

$$\frac{q^{(3)}}{q_1{}^{(3)}}=\frac{p^{(3)}-f^{(3)}}{M^{(3)}}=\frac{M^{(3)}}{p_1{}^{(3)}-f_1{}^{(3)}},$$

u. s. w.

$$\frac{q^{(i)}}{q_1{}^{(i)}}=\frac{p^{(i)}-f^{(i)}}{M^{(i)}}=\frac{M^{(i)}}{p_1{}^{(i)}-f_1{}^{(i)}};$$

aus denen sich, weil offenbar

$$q_1{}^{(1)}=q^{(2)},\ q_1{}^{(2)}=q^{(3)},\ q_1{}^{(3)}=q^{(4)},\ \ldots\ldots q_1{}^{(i-1)}=q^{(i)}$$

ist, durch Multiplication auf der Stelle die beiden Gleichungen

$$58)\quad \frac{q^{(1)}}{q_1{}^{(i)}}=\frac{(p^{(1)}-f^{(1)})(p^{(2)}-f^{(2)})(p^{(3)}-f^{(3)})\ldots\ldots(p^{(i)}-f^{(i)})}{M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}M^{(4)}\ldots\ldots M^{(i)}}$$

und

$$59)\quad \frac{q^{(1)}}{q_1{}^{(i)}}=\frac{M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}M^{(4)}\ldots\ldots M^{(i)}}{(p_1{}^{(1)}-f_1{}^{(1)})(p_1{}^{(2)}-f_1{}^{(2)})(p_1{}^{(3)}-f_1{}^{(3)})\ldots\ldots(p_1{}^{(i)}-f_1{}^{(i)})}$$

ergeben, woraus dann ferner auch

$$60)\quad \left(\frac{q^{(1)}}{q_1{}^{(i)}}\right)^2=\frac{(p^{(1)}-f^{(1)})(p^{(2)}-f^{(2)})(p^{(3)}-f^{(3)})\ldots\ldots(p^{(i)}-f^{(i)})}{(p_1{}^{(1)}-f_1{}^{(1)})(p_1{}^{(2)}-f_1{}^{(2)})(p_1{}^{(3)}-f_1{}^{(3)})\ldots\ldots(p_1{}^{(i)}-f_1{}^{(i)})}$$

folgt.

Wenn man nun einige der Grössen

$p_1^{(1)} - f_1^{(1)}$,

$(p_1^{(1)} - f_1^{(1)})(p_1^{(2)} - f_1^{(2)})$,

$(p_1^{(1)} - f_1^{(1)})(p_1^{(2)} - f_1^{(2)})(p_1^{(3)} - f_1^{(3)})$,

$(p_1^{(1)} - f_1^{(1)})(p_1^{(2)} - f_1^{(2)})(p_1^{(3)} - f_1^{(3)})(p_1^{(4)} - f_1^{(4)})$,

u. s. w.

vom Anfange an mit Hülfe der Gleichungen 18) und 36) entwickelt und durch $p^{(1)} - f^{(1)}$ ausdrückt, wobei man am Leichtesten rechnet, wenn man jedes dieser Producte für sich, unabhängig von den vorhergehenden, und mit der Multiplication der einzelnen Factoren in einander von Hinten anfangend, entwickelt; so bemerkt man sehr bald das allgemeine Gesetz, dass sich das Product

$$(p_1^{(1)} - f_1^{(1)})(p_1^{(2)} - f_1^{(2)})(p_1^{(3)} - f_1^{(3)}) \ldots (p_1^{(i)} - f_1^{(i)})$$

durch einen Ausdruck von der Form

$$(-1)^{i-1} \cdot \frac{(M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}M^{(4)} \ldots M^{(i)})^2}{G^{(i)} + H^{(i)}(p^{(1)} - f^{(1)})},$$

wo $G^{(i)}$ und $H^{(i)}$ zwei bloss von

$$M^{(1)},\ M^{(2)},\ \ldots\ M^{(i-1)};\ N^{(1)},\ N^{(2)},\ \ldots\ N^{(i-1)}$$

abhängende Grössen bezeichnen, darstellen lässt.

Um die allgemeine Richtigkeit dieses durch Induction gefundenen Gesetzes zu prüfen, wollen wir untersuchen, ob dasselbe unter der Voraussetzung, dass es bis $i-1$ gültig sei, auch immer bis i gelten müsse. Der Annahme zufolge ist also

$$(p_1^{(1)} - f_1^{(1)})(p_1^{(2)} - f_1^{(2)})(p_1^{(3)} - f_1^{(3)}) \ldots (p_1^{(i-2)} - f_1^{(i-2)})$$
$$= (-1)^{i-3} \cdot \frac{(M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)} \ldots M^{(i-2)})^2}{G^{(i-2)} + H^{(i-2)}(p^{(1)} - f^{(1)})}$$

und

$$(p_1^{(1)} - f_1^{(1)})(p_1^{(2)} - f_1^{(2)})(p_1^{(3)} - f_1^{(3)}) \ldots (p_1^{(i-1)} - f_1^{(i-1)})$$
$$= (-1)^{i-2} \cdot \frac{(M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)} \ldots M^{(i-1)})^2}{G^{(i-1)} + H^{(i-1)}(p^{(1)} - f^{(1)})},$$

folglich, wie sich hieraus durch Division ergiebt:

$$p_1^{(i-1)} - f_1^{(i-1)} = -(M^{(i-1)})^2 \cdot \frac{G^{(i-2)} + H^{(i-2)}(p^{(1)} - f^{(1)})}{G^{(i-1)} + H^{(i-1)}(p^{(1)} - f^{(1)})}.$$

Nun ist aber nach 31)

$$p_1^{(i)} - f_1^{(i)} = -\frac{(M^{(i)})^2}{N^{(i-1)} + (p_1^{(i-1)} - f_1^{(i-1)})},$$

und folglich mittelst des Vorhergehenden nach gehöriger Substitution, wenn wir der Kürze wegen

$$61)\quad \begin{cases} G^{(i)} = G^{(i-1)}N^{(i-1)} - G^{(i-2)}(M^{(i-1)})^2, \\ H^{(i)} = H^{(i-1)}N^{(i-1)} - H^{(i-2)}(M^{(i-1)})^2 \end{cases}$$

setzen:

$$p_1^{(i)} - f_1^{(i)} = -(M^{(i)})^2 \cdot \frac{G^{(i-1)} + H^{(i-1)}(p^{(1)} - f^{(1)})}{G^{(i)} + H^{(i)}(p^{(1)} - f^{(1)})}.$$

Also ist nach dem Obigen, wie man durch Multiplication dieser Gleichung mit der zweiten der beiden Gleichungen, von denen wir ausgegangen sind, sogleich findet:

$$62)\quad (p_1^{(1)} - f_1^{(1)})(p_1^{(2)} - f_1^{(2)})(p_1^{(3)} - f_1^{(3)}) \ldots (p_1^{(i)} - f_1^{(i)})$$
$$= (-1)^{i-1} \cdot \frac{(M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}M^{(4)} \ldots M^{(i)})^2}{G^{(i)} + H^{(i)}(p^{(1)} - f^{(1)})},$$

und die Allgemeinheit des bemerkten Gesetzes ist folglich hierdurch offenbar bewiesen. Zugleich haben wir die in den Gleichungen 61) ausgesprochenen Gesetze der Abhängigkeit der Grössen

$$G^{(1)},\ G^{(2)},\ G^{(3)},\ G^{(4)},\ \ldots\ G^{(i)}$$

und

$$H^{(1)},\ H^{(2)},\ H^{(3)},\ H^{(4)},\ \ldots\ H^{(i)}$$

von einander entdeckt.

Aus den Gleichungen 59) und 62) ergiebt sich nun aber sogleich

$$63)\quad \frac{q^{(1)}}{q_1^{(i)}} = (-1)^{i-1} \cdot \frac{G^{(i)} + H^{(i)}(p^{(1)} - f^{(1)})}{M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}M^{(4)} \ldots M^{(i)}}.$$

Nach dem Vorhergehenden ist, wie man leicht findet:

$$G^{(1)} = 0,$$
$$G^{(2)} = (M^{(1)})^2,$$
$$G^{(3)} = G^{(2)}N^{(2)} - G^{(1)}(M^{(2)})^2,$$
$$G^{(4)} = G^{(3)}N^{(3)} - G^{(2)}(M^{(3)})^2,$$
$$G^{(5)} = G^{(4)}N^{(4)} - G^{(3)}(M^{(4)})^2,$$

u. s. w.

und

$$H^{(1)} = 1,$$
$$H^{(2)} = N^{(1)},$$
$$H^{(3)} = H^{(2)} N^{(2)} - H^{(1)} (M^{(2)})^2,$$
$$H^{(4)} = H^{(3)} N^{(3)} - H^{(2)} (M^{(3)})^2,$$
$$H^{(5)} = H^{(4)} N^{(4)} - H^{(3)} (M^{(4)})^2,$$

u. s. w.

Setzt man nun überhaupt

$$64)\quad \frac{\mathfrak{Z}_1^{(i+1)}}{\mathfrak{N}_1^{(i+1)}} = \cfrac{(M^{(1)})^2}{N^{(1)} - \cfrac{(M^{(2)})^2}{N^{(2)} - \cfrac{(M^{(3)})^2}{N^{(3)} - \cdots - \cfrac{(M^{(i)})^2}{N^{(i)}}}}}$$

und ausserdem zugleich

$$65)\quad \mathfrak{Z}_1^{(1)} = 0,\ \mathfrak{N}_1^{(1)} = 1;$$

so ist nach einem allgemein bekannten Satze von den Kettenbrüchen:

$$\mathfrak{Z}_1^{(1)} = 0,$$
$$\mathfrak{Z}_1^{(2)} = (M^{(1)})^2,$$
$$\mathfrak{Z}_1^{(3)} = \mathfrak{Z}_1^{(2)} N^{(2)} - \mathfrak{Z}_1^{(1)} (M^{(2)})^2,$$
$$\mathfrak{Z}_1^{(4)} = \mathfrak{Z}_1^{(3)} N^{(3)} - \mathfrak{Z}_1^{(2)} (M^{(3)})^2,$$
$$\mathfrak{Z}_1^{(5)} = \mathfrak{Z}_1^{(4)} N^{(4)} - \mathfrak{Z}_1^{(3)} (M^{(4)})^2,$$

u. s. w.

und

$$\mathfrak{N}_1^{(1)} = 1,$$
$$\mathfrak{N}_1^{(2)} = N^{(1)},$$
$$\mathfrak{N}_1^{(3)} = \mathfrak{N}_1^{(2)} N^{(2)} - \mathfrak{N}_1^{(1)} (M^{(2)})^2,$$
$$\mathfrak{N}_1^{(4)} = \mathfrak{N}_1^{(3)} N^{(3)} - \mathfrak{N}_1^{(2)} (M^{(3)})^2,$$
$$\mathfrak{N}_1^{(5)} = \mathfrak{N}_1^{(4)} N^{(4)} - \mathfrak{N}_1^{(3)} (M^{(4)})^2,$$

u. s. w.

Vergleicht man dies mit dem Vorhergehenden, so ergiebt sich auf der Stelle

$$G^{(i)} = \mathfrak{Z}_1^{(i)},\ H^{(i)} = \mathfrak{N}_1^{(i)};$$

also nach 63)

$$66)\quad \frac{q^{(1)}}{q_1^{(i)}} = (-1)^{i-1} \cdot \frac{\mathfrak{Z}_1^{(i)} + \mathfrak{N}_1^{(i)}(p^{(1)} - f^{(1)})}{M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}M^{(4)} \ldots . M^{(i)}},$$

mittelst welcher Formel sich das Verhältniss $\frac{q^{(1)}}{q_1^{(i)}}$ berechnen und auch beurtheilen lässt, ob $q^{(1)}$ und $q_1^{(i)}$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben.

§. 8.

Nach 42) und 45), und nach 43) und 46) haben wir die beiden folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}&(p^{(1)} - F^{(i-1)})(p_1^{(i-1)} - F_1^{(i-1)})\\ &= -(F^{(i)} - F^{(i-1)})(E^{(i-1)} + F_1^{(i-1)} + f^{(i)})\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&(p^{(i)} - f^{(i)})(p_1^{(i)} - f_1^{(i)})\\ &= -(F_1^{(i)} - f_1^{(i)})(E^{(i-1)} + F_1^{(i-1)} + f^{(i)}),\end{aligned}$$

oder die beiden Proportionen:

$$\begin{aligned}&p^{(1)} - F^{(i-1)} : -(E^{(i-1)} + F_1^{(i-1)} + f^{(i)})\\ &= F^{(i)} - F^{(i-1)} : p_1^{(i-1)} - F_1^{(i-1)}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&p_1^{(i)} - f_1^{(i)} : -(E^{(i-1)} + F_1^{(i-1)} + f^{(i)})\\ &= F_1^{(i)} - f_1^{(i)} : p^{(i)} - f^{(i)};\end{aligned}$$

aus denen sich nach einem bekannten Satze von den Proportionen die beiden folgenden Proportionen ergeben:

$$\begin{aligned}&p^{(1)} - F^{(i-1)} : -(E^{(i-1)} + F_1^{(i-1)} + f^{(i)})\\ &= p^{(1)} - F^{(i)} : -(E^{(i-1)} + p_1^{(i-1)} + f^{(i)})\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&p_1^{(i)} - f_1^{(i)} : -(E^{(i-1)} + F_1^{(i-1)} + f^{(i)})\\ &= p_1^{(i)} - F_1^{(i)} : -(E^{(i-1)} + p^{(i)} + F_1^{(i-1)}).\end{aligned}$$

Weil nun aber nach 30)

$$E^{(i-1)} + p_1^{(i-1)} = -p^{(i)},\quad E^{(i-1)} + p^{(i)} = -p_1^{(i-1)}$$

ist, so werden die beiden vorhergehenden Proportionen:

$$p^{(1)} - F^{(i-1)} : -(E^{(i-1)} + F_1^{(i-1)} + f^{(i)}) = p^{(1)} - F^{(i)} : p^{(i)} - f^{(i)},$$

$$p_1^{(i)} - f_1^{(i)} : -(E^{(i-1)} + F_1^{(i-1)} + f^{(i)}) = p_1^{(i)} - F_1^{(i)} : p_1^{(i-1)} - F_1^{(i-1)};$$

und führen durch Division zu der Proportion

$$\frac{p^{(1)}-F^{(i-1)}}{p_1{}^{(i)}-f_1{}^{(i)}}:1=\frac{p^{(1)}-F^{(i)}}{p_1{}^{(i)}-F_1{}^{(i)}}:\frac{p^{(i)}-f^{(i)}}{p_1{}^{(i-1)}-F_1{}^{(i-1)}},$$

woraus sich die Gleichung

$$\frac{p^{(1)}-F^{(i)}}{p_1{}^{(i)}-F_1{}^{(i)}}=\frac{p^{(1)}-F^{(i-1)}}{p_1{}^{(i-1)}-F_1{}^{(i-1)}}\cdot\frac{p^{(i)}-f^{(i)}}{p_1{}^{(i)}-f_1{}^{(i)}}$$

ergiebt. Daher hat man jetzt die folgenden Gleichungen:

$$\frac{p^{(1)}-F^{(i)}}{p_1{}^{(i)}-F_1{}^{(i)}}=\frac{p^{(1)}-F^{(i-1)}}{p_1{}^{(i-1)}-F_1{}^{(i-1)}}\cdot\frac{p^{(i)}-f^{(i)}}{p_1{}^{(i)}-f_1{}^{(i)}},$$

$$\frac{p^{(1)}-F^{(i-1)}}{p_1{}^{(i-1)}-F_1{}^{(i-1)}}=\frac{p^{(1)}-F^{(i-2)}}{p_1{}^{(i-2)}-F_1{}^{(i-2)}}\cdot\frac{p^{(i-1)}-f^{(i-1)}}{p_1{}^{(i-1)}-f_1{}^{(i-1)}},$$

$$\frac{p^{(1)}-F^{(i-2)}}{p_1{}^{(i-2)}-F_1{}^{(i-2)}}=\frac{p^{(1)}-F^{(i-3)}}{p_1{}^{(i-3)}-F_1{}^{(i-3)}}\cdot\frac{p^{(i-2)}-f^{(i-2)}}{p_1{}^{(i-2)}-f_1{}^{(i-2)}},$$

u. s. w.

$$\frac{p^{(1)}-F^{(2)}}{p_1{}^{(2)}-F_1{}^{(2)}}=\frac{p^{(1)}-F^{(1)}}{p_1{}^{(1)}-F_1{}^{(1)}}\cdot\frac{p^{(2)}-f^{(2)}}{p_1{}^{(2)}-f_1{}^{(2)}},$$

$$\frac{p^{(1)}-F^{(1)}}{p_1{}^{(1)}-F_1{}^{(1)}}=\frac{p^{(1)}-f^{(1)}}{p_1{}^{(1)}-f_1{}^{(1)}}.$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen, und hebt auf, was sich aufheben lässt, so erhält man:

$$\frac{p^{(1)}-F^{(i)}}{p_1{}^{(i)}-F_1{}^{(i)}}$$

$$=\frac{(p^{(1)}-f^{(1)})\,(p^{(2)}-f^{(2)})\,(p^{(3)}-f^{(3)})\,\ldots.\,(p^{(i)}-f^{(i)})}{(p_1{}^{(1)}-f_1{}^{(1)})\,(p_1{}^{(2)}-f_1{}^{(2)})\,(p_1{}^{(3)}-f_1{}^{(3)})\,\ldots.\,(p_1{}^{(i)}-f_1{}^{(i)})}.$$

Also ist nach 60)

$$67)\quad\left(\frac{q^{(1)}}{q_1{}^{(i)}}\right)^2=\frac{p^{(1)}-F^{(i)}}{p_1{}^{(i)}-F_1{}^{(i)}}.$$

XI.

Bemerkungen zu zwei Abhandlungen in diesem Archiv in Betreff der Steinerschen Sätze über die conischen Sechsecke und Sechsseite.

Von

Herrn A. Göpel

zu Berlin.

Im dritten Bande des Archivs beweist Herr Dr. Schlömilch einige Sätze über die conischen Sechsecke und Sechsseite, welche Herr Adams im dritten Hefte des fünften Bandes wieder aufnimmt; allein es scheint mir, als hätten beide den Inhalt dieser Sätze verkannt. Je mehr die mathematischen Wissenschaften in den neuesten Zeiten materiell an Umfang gewinnen, um desto dringender wird auch die Pflicht des Mathematikers, den gewonnenen Stoff in eine übersichtliche Ordnung zu bringen und das Zusammengehörige aneinanderzureihen. Aus dieser Rücksicht wird es den Lesern des Archivs vielleicht nicht unwillkommen sein, noch einen andern Gesichtspunkt für die fraglichen Sätze kennen zu lernen. Es sind die folgenden.

Ister Lehrsatz. „In einem conischen Sechseck $ABCDEF$ wird jede der drei Hauptdiagonalen AD, BE, CF von den beiden nicht anliegenden Seiten des Sechsecks in zwei neuen Punkten geschnitten, so dass man zusammen sechs neue Punkte M', N', P'; M'', N'' P'' erhält. Von diesen sechs Punkten liegen die ersten drei, nämlich M', N', P', auf einer Geraden, und die drei andern M'', N'', P'' auf einer andern Geraden."

Beweis. Die Punkte

$$\left.\begin{matrix} M' \\ N' \\ P' \end{matrix}\right\} \text{ sind die Durchschnittspunkte der Hauptdiagonalen } \left\{\begin{matrix} CF \\ AD \\ BE \end{matrix}\right. \text{ mit den Seiten } \left\{\begin{matrix} AB \\ EF \\ CD \end{matrix}\right.$$

Sie sind folglich die Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten des conischen Sechsecks

$$ADCFEB.$$

Folglich (Pascalscher Satz) liegen sie in einer Geraden.

Ebenso sind die Punkte

$$\left.\begin{matrix} M'' \\ N'' \\ P'' \end{matrix}\right\} \text{die Durchschnitte der Hauptdiagonalen} \left\{\begin{matrix} CF \\ AD \\ BE \end{matrix}\right. \text{mit den Seiten} \left\{\begin{matrix} DE \\ BC \\ AF \end{matrix}\right.$$

Sie sind folglich die Durchschnitte der gegenüberliegenden Seiten des conischen Sechsecks

$$AFCBED,$$

folglich liegen sie ebenfalls auf einer Geraden.

Aus dieser Darstellung ersieht man, dass der aufgestellte Satz nicht einmal eine Folgerung aus dem Pascalschen Satz, sondern lediglich der Pascalsche Satz selbst ist.

Ein ähnliches gilt von dem

IIIten Lehrsatze, welcher der polare Gegensatz des vorigen ist und den ich hier nicht zu wiederholen brauche. Er ist lediglich der Brianchonsche Lehrsatz vom conischen Sechsseit.

Um nun zu dem

IIten Lehrsatze nebst seinem polaren Gegensatz zu kommen, wollen wir nach Herrn Plückers Vorgange allgemein das conische Sechseck

$$ABCDEF$$

durch das Schema

$$\begin{matrix} A & C & E \\ B & D & F \end{matrix}$$

auffassen, so dass also z. B. das conische Sechseck

$$ADCFEB$$

durch das Schema

$$\begin{matrix} A & C & E \\ D & F & B \end{matrix}$$

dargestellt wird. — Wenn wir jetzt noch die Gegenseiten des ursprünglich gegebenen conischen Sechsecks $\begin{matrix} ACE \\ BDF \end{matrix}$ verbinden, so erhalten wir drei Durchschnittspunkte M, N, P, welche nach Pascal wieder auf einer Geraden liegen. Nun lautet der zweite Lehrsatz dahin, dass die drei Geraden MNP, $M'N'P'$ und $M''N''P''$ sich in einem Punkte schneiden. Mit Benutzung des obigen Schemas werden wir ihn daher folgendermassen aussprechen können.

Die Pascalschen Linien der drei conischen Sechsecke

$$\begin{matrix} ACE \\ BDF \end{matrix} \qquad \begin{matrix} ACE \\ DFB \end{matrix} \qquad \begin{matrix} ACE \\ FBD \end{matrix}$$

schneiden sich in einem Punkt.

In dieser Fassung erkennt man sogleich, dass dieser Satz einen geringen Theil von dem Steinerschen Satze über das conische Sechseck ausmacht, welchen dieser Gelehrte in dem Anhange zu seiner „Entwickelung der Abhängigkeit" gegeben, aber schon viel früher im (wenn ich nicht irre) 18ten Bande der Annalen von Gergonne*) bekannt gemacht hat. Herr Plücker hat ihn vor langer Zeit im 5ten Bande des Crelle'schen Journals bewiesen und derjenige Theil seines Beweises, welcher auf den obigen Ilten Lehrsatz Bezug hat, stimmt ganz mit dem von Herrn Adams dafür gegebenen überein.

Der IVte und Vte Lehrsatz sind wieder nichts weiter, als der Pascalsche und Brianchonsche Lehrsatz. Der erstere läuft z. B. darauf hinaus, dass der Durchschnittspunkt der beiden Gegenseiten AB und DE zur Bestimmung der Pascalschen Linie des Sechsecks

$$\begin{matrix} A & C & E \\ B & D & F \end{matrix}$$

und auch zur Bestimmung der Pascalschen Linie

$$\begin{matrix} A & C & D \\ B & E & F \end{matrix}$$

dient, was ohne weiteres aus dem Schema ersichtlich ist. Man kann hinzufügen, dass er auch auf den Pascalschen Linien von

$$\begin{matrix} A & F & E \\ B & D & C \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} A & F & D \\ B & E & C \end{matrix}$$

liegt. Zu dem Vten Satze bemerkt Herr Adams, dass er sich auch direct aus dem Brianchonschen Satze ableiten lasse. Er ist, wie ich an seinem reciproken Satze (IV.) gezeigt habe, lediglich der Brianchonsche Satz selbst.

Um den Lesern des Archivs die Mühe des Nachschlagens zu ersparen, will ich noch den Steinerschen Satz über das Sechseck wiederholen, aus welchem man sich dann durch polare Uebertragung den über das Sechsseit bilden kann.

„Das vollständige Sechseck hat 15 Seiten. Diese 15 Seiten schneiden sich ausserdem noch in 45 Punkten. Ist nun das Sechseck einem Kegelschnitte eingeschrieben, so liegen diese 45 Punkte zu dreien auf geraden Linien und zwar dergestalt, dass jeder dieser Punkte vier solchen Geraden zugleich angehört. Die Anzahl dieser Geraden ist daher 60; und sie sind die Pascalschen Linien zu den 60 einfachen Sechsecken, welche man erhält, wenn man die Ecken des vollständigen Sechsecks in allen ihren möglichen verschiedenen 60 Reihefolgen nimmt. Diese 60 Pascalschen Linien schneiden sich zu dreien in einem Punkte, so dass man 20 solcher Punkte erhält. Diese 20 Punkte liegen zu vieren auf geraden Linien, und zwar dergestalt, dass jeder dieser Punkte drei solchen Geraden zugleich angehört und die Anzahl dieser Geraden daher 15 ist."

---

*) T. XVIII. p. 339.

Welche Relation diese 15 Geraden zu einander haben, hat Herr Steiner bis jetzt unerörtert gelassen, und diese Frage ist es nur noch, welche ihrer Erledigung entgegensieht.

XII.

Einige Bemerkungen über die Rectification und Quadratur des Kreises.

Nach einem Aufsatze des Herrn E. Catalan in den Nouvelles Annales de Mathématiques. Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, rédigé par Terquem et Gerono. T. I. Paris. 1842. p. 190. frei bearbeitet

von

dem Herausgeber.

Wenn wir die Flächen eines in und eines um einen Kreis beschriebenen regulären Vielecks von $2^k n$ Seiten respective durch

$$F_k \text{ und } F'_k$$

bezeichnen, so haben wir nach einem allgemein bekannten Satze die beiden folgenden Gleichungen:

$$1)\quad (F_k)^2 = F_{k-1}F'_{k-1},\ F'_k = \frac{2F_{k-1}F'_{k-1}}{F_{k-1}+F_k};$$

aus denen durch Division

$$2)\quad \frac{(F_k)^2}{F'_k} = \tfrac{1}{2}(F_{k-1}+F_k)$$

folgt.

Aus der zweiten der Gleichungen 1) erhält man:

$$F'_1 = \frac{2F_0 F'_0}{F_0 + F_1},$$

$$F'_2 = \frac{2F_1 F'_1}{F_1 + F_2},$$

$$F'_3 = \frac{2F_2 F'_2}{F_2 + F_3},$$

u. s. w.

$$F'_k = \frac{2F_{k-1} F'_{k-1}}{F_{k-1} + F_k};$$

und folglich, wenn man multiplicirt und aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$3)\quad F'_k = 2^k F'_0 \frac{F_0 F_1 F_2 \ldots . F_{k-1}}{(F_0+F_1)(F_1+F_2)(F_2+F_3)\ldots .(F_{k-1}+F_k)}.$$

Multiplicirt man die Gleichungen 2) und 3) in einander, so erhält man:

$$4)\quad (F_k)^2 = 2^{k-1} F'_0 \frac{F_0 F_1 F_2 \ldots . F_{k-1}}{(F_0+F_1)(F_1+F_2)(F_2+F_3)\ldots .(F_{k-2}+F_{k-1})}.$$

Setzt man hier $k-1$ für k, so ergiebt sich:

$$5)\quad (F_{k-1})^2 = 2^{k-2} F'_0 \frac{F_0 F_1 F_2 \ldots . F_{k-2}}{(F_0+F_1)(F_1+F_2)(F_2+F_3)\ldots .(F_{k-3}+F_{k-2})}.$$

Dividirt man nun 4) durch 5), so kommt:

$$6)\quad (F_k)^2 = \frac{2(F_{k-1})^2}{F_{k-2}+F_{k-1}}\ ^{*}),$$

was man auch leicht in Worten aussprechen kann.

Man kann diese Gleichung aber auch auf folgende Art ausdrücken:

$$7)\quad \left(\frac{F_{k-1}}{F_k}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{F_{k-2}}{F_{k-1}}\right),$$

und hieraus ergiebt sich, wenn man

$$8)\quad F_k = \frac{2^k}{\mathfrak{F}_k}$$

setzt, ferner die Gleichung:

$$9)\quad \left(\frac{\mathfrak{F}_k}{\mathfrak{F}_{k-1}}\right)^2 = 2 + \frac{\mathfrak{F}_{k-1}}{\mathfrak{F}_{k-2}}.$$

---

*) Sollte sich nicht eine ähnliche bemerkenswerthe Relation bloss zwischen den Flächenräumen der um den Kreis beschriebenen regulären Vielecke finden lassen?

Setzt man dagegen

$$10)\quad F_k = 2^k \Phi_k,$$

so erhält man

$$11)\quad (\Phi_k)^2 = \frac{(\Phi_{k-1})^3}{\Phi_{k-2} + 2\Phi_{k-1}}.$$

Geben wir vom eingeschriebenen regulären Vierecke aus, und setzen folglich $n = 4$, so ist, wenn der Halbmesser des Kreises als Einheit angenommen wird, offenbar

$$F_0 = 2, \quad F'_0 = 4;$$

also nach der ersten der Gleichungen 1):

$$(F_1)^2 = F_0 F'_0 = 8, \quad F_1 = 2\sqrt{2}.$$

Folglich ist nach 8)

$$\mathfrak{F}_0 = \tfrac{1}{2}, \quad \mathfrak{F}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\mathfrak{F}_1}{\mathfrak{F}_0} = \sqrt{2};$$

und man erhält also mit Hülfe der Gleichung 9) überhaupt die folgenden Ausdrücke:

$$\frac{\mathfrak{F}_1}{\mathfrak{F}_0} = \sqrt{2},$$
$$\frac{\mathfrak{F}_2}{\mathfrak{F}_1} = \sqrt{(2+\sqrt{2})},$$
$$\frac{\mathfrak{F}_3}{\mathfrak{F}_2} = \sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})},$$
$$\frac{\mathfrak{F}_4}{\mathfrak{F}_3} = \sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})})},$$
$$\frac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{F}_4} = \sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})})})},$$

u. s. w.

Bezeichnet man nun aber die Grössen auf der rechten Seite der Gleichheitszeichen der Kürze wegen nach der Reihe durch

$$f_1(2),\ f_2(2),\ f_3(2),\ f_4(2),\ \ldots;$$

so ist, wie man leicht findet:

$$\mathfrak{F}_1 = \tfrac{1}{2} f_1(2),$$
$$\mathfrak{F}_2 = \tfrac{1}{2} f_1(2) f_2(2),$$
$$\mathfrak{F}_3 = \tfrac{1}{2} f_1(2) f_2(2) f_3(2),$$
$$\mathfrak{F}_4 = \tfrac{1}{2} f_1(2) f_2(2) f_3(2) f_4(2),$$
$$\mathfrak{F}_5 = \tfrac{1}{2} f_1(2) f_2(2) f_3(2) f_4(2) f_5(2),$$

u. s. w.

und folglich nach 8), wenn wir der Kürze wegen

$$12)\quad \frac{2}{fk(2)} = \varphi_k(2)$$

setzen:

$$13)\quad \begin{cases} F_1 = 2\varphi_1(2), \\ F_2 = 2\varphi_1(2)\varphi_2(2), \\ F_3 = 2\varphi_1(2)\varphi_2(2)\varphi_3(2), \\ F_4 = 2\varphi_1(2)\varphi_2(2)\varphi_3(2)\varphi_4(2), \\ F_5 = 2\varphi_1(2)\varphi_2(2)\varphi_3(2)\varphi_4(2)\varphi_5(2), \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Bezeichnen wir die Gränze, welcher F_k sich nähert, wenn k in's Unendliche wächst, durch F_∞, so ist bekanntlich, wenn π wie gewöhnlich die halbe Peripherie des Kreises bezeichnet:

$$14)\quad \pi = F_\infty.$$

Bezeichnen wir also die Gränze, welcher das Product

$$\varphi_1(2)\varphi_2(2)\varphi_3(2)\varphi_4(2)\ldots\varphi_k(2)$$

sich nähert, wenn k in's Unendliche wächst, durch

$$\varphi_1(2)\varphi_2(2)\varphi_3(2)\varphi_4(2)\ldots\varphi_\infty(2);$$

so ist nach 13)

$$15)\quad \tfrac{1}{2}\pi = \varphi_1(2)\varphi_2(2)\varphi_3(2)\varphi_4(2)\ldots\varphi_\infty(2).$$

Leicht überzeugt man sich nun von der Richtigkeit der Relation

$$\varphi_k(2) = \frac{2}{\sqrt{\{2 + f_{k-1}(2)\}}},$$

aus der sich ferner nach 12) sogleich die Relation

$$\varphi_k(2) = \frac{1}{\sqrt{\left\{\frac{1 + \frac{1}{\varphi_{k-1}(2)}}{2}\right\}}}$$

ergiebt. Nun ist aber nach 12)

$$\varphi_1(2) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sec\frac{\pi}{4}.$$

Also ist

$$\varphi_1(2) = \sec\frac{\pi}{4},$$

$$\varphi_2(2) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}\right)}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{8}} = \sec\frac{\pi}{8},$$

$$\varphi_3(2) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{8}}{2}\right)}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{16}} = \sec\frac{\pi}{16},$$

$$\varphi_4(2) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{16}}{2}\right)}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{32}} = \sec\frac{\pi}{32},$$

u. s. w.

Wie man auf diese Art immer weiter gehen kann, unterliegt keinem Zweifel, und es ist folglich allgemein

$$\varphi_k(2) = \sec\frac{\pi}{2^{k+1}}.$$

Bezeichnen wir die Gränze, welcher das Product

$$\sec\frac{\pi}{2^2}\ \sec\frac{\pi}{2^3}\ \sec\frac{\pi}{2^4}\ \sec\frac{\pi}{2^5}\ \ldots\ \sec\frac{\pi}{2^k}$$

sich nähert, wenn k in's Unendliche wächst, durch

$$\sec\frac{\pi}{2^2}\ \sec\frac{\pi}{2^3}\ \sec\frac{\pi}{2^4}\ \sec\frac{\pi}{2^5}\ \ldots\ \sec\frac{\pi}{2^\infty},$$

so ist nach 15)

$$16)\quad \tfrac{1}{2}\pi = \sec\frac{\pi}{2^2}\ \sec\frac{\pi}{2^3}\ \sec\frac{\pi}{2^4}\ \ldots\ \sec\frac{\pi}{2^\infty}.$$

Dies ist eine längst bekannte, von Euler gefundene, hier aber ganz elementar bewiesene Formel.

XIII.
Allgemeiner Beweis der bekannten Ausdrücke für sin $(\alpha \pm \beta)$ und cos $(\alpha \pm \beta)$.

Von

Herrn F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

1.

Um zu einer allgemeinen Definition des Sinus und Cosinus zu gelangen, ist es nöthig, folgende Betrachtung über das Zählen der Kreisbogen anzustellen.

In der Peripherie eines mit der Einheit als Radius beschriebenen Kreises werde ein fester Punkt A angenommen. Ist dann M ein beliebiger anderer Punkt in der Kreislinie, so verstehe ich unter dem zwischen A und M liegenden, oder dem dem Punkte M zugehörigen (entsprechenden) Bogen den Weg, welchen man auf der Peripherie zurück legen muss, um von A nach M zu gelangen. Diese Bewegung kann nicht nur von A aus nach zwei verschiedenen Richtungen geschehen, deren eine positive, die andere negative Bogen bestimmt, sondern einmal in M angelangt, wird man noch beliebig oft in diesem Punkt ankommen, wenn man die Peripherie mehrmal durchläuft. Es gehören daher dem Punkte M unendlich viele Bogen zu.

Nun denke man sich durch des Kreises Mittelpunkt ein rechtwinkliges Coordinatensystem in des Kreises Ebene gelegt, so dass der positive Theil der Abscissenaxe vom Mittelpunkte nach dem festen Punkte A, von dem alle Bogen an gezählt werden, gerichtet ist. Dies vorausgesetzt, nenne ich mit Grunert*) den Sinus und Cosinus des dem Punkte M zugehörigen Bogens resp. die Ordinate und Abscisse des Punktes M in Bezug auf das angenommene System.

2.

Da nach dem Obigen, wenn α ein ganz beliebiger (positiver oder negativer) dem Punkte M zugehöriger Bogen ist, eben diesem Punkte überhaupt der Bogen $\alpha \pm 2k\pi$ entspricht, wo k eine

---

*) Elemente der ebenen, sphärischen und sphäroidischen Trigonometrie zum Gebrauche bei Vorlesungen.

positive ganze Zahl bezeichnet, so folgt aus der Definition des Sinus und Cosinus, dass

$$1)\quad \begin{cases} \sin(\alpha \pm 2k\pi) = \sin\alpha \\ \cos(\alpha \pm 2k\pi) = \cos\alpha \end{cases}$$

ist.

Hierdurch sind die Sinusse und Cosinusse zweier Bogen verglichen, die sich um $\pm 2k\pi$ unterscheiden. Um nun eine Vergleichung für zwei sich um $\pm(2k+1)\pi$ unterscheidende Bogen anzustellen, sei M' der dem Punkte M diametral gegenüberliegende Punkt der Peripherie. Die diesem Punkte zugehörigen Bogen zu finden, stelle man sich vor, dass man auf der Kreislinie fortschreitend in M angelangt sei, und der Bogen α sei das Resultat dieser Bewegung. Von diesem Moment an gerechnet, wird man zum ersten Mal in M' ankommen, wenn der Bogen $\pm\pi$ durchlaufen ist, weswegen dem Punkte M' schon der Bogen $\alpha\pm\pi$ entspricht. Da man nun von M' die ganze Peripherie noch mehremal durchlaufen muss, um immer wieder von Neuem in diesem Punkte anzukommen, so gehört dem Punkte M' überhaupt der Bogen $\alpha \pm \pi \pm 2k\pi$ zu. Jenachdem man nun die obern oder untern Zeichen auf einander bezieht, oder nicht, findet man die Bogen $\alpha\pm(2k+1)\pi$, oder $\alpha\pm(2k-1)\pi$; da aber $2k-1$ so gut als $2k+1$ jede ungerade Zahl repräsentirt, so ist der letzte Bogen im ersten schon enthalten, und somit entspricht dem Punkte M' der Bogen $\alpha\pm(2k+1)\pi$.

Da nun Sinus und Cosinus der den Punkten M und M' entsprechenden Bogen absolut gleich, den Vorzeichen nach aber entgegengesetzt sind, so erhält man die Relationen

$$2)\quad \begin{cases} \sin\{\alpha \pm (2k+1)\pi\} = -\sin\alpha \\ \cos\{\alpha \pm (2k+1)\pi\} = -\cos\alpha \end{cases}$$

Die Ausdrücke 1) und 2) lassen sich aber so mit einander vereinigen:

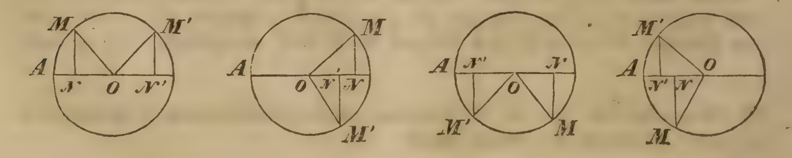
$$3)\quad \begin{cases} \sin(\alpha \pm k\pi) = (-1)^k \sin\alpha \\ \cos(\alpha \pm k\pi) = (-1)^k \cos\alpha \end{cases}$$

indem jetzt k eine beliebige (gerade oder ungerade) positive ganze Zahl bezeichnet.

Dadurch sind die Functionen zweier Bogen verglichen, die sich um ein gerades Vielfache von $\frac{1}{2}\pi$ unterscheiden.

Endlich betrachten wir zwei Bogen, die sich um ein ungerades Vielfache von $\frac{1}{2}\pi$ unterscheiden.

Zu dem Ende sei wieder α ein ganz beliebiger, dem Punkte M zugehöriger Bogen, der in einem der vier Quadranten (s. die nachfolgende Figur) endigen kann:



O ist des Kreises Mittelpunkt, von M schreitet man in allen Fällen nach derselben (positiven) Richtung zu M' fort durch den rechten Winkel MOM' hindurch. Dann ist $\alpha + \frac{1}{2}\pi$ ein dem Punkte M' entsprechender Bogen. Sind MN, $M'N'$ auf AO senkrecht, so erhellt die Aehnlichkeit der Triangel MON, $M'ON'$, weswegen $MN = ON'$, und $ON = M'N'$. Da nun in allen Fällen $\sin(\alpha + \frac{1}{2}\pi)$ und $\cos\alpha$ dasselbe, dagegen $\cos(\alpha + \frac{1}{2}\pi)$ und $\sin\alpha$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, so ist

$$4)\quad \begin{cases} \sin(\alpha + \frac{1}{2}\pi) = \cos\alpha \\ \cos(\alpha + \frac{1}{2}\pi) = -\sin\alpha. \end{cases}$$

Zieht man in diesen Relationen von $\alpha + \frac{1}{2}\pi$ den Bogen π ab, und berücksichtigt die Formeln 3), so entsteht

$$5)\quad \begin{cases} \sin(\alpha - \frac{1}{2}\pi) = -\cos\alpha \\ \cos(\alpha - \frac{1}{2}\pi) = \sin\alpha. \end{cases}$$

Addirt man in 4) zu $\alpha + \frac{1}{2}\pi$ die Grösse $k\pi$, und beachtet die Formeln 3), so wird

$$6)\quad \begin{cases} \sin\{\alpha + (2k+1)\frac{1}{2}\pi\} = (-1)^k \cos\alpha \\ \cos\{\alpha + (2k+1)\frac{1}{2}\pi\} = -(-1)^k \sin\alpha. \end{cases}$$

Subtrahirt man dagegen in 5) von $\alpha - \frac{1}{2}\pi$ den Bogen $k\pi$, und beachtet ebenfalls 3), so entsteht

$$7)\quad \begin{cases} \sin\{\alpha - (2k+1)\frac{1}{2}\pi\} = -(-1)^k \cos\alpha \\ \cos\{\alpha - (2k+1)\frac{1}{2}\pi\} = (-1)^k \sin\alpha \end{cases}$$

So sind nun in den Formeln 3), 6), 7) die Sinusse und Cosinusse zweier sich um ein beliebiges Vielfache von $\pm\frac{1}{2}\pi$ unterscheidender Bogen verglichen.

3.

Jetzt haben wir noch zu untersuchen, wie sich die Sinus und Cosinus eines negativen Bogens zu denen des positiven verhalten.

Es sei deshalb $\alpha = \alpha' + 2k\pi$, wo α, α' positiv und $\alpha' < 2\pi$; dann ist $-\alpha = -\alpha' - 2k\pi$, und folglich $\sin\alpha = \sin\alpha'$ und $\sin(-\alpha) = \sin(-\alpha')$, $\cos\alpha = \cos\alpha'$ und $\cos(-\alpha) = \cos(-\alpha')$ nach 1).

Rechnet man die Bogen α' und $-\alpha'$ beide vom Punkte A aus, so erhellt durch einfache geometrische Betrachtung, dass dieselben zugleich im ersten und vierten, oder im zweiten und dritten Quadranten endigen, weshalb $\sin(-\alpha') = -\sin\alpha'$, und $\cos(-\alpha') = \cos\alpha'$. Daher ist auch

$$8)\quad \begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha. \end{cases}$$

Die Formeln 3), 6), 7), 8) reichen nun vollständig aus, um die allgemeine Gültigkeit der Formeln

$$9) \quad \begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{cases}$$

darzuthun.

4.

In den Elementen der Trigonometrie wird ohne Weitläufigkeit erwiesen, dass

$$10) \quad \begin{cases} \sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \end{cases}$$

ist, wenn die Bogensumme $\alpha+\beta$ im ersten Quadranten liegt, so dass die Bogen α, β beide positiv sind, und keiner von ihnen hinsichtlich des absoluten Werths die Grösse $\frac{1}{4}\pi$ übersteigt.

Für das untere Vorzeichen nun haben wir nach 8)

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta),$$

und wenn wir daher $\alpha-\beta$ als Summe der Bogen α und $-\beta$ ansehen, so bleibt für diesen Fall die erste der Relationen 9) richtig.

Ferner ist nach 8) $\sin(-\alpha-\beta) = -\sin(\alpha+\beta) = -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$, welches wiederum nach 8) $= \sin(-\alpha)\cos(-\beta) + \cos(-\alpha)\sin(-\beta)$.

Endlich ist $\sin(-\alpha+\beta) = -\sin(\alpha-\beta) = -\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ nach 10), welches nach 8) wieder $= \sin(-\alpha)\cos\beta + \cos(-\alpha)\sin\beta$ ist.

Deshalb ist die erste der Relationen 9) richtig in allen den Fällen, wo α, β beliebige positive oder negative Bogen sind, deren keiner bloss mit Rücksicht auf den absoluten Werth die Grösse $\frac{1}{4}\pi$ übersteigt. Ganz ähnlich wird die Richtigkeit der zweiten Gleichung in 9) erwiesen.

5.

Sind nun α, β zwei ganz beliebige Bogen, dagegen α', β' zwei Bogen, deren keiner hinsichtlich des absoluten Werths $\frac{1}{4}\pi$ übersteigt, so können die positiven ganzen Zahlen k, ϱ jederzeit so bestimmt werden, dass

$$11) \quad \begin{cases} \alpha = \alpha' \pm \frac{1}{2}\pi\,.\,k \\ \beta = \beta' \pm \frac{1}{2}\pi\,.\,\varrho \end{cases}$$

ist.

Denn ist α zuerst positiv, so nehme man $\frac{1}{2}\pi$ so oft davon weg, als es angeht, z. B. $m$mal, der Rest α' wird $< \frac{1}{2}\pi$ sein. Ist nun dieser Rest auch kleiner als $\frac{1}{4}\pi$, so hat man nur $k = m$ zu nehmen. Wenn aber α' die Grösse $\frac{1}{4}\pi$ übersteigen sollte, so setzt man $\alpha = -(\frac{1}{2}\pi - \alpha') + \frac{1}{2}\pi(m+1)$, welches ebenso viel als $\alpha' + \frac{1}{2}\pi.m$, und nimmt $k = m+1$, da nun $\frac{1}{2}\pi - \alpha'$ stets kleiner als $\frac{1}{4}\pi$ ist.

Ist ferner α negativ, so kann nach dem eben Bewiesenen $-\alpha = \alpha' + \frac{1}{2}\pi\,.\,k$ gesetzt werden, dass $\alpha' < \frac{1}{4}\pi$, und dann ist $\alpha = -\alpha' - \frac{1}{2}\pi\,.\,k$.

Dieselben Schlüsse gelten für β, und unsere Behauptung ist somit erwiesen.

6.

Der Fortgang der Betrachtung erfordert die Unterscheidung dreier Hauptfälle, nämlich:

I. Sind k, ϱ beide gerade $= 2k'$, $2\varrho'$, so ist entweder

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' \pm \pi(k' + \varrho')$$

oder

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' \pm \pi(k' - \varrho').$$

a) Ist nun $k' > \varrho'$, so ist $k' - \varrho'$ positiv, und nach 3)

$$\sin(\alpha + \beta) = (-1)^{k' \pm \varrho'} . \sin(\alpha' + \beta').$$

Entwickelt man den Sinus auf der rechten Seite nach 9), welches nach 4) erlaubt ist, und beachtet, dass nach 3)

$$\sin \alpha' = \sin(\alpha \mp k'\pi) = (-1)^{k'} \sin \alpha$$
$$\cos \alpha' = \cos(\alpha \mp k'\pi) = (-1)^{k'} \cos \alpha,$$

und ähnliche Ausdrücke für $\sin \beta'$ und $\cos \beta'$ entspringen, so erhält man

$$\sin(\alpha + \beta) = (-1)^{k' \pm \varrho'} . (-1)^{k' + \varrho'} (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta).$$

Da nun das Product $(-1)^{k' \pm \varrho'} . (-1)^{k' + \varrho'}$ entweder $= (-1)^{2(k' + \varrho')}$ oder $= (-1)^{2k'}$, also stets die positive Einheit ist, so bleibt die erste der Relationen 9) richtig.

b) Ist dagegen $k' < \varrho'$, so wird man nur α und β mit einander verwechseln, wobei aber $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ seinen Werth nicht ändert.

II. Sind k, ϱ beide ungerade $= 2k' + 1$, $2\varrho' + 1$, so ist entweder

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' \pm \pi(k' + \varrho' + 1)$$

oder

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' \pm \pi(k' - \varrho');$$

und, wenn $k' - \varrho'$ positiv, nach 3)
entweder

$$\sin(\alpha + \beta) = (-1)^{k' + \varrho' + 1} . \sin(\alpha' + \beta'),$$

oder

$$\sin(\alpha + \beta) = (-1)^{k' - \varrho'} . \sin(\alpha' + \beta').$$

Entwickelt man die Function auf der rechten Seite nach 9), und beachtet, dass nach 6) und 7)

$$\sin \alpha' = \sin\{\alpha \mp \tfrac{1}{2}\pi(2k' + 1)\} = \mp (-1)^{k'} \cos \alpha$$
$$\cos \alpha' = \cos\{\alpha \mp \tfrac{1}{2}\pi(2k' + 1)\} = \pm (-1)^{k'} \sin \alpha,$$

und ähnliche Ausdrücke für sin β' und cos β' entspringen, so folgt, dass, jenachdem man die Vorzeichen in 11) auf einander bezieht oder nicht,
entweder

$$\sin(\alpha+\beta)=(-1)^{k'+\varrho'+1}.(-1)^{k'+\varrho'+1}(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$$

oder

$$\sin(\alpha+\beta)=(-1)^{k'-\varrho'}.(-1)^{k'+\varrho'}(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta),$$

weswegen die erste der Relationen 9) richtig bleibt.

Ist $k'-\varrho'$ negativ, so vertauscht man β mit α, und es ändert sich nichts.

III. Ist k gerade $=2k'$, und ϱ ungerade $=2\varrho'+1$, so ist entweder

$$\alpha+\beta=\alpha'+\beta'\pm\tfrac{1}{2}\pi\{2(k'+\varrho')+1\}$$

oder

$$\alpha+\beta=\alpha'+\beta'\pm\tfrac{1}{2}\pi\{2(k'-\varrho'-1)+1\}$$

oder

$$\alpha+\beta=\alpha'+\beta'\pm\tfrac{1}{2}\pi\{2(\varrho'-k')+1\}.$$

Die erste Gleichung entspringt, wenn man in 11) die obern und untern Vorzeichen auf einander bezieht, die zweite und dritte, wenn dies nicht geschieht, und es findet die erste von den beiden letztern, oder die andere ihre Anwendung, jenachdem $k'>\varrho'$ oder $k'<\varrho'$ ist. Daher ist nach 6) und 7)
entweder

$$\sin(\alpha+\beta)=\pm(-1)^{k'+\varrho'}\cos(\alpha'+\beta')$$

oder

$$\sin(\alpha+\beta)=\pm(-1)^{k'-\varrho'-1}\cos(\alpha'+\beta')$$

oder

$$\sin(\alpha+\beta)=\mp(-1)^{\varrho'-k'}\cos(\alpha'+\beta').$$

Entwickelt man die Function auf der rechten Seite nach 9), und beachtet, dass nach 3)

$$\sin\alpha'=\sin(\alpha\mp k'\pi)=(-1)^{k'}\sin\alpha,$$
$$\cos\alpha'=\cos(\alpha\mp k'\pi)=(-1)^{k'}\cos\alpha,$$

und nach 6) und 7)

$$\sin\beta'=\sin\{\beta\mp\tfrac{1}{2}\pi(2\varrho'+1)\}=\mp(-1)^{\varrho'}\cos\beta,$$
$$\cos\beta'=\cos\{\beta\mp\tfrac{1}{2}\pi(2\varrho'+1)\}=\pm(-1)^{\varrho'}\sin\beta,$$

so ergiebt sich
entweder

$$\sin(\alpha+\beta)=\pm(-1)^{k'+\varrho'}.\pm(-1)^{k'+\varrho'}(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$$

oder

$$\sin(\alpha+\beta) = \pm(-1)^{k'-\varrho'-1} \,.\, \mp(-1)^{k'+\varrho'}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

oder

$$\sin(\alpha+\beta) = \mp(-1)^{\varrho'-k'} \,.\, \mp(-1)^{k'+\varrho'}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta),$$

woraus ersichtlich, dass die erste der Relationen 9) richtig bleibt.

Ist endlich k ungerade und ϱ gerade, so würde nur β mit α zu vertauschen sein, und alles ungeändert bleiben.

Ganz ähnlich kann der Satz für $\cos(\alpha+\beta)$ bewiesen werden, einfacher jedoch auf folgende Weise:

7.

Nach 4) ist $\cos(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\pi)$, welches nach dem bisher bewiesenen allgemeinen Satze $= \sin\alpha\cos(\beta+\frac{1}{2}\pi) + \cos\alpha\sin(\beta+\frac{1}{2}\pi)$, das wiederum nach 4) $= \sin\alpha \,.\, -\sin\beta + \cos\alpha \,.\, \cos\beta$ ist.

Wie daher auch die Bogen α, β beschaffen sein mögen, es ist jederzeit

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Endlich verdient herausgehoben zu werden, was sich aus 5) und 8) ergiebt, nämlich:

$$12)\quad \begin{cases} \sin(\frac{1}{2}\pi-\alpha) = -\sin(\alpha-\frac{1}{2}\pi) = \cos\alpha \\ \cos(\frac{1}{2}\pi-\alpha) = \cos(\alpha-\frac{1}{2}\pi) = \sin\alpha. \end{cases}$$

Da die Bogen $\frac{1}{2}\pi-\alpha$ und α sich complementiren (d. h. zu $\frac{1}{2}\pi$ ergänzen), so folgt, dass Sinus und Cosinus eines Bogens resp. der Cosinus und Sinus des Complementarbogens sind.

XIV.

Eine Bemerkung über den Beweis des Moivreschen Lehrsatzes ohne Hülfe des Imaginären.

Von

Herrn A. Göpel

zu Berlin.

Die Bemühungen, das Imaginäre bei analytischen Deductionen zu umgehen, dürften Manchem als völlig antiquirt und in jene Zeit gehörig erscheinen, wo man das Imaginäre noch eben so sehr, als heutigen Tages die divergenten Reihen, perhorrescirte. Indessen können sie zuweilen durch ausserwissenschaftliche Umstände geboten sein, und aus dieser Rücksicht nimmt die folgende Bemerkung einige Nachsicht in Anspruch.

Lagrange argumentirt zu dem angedeuteten Zwecke in den Leçons sur le calcul des fonctions p. 143 auf diese Art:

Die beiden Reihen

$$2,\ x+\frac{1}{x},\ x^2+\frac{1}{x^2},\ x^3+\frac{1}{x^3},\ \ldots.$$

und

$$2,\ 2\cos\alpha,\ 2\cos 2\alpha,\ 2\cos 3\alpha,\ \ldots.$$

entsprechen einem und demselben recurrenten Gesetz:

$$X_{r+1}=(x+\frac{1}{x})X_r-X_{r-1}$$

und

$$A_{r+1}=2\cos\alpha A_r-A_{r-1},$$

wo X_r und A_r im Allgemeinen beziehlich $x^r+\frac{1}{x^r}$ und $2\cos r\alpha$ bedeuten. Setzt man also $x+\frac{1}{x}=2\cos\alpha$, so werden jene beiden Reihen identisch und man hat $X_r=A_r$, oder $x^r+\frac{1}{x^r}=2\cos r\alpha$. Mit andern Worten, wenn $x^2-2x\cos\alpha+1=0$, so ist auch $x^{2r}-2x^r\cos r\alpha+1=0$, und folglich ist $x^{2r}-2x^r\cos r\alpha+1$ durch $x^2-2x\cos\alpha+1$ theilbar.

Hier ist aber das Imaginäre nur scheinbar vermieden, denn $x+\frac{1}{x}$ kann nicht gleich $2\cos\alpha$ gesetzt werden, weil $2\cos\alpha$ jedenfalls innerhalb der Gränzen -2 und $+2$, dagegen $x+\frac{1}{x}$ immer ausserhalb derselben liegt. Oder besser gesagt, mit dem Setzen von $x+\frac{1}{x}=2\cos\alpha$ ist eben ein Imaginäres gesetzt worden, was doch vermieden werden sollte.

Lagrange würde aber seinen Zweck mittelst einer ganz geringen Abänderung erreicht haben. Wenn man nämlich mittelst jenes recurrenten Gesetzes allmälig X_2, $X_3 \ldots\ldots X_r$ und zwar

$$X_r = p(x+\frac{1}{x})^r + q(x+\frac{1}{x})^{r-1} + \ldots\ldots$$

erhält, so muss man für das allgemeine Glied der andern Reihe A_r ebenfalls

$$A_r = p(2\cos\alpha)^r + q(2\cos\alpha)^{r-1} + \ldots\ldots$$

erhalten, weil es durch eben dasselbe recurrente Gesetz entsteht. Folglich ist

$$X_r - A_r = \quad p\{(x+\frac{1}{x})^r - (2\cos\alpha)^r\}$$
$$+ q\{(x+\frac{1}{x})^{r-1} - (2\cos\alpha)^{r-1}\} + \ldots\ldots$$

Wird nun rechts und links mit x^r multiplicirt, so hat man

$$x^{2r} - 2x^r\cos r\alpha + 1 = \quad p\{(x^2+1)^r - (2x\cos\alpha)^r\}$$
$$+ qx\{(x^2+1)^{r-1} - (2x\cos\alpha)^{r-1}\} + \ldots\ldots,$$

wo auf der rechten Seite jedes Glied durch $(x^2+1)-(2x\cos\alpha)$ theilbar ist, was mithin auch für die linke Seite gilt.

Man erhält auch durch eine theilweise Division:

$$\frac{x^{2r}-2x^r\cos r\alpha+1}{x^2-2x\cos\alpha+1} = \quad x^{2r-2}+1$$
$$+ 2x\cos\alpha\,.\,\frac{x^{2r-2}-2x^{r-1}\cos(r-1)\alpha+1}{x^2-2x\cos\alpha+1}$$
$$- x^2\,.\,\frac{x^{2r-4}-2x^{r-2}\cos(r-2)\alpha+1}{x^2-2x\cos\alpha+1}.$$

Wenn also irgend zwei auf einander folgende Glieder der Reihe

$$Y_0,\ Y_1,\ Y_2,\ Y_3\ \ldots\ldots,$$

wo Y_r allgemein den Ausdruck $x^{2r}-2x^r\cos r\alpha+1$ bezeichnet, durch $x^2-2x\cos\alpha+1$ theilbar sind, so ist es auch das nächste, mithin alle übrigen. Nun ist es aber das erste Y_0, welches

Null ist; und das zweite Y_1, welches $x^2 - 2x \cos a + 1$ selbst ist; folglich ist auch $x^{2r} - 2x^r \cos ra + 1$ durch $x^2 - 2x \cos a + 1$ theilbar.

XV.

Bemerkungen über die Lehre von den geometrischen Progressionen *).

Von

Herrn E. Heis,

Oberlehrer an der höheren Bürger- und Provinzial-Gewerbschule zu Aachen.

Bekanntlich lassen sich, wenn von den fünf Grössen: Anfangsglied a, Endglied t, Anzahl der Glieder n, Exponent e und Summe aller Glieder s einer geometrischen Progression drei gegeben sind, die beiden übrigen leicht finden. Die Lehrbücher der Algebra geben zu den 20 möglichen Aufgaben die Resultate theils direct an, theils stellen sie die Gleichungen auf, deren Wurzeln zur Bestimmung der gesuchten Grössen dienen; so wird zur Bestimmung von e aus a, n, s die Gleichung $e^n - \frac{s}{a}e + \frac{s-a}{a} = 0$, zur Bestimmung von t aus a, n, s, so wie zur Bestimmung von a aus t, n, s die Gleichung $t(s-t)^{n-1} - a(s-a)^{n-1} = 0$, und endlich zur Bestimmung von e aus n, t, s die Gleichung $e^n - \frac{s}{s-t}e^{n-1} + \frac{t}{s-t} = 0$ aufgestellt. Diese drei Gleichungen vom $n$ten Grade enthalten aber jede einen Wurzelwerth, welcher der Gleichung, nicht aber den Forderungen der Aufgabe zukommt. Zur Vereinfachung des Ausdruckes sind nämlich die ursprünglichen Gleichungen vom $(n-1)$ten Grade durch Multiplication mit einem binomischen Factor in Gleichungen vom $n$ten Grade verwandelt worden, erhielten aber eben durch diese Multiplication einen Wurzelwerth, welcher als Antwort auf die gegebene Aufgabe ganz und gar nicht passt. Um e aus a, n, s zu bestimmen dient nun die

*) S. meine Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra, dritte vermehrte Auflage. Köln. 1844. Seite 271.

Gleichung des $(n-1)$ten Grades $e^{n-1}+e^{n-2}+e^{n-3}\ldots+1-\frac{s}{a}=0$, welche auch unter der Form $\frac{e^n-1}{e-1}-\frac{s}{a}=0$ sich darstellen lässt. Multiplicirt man diese letztere Gleichung mit $e-1$, so erhält man die Gleichung $e^n-\frac{s}{a}e+\frac{s-a}{a}=0$ vom $n$ten Grade, welche in den Lehrbüchern gewöhnlich angeführt wird, die aber den Wurzelwerth $e=1$ in sich enthält, welcher in Bezug auf die Forderung der Aufgabe unrichtig ist. Die Gleichung $t(s-t)^{n-1}-a(s-a)^{n-1}=0$ zur Bestimmung von a oder t enthält den Wurzelwerth $t=a$, diese Gleichung ist demnach zu verwerfen und statt ihrer die Gleichung vom $(n-1)$ten Grade $y^{n-1}+y^{n-2}+y^{n-3}\ldots+1-\frac{s}{a}=0$ oder $\frac{y^n-1}{y-1}-\frac{s}{a}=0$ aufzustellen, wo $y=\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$, deren Wurzeln alle den Forderungen genügen. Die Gleichung $e^n-\frac{s}{s-t}e^{n-1}+\frac{t}{s-t}=0$ endlich giebt den Wurzelwerth $e=1$, welcher ebenfalls nur der Gleichung genügt; statt dieser Gleichung vom $n$ten Grade ist daher die Gleichung $e^{n-1}(1-\frac{s}{t})+e^{n-2}+e^{n-3}\ldots+e+1=0$ oder $\frac{e^n-1}{e-1}-\frac{s}{t}e^{n-1}=0$ aufzustellen. In einem ganz besonderen Falle kann zwar $e=1$ und $a=t$ sein, aber alsdann liefert auch die Gleichung vom $(n-1)$ten Grade diese Werthe und die Gleichung vom $n$ten Grade würde diese Werthe doppelt geben.

XVI.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Es ist

$$4a_1a_2=(a_1+a_2)^2-(a_1-a_2)^2$$

und

$$\begin{aligned}24a_1a_2a_3= &\ (a_1+a_2+a_3)^3\\ &-(a_1+a_2-a_3)^3\\ &-(a_1+a_3-a_2)^3\\ &-(a_2+a_3-a_1)^3.\end{aligned}$$

Lassen sich ähnliche Gesetze für Producte mit mehr als drei Factoren angeben?

Wenn die Seiten zweier Dreiecke einander parallel sind, und das eine dieser beiden Dreiecke in, das andere um ein drittes Dreieck beschrieben ist, so ist der Flächenraum dieses letzteren Dreiecks die mittlere Proportionale zwischen den Flächenräumen der beiden ersten Dreiecke.

Zusatz zu den zu beweisenden Sätzen. Thl. V. S. 335. Von Herrn A. Göpel zu Berlin.

1) Von der Reihe

$$\tfrac{1}{2} - \frac{m^2 - 1^2}{2^2} \cdot \tfrac{1}{4} + \frac{(m^2 - 1^2)(m^2 - 3^2)}{2^2 \cdot 4^2} \cdot \tfrac{1}{6} - \ldots.$$

ist für jedes m

die Summe der ersten n Glieder $= \dfrac{(3^2 - m^2)(5^2 - m^2) \ldots (2n-1)^2 - m^2}{2^2 \cdot 4^2 \ldots (2n-2)^2 \cdot 2n}$,

also die Summe sämmtlicher Glieder $= \dfrac{2 \cos \frac{m}{2}\pi}{\pi(1 - m^2)}$.

2) Von der Reihe

$$\tfrac{1}{3} - \frac{m^2 - 2^2}{3^2} \cdot \tfrac{1}{5} + \frac{(m^2 - 2^2)(m^2 - 4^2)}{3^2 \cdot 5^2} \cdot \tfrac{1}{7} - \ldots.$$

ist für jedes m

die Summe der ersten n Glieder

$$= \frac{1}{m^2 - 1} - \frac{1}{m^2 - 1} \cdot \frac{(2^2 - m^2)(4^2 - m^2) \ldots (4n^2 - m^2)}{3^2 \cdot 5^2 \ldots (2n-1)^2 (2n+1)},$$

also die Summe sämmtlicher Glieder $= \dfrac{1 - \frac{1}{m} \sin \frac{m}{2}\pi}{m^2 - 1}$.

3) Wenn m eine gerade Zahl ist, so ist die Summe der Reihe

$$1 + \frac{(-1)^2}{m^2 - 2^2} \cdot 1 - \frac{(-1)^2 \cdot 1^2}{(m^2 - 2^2)(m^2 - 4^2)} \cdot 3$$
$$+ \frac{(-1)^2 \cdot 1^2 \cdot 3^2}{(m^2 - 2^2)(m^2 - 4^2)(m^2 - 6^2)} \cdot 5 - \ldots.$$

bis zu den unendlich werdenden Gliedern fortgesetzt:

$$= \frac{m^2}{m^2-1}\left(1 \pm \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \frac{1.3....m-3}{2.4....m-2.m}\right),$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem $\frac{m}{2}$ gerade oder ungerade is.

Welches ist ihre Summe für ein beliebiges m?

4) Wenn m eine ungerade Zahl, grösser als 1, ist, so ist die Summe der Reihe

$$\frac{1}{m^2-3^2}.2-\frac{2^2}{(m^2-3^2)(m^2-5^2)}.4+\frac{2^2.4^2}{(m^2-3^2)(m^2-5^2)(m^2-7^2)}.6-....$$

bis zu den unendlich werdenden Gliedern fortgesetzt:

$$=\frac{2}{m^2-1} \pm \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \frac{2.4....m-3}{1.3....m-4.m-2},$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem $\frac{m-1}{2}$ gerade oder ungerade ist.

Welches ist ihre Summe für ein beliebiges m?

XVII.

Miscellen.

Académie des sciences de Saint-Pétersbourg.

(Séances des mois de janvier, février et mars 1844.)

Un rapport a été fait à l'Académie sur une découverte faite en météorologie par M. Nervander, professeur à Helsingfors; les auteurs de ce rapport sont MM. W. Struve, E. Lenz et Hess. En voiçi le texte même:

„M. Nervander, professeur à Helsingfors et membre correspondant de l'Académie, vient de lui communiquer, sous forme de lettre, le résultat d'un travail sur la météorologie, qui contient l'exposition d'un phénomène tellement important, et si parfaitement ignoré jusqu'à ce jour, que nous avons cru de notre devoir de recommander à l'attention de l'Académie.

Les travaux météorologiques qui ont rapport aux phénomènes de la chaleur dans notre atmosphère ont été toujours dirigés vers le but de trouver la loi qui régit certaines variations dépendantes d'une cause manifeste, comme par exemple les variations de température qui résultent de la position de la Terre par rapport au Soleil, ou de la rotation de la Terre même autour de son axe. Mais ces lois devaient être déduites de phénomènes variables et constamment modifiés par l'influence de causes perturbatrices qui les faisaient paraître irréguliers. Le moyen dont on s'est servi pour découvrir quelque régularité dans la masse des variations produites par les différentes causes perturbatrices a été, comme on le sait, l'application du principe des grands nombres. Pour appliquer ce principe, on distribue les observations en groupes qui embrassent une période déterminée, comme par exemple un jour, une année.

On prend alors la moyenne des observations correspondantes au même mois ou à la même heure, selon la durée de la période. En se servant d'un grand nombre de groupes, les variations irrégulières se détruisent réciproquement, et il ne reste plus d'apparent que les variations essentielles provenant des causes qui agissent dans le même sens. Dans cette sorte de recherches, qui ont pour but la marche de la chaleur pendant une période d'un jour ou d'une année, on est toujours sûr de parvenir à un résultat déterminé; car il ne peut y avoir aucun doute sur l'existence de la période. La loi ou la marche cherchée de la température une fois déterminée, on est convenu de considérer comme des irrégularités toute déviation de cette marche indiquée par les observations isolées. Personne ne pouvait cependant douter que ces irrégularités elles mêmes ne fussent la conséquence nécessaire de causes déterminées, comme il en est pour le phénomène dont la régularité a été reconnue. Les autres phénomènes ne nous paraissent irréguliers que par l'ignorance où nous sommes, tant de causes aux quelles il faut les attribuer que, par conséquent aussi, des périodes qui suivent ces irrégularités. On voit par-là qu'il n'y a d'autre moyen de parvenir à cette connaissance que celui de soumettre les différents phénomènes de périodicité que présente notre système solaire à un examen comparé avec les variations que présentent les phénomênes de la chaleur, déterminées par de bonnes expériences. Mais on voit aussi que cette voie pour parvenir au but est très laborieuse, et il est d'autant plus difficile de se résoudre à la suivre, qu'il est impossible de prévoir si, parmi toutes ces recherches, il en existe réellement une qui doive être couronnée de succès.

Quoi qu'il en soit, c'est le seul mode de procéder que nous offre la science. D'autant plus grande est notre satisfaction en voyant se vouer à ce travail un physicien aussi consciencieux et d'une perspicacité aussi reconnue que l'est M. Nervander, et nous nous félicitons sincèrement de voir ces recherches couronnées d'un succès aussi évident que celui qui résulte du présent travail..

M. Nervander avait découvert antérieurement, par une recherche sur le temps de la debâcle de quelques rivières, que ces époques manifestaient une périodicité de sept ans qui se reproduisait avec une assez grande régularité. Supposant que cette période devrait se retrouver dans la marche des températures, il tâcha de la rendre évidente en groupant les observations par périodes de sept ans. Cela le conduisit à examiner la période d'une révolution

du Soleil autour de son axe. Le temps de cette révolution, pour un observateur placé au centre de la Terre, ou le temps de la rotation géocentrique, a été fixé en dernier lieu par M. Laugier à 27, 23 jours. M. Nervander ordonne les observations thermométriques de Paris en groupes d'après cette période, et obtient pour résultat, qu'il existe réellement une période semblable pour les températures. La durée n'en était pourtant pas absolument la même; en la modifiant jusqu'à ce que la périodicité se manifestât de la manière la plus prononcée par les températures, il obtînt une durée de 27,26 jours. Cette durée approche beaucoup de celle trouvée par M. Laugier, et si l'on considère que la détermination de cette durée au moyen d'observations astronomiques laisse toujours une incertitude à cause de la mobilité des taches du Soleil, on ne peut hésiter à admettre pour la durée de la rotation du Soleil le nombre fourni par le meilleur accord des observations météorologiques.

Nous voyons donc, pour la première fois, ce fait remarquable qu'un phénomène appartenant à notre système solaire a été déterminé, par la météorologie, la plus vague des sciences physiques, avec une précision plus grande que celle qu'il ait été possible d'atteindre par des observations astronomiques.

La superficie du Soleil offre donc des endroits qui émettent plus ou moins de chaleur, de manière que, selon le coté, que nous présente le Soleil, la Terre en reçoit plus ou moins de chaleur, et que pendant la durée de notre été la marche de la température est soumise, à la surface de la Terre, au moins deux fois à un abaissement. La limite de cette variation est de 0°,6 C. Mais ce qui prouve que le résultat obtenu n'est pas dû à une cause fortuite, mais à une cause bien déterminée, c'est:

„1. Que les observations de Paris et les observations faites pendant 50 ans à Inspruck donnent la même marche périodique.

2. Que la première moitié des observations d'Inspruck, calculée de la même manière que la seconde moitié, offre le même résultat.

3. Que si l'on combine ensemble les premiers semestres de chaque année, et de même les seconds semestres de chaque année, ils conduisent encore à la même marche périodique.

L'importance du résultat obtenu pour la science météorologique est évidente, et il ne nous reste qu'à émettre le voeu de voir cette découverte publiée par M. Nervander dans tous ses détails. Nous désirons le voir étendre ses recherches à d'autres périodes; toutefois il serait indispensable qu'on lui fournit les moyens nécessaires pour éviter, dans un travail de cette importance, cette partie fastidieuse et purement mécanique, mais néanmoins absolument indispensable, comme l'arrangement et la copie des nombres, leur sommation etc."

Satz vom Trapezium.

(Von Herrn Lebelin, élève du collège de Dijon.)

In Taf. I. Fig. 5. sei $ABCD$ ein Trapezium mit den beiden parallelen Seiten AB und CD, und E sei der Durchschnittspunkt seiner beiden Diagonalen. Zieht man von E aus mit AC und BD die Parallelen EF und EF_1, so sind die Dreiecke ABC, CEF und ACD; DEF einander ähnlich, und man hat also die folgenden Proportionen:

$$AB : AC = CF : EF,$$
$$AC : CD = EF : CD - CF;$$

aus denen sich nach einem bekannten Satze

$$AB : CD = CF : CD - CF,$$

also

$$AB : AB + CD = CF : CD,$$

folglich

$$CF = \frac{AB . CD}{AB + CD}$$

ergiebt. Ganz eben so ist

$$DF_1 = \frac{AB . CD}{AB + CD}.$$

Also ist $CF = DF_1$, und zugleich sieht man hieraus, dass, so lange die Grösse der beiden parallelen Seiten des Trapeziums sich nicht ändert, wie sich auch die beiden anderen Seiten desselben ändern mögen, die einander gleichen Linien CF und DF_1 constant sind.

Führt man den gefundenen Werth von CF in die Proportion

$$AB : AC = CF : EF$$

ein, und bestimmt EF, so erhält man:

$$EF = \frac{AC . CD}{AB + CD},$$

und ganz eben so ist

$$EF_1 = \frac{BD . CD}{AB + CD}.$$

Also ist

$$EF + EF_1 = CD . \frac{AC + BD}{AB + CD}.$$

Aus allem Vorhergehenden ergiebt sich der folgende Satz:

Der geometrische Ort der Durchschnittspunkte der Diagonalen aller über derselben Grundlinie beschriebenen Trapeze, deren der Grundlinie parallele Seite constant ist, und deren beide anderen Seiten eine constante Summe haben, ist eine Ellipse.

Die Brennpunkte und die Hauptaxe dieser Ellipse sind nach dem Obigen leicht zu bestimmen.

Satz vom regulären Octaeder.

(Von Abélard Servedieu Lévy *). Bewiesen von Herrn H. Breton.)

Wenn der körperliche Winkel S (Taf. I. Fig. 6.) eines regulären Octaeders von einer beliebigen Ebene $A'B'C'D'$ geschnitten wird, so ist immer

$$\frac{1}{SA'}+\frac{1}{SC'}=\frac{1}{SB'}+\frac{1}{SD'}.$$

Beweis. Die zu beweisende Relation wird bewiesen sein, wenn man die Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{SA'+SC'}{SA'.SC'}=\frac{SB'+SD'}{SB'.SD'},$$

oder die Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{SA'.SC'}{SA'+SC'}=\frac{SB'.SD'}{SB'+SD'}$$

beweisen kann. Nun überzeugt man sich aber leicht, dass die Grössen auf den beiden Seiten des Gleichheitszeichens die Seiten der in die rechtwinkligen Dreiecke $A'SC'$ und $B'SD'$ so beschriebenen Quadrate, dass ein Winkel dieser Quadrate mit den rechten Winkeln $A'SC'$ und $B'SD'$ zusammenfällt, ausdrücken. Daher kommt der Beweis darauf zurück, die Gleichheit dieser beiden Quadrate zu beweisen, was leicht auf folgende Art geschehen kann. Die Linie SO, welche als die Durchschnittslinie der Ebenen ASC und BSD nothwendig durch den Durchschnittspunkt O' der Diagonalen des Vierecks $A'B'C'D'$ gehen muss, halbirt die rechten Winkel ASC und BSD. Also halbirt die Linie SO' die rechten Winkel der Dreiecke $A'SC'$ und $B'SD'$. Da nun aber die Diagonale eines auf die oben näher bezeichnete Weise in ein rechtwinkliges Dreieck beschriebenen Quadrats den rechten Winkel dieses Dreiecks offenbar halbiren muss, so ist SO' sowohl die Diagonale des in das rechtwinklige Dreieck $A'SC'$, als auch die Diagonale des in das rechtwinklige Dreieck $B'SD'$ auf die angegebene Art beschriebenen Quadrats, und diese beiden Quadrate haben folglich gleiche Diagonalen, sind also einander gleich, w. z. b. w.

---

*) A. S. Lévy, geboren den 14ten November 1795 zu Paris, war, nachdem er sich lange in England und Belgien aufgehalten, zuletzt Professor der Mathematik am Collége Charlemagne zu Paris, und starb am 21sten Juni 1841, wegen seiner Kenntnisse, seines ausgezeichneten Lehrtalents und seines trefflichen Charakters allgemein geachtet.

Berichtigung.

In meinem Aufsatze No. VIII. in diesem Hefte bitte ich S. 51. unten und S. 52. oben die, eine Unrichtigkeit enthaltenden, Worte von „Nun ist aber offenbar $u<2$, $v>\sqrt{2}$, $w>\sqrt{2}$, u. s. w. bis und folglich um so mehr $-u+v+w+x>2$, d. i. $X>2$" zu streichen, und dafür Folgendes zu setzen.

Nun ist aber offenbar $A_1E=x$ als die Sehne von $\frac{1}{34}$ der Peripherie kleiner als die Seite des regulären 32ecks, und $A_1D=w$, als die Sehne von $\frac{9}{34}$ der Peripherie, kleiner als die Seite des regulären 3ecks. Die Seite des 32ecks ist bekanntlich

$$\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})})}=0{,}1960343$$

und die Seite des 3ecks ist

$$\sqrt{3}=1{,}7320508.$$

Daher ist

$$w<1{,}7320508 \text{ und } x<0{,}1960343$$

also $w+x<1{,}9280851$, d. i. $w+x<2$, und folglich, weil offenbar $-u+v$ negativ ist, um so mehr $-u+v+w+x<2$, d. i. $X<2$.

Man kann dies aber auch auf folgende Art zeigen. Wenn AB (Taf. I. Fig. 7.) die Seite des 10ecks und AD die Seite des 30ecks ist, so ist in dem Dreiecke ADF, wie man leicht findet, $\angle ADF = \angle AFD = 84^\circ$, also $AD=AF$ und folglich offenbar die Seite des 30ecks kleiner als die Hälfte der Seite des 10ecks. Also ist um so mehr x, als die Sehne von $\frac{1}{34}$ der Peripherie, kleiner als die Hälfte der Seite des Zehnecks, d. i.

$$x<\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Ferner ist w, als die Sehne von $\frac{9}{34}$ der Peripherie, kleiner als die Sehne von $\frac{3}{10}$ der Peripherie. Da nun bekanntlich $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ die Seite des Fünfecks ist, so ist

$$\sqrt{(4-\frac{5-\sqrt{5}}{2})}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

die Sehne von $\frac{3}{10}$ der Peripherie, also

$$w<\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Weil aber offenbar $u<2$, $v<2$ ist, so ist

$$uvwx<2.2.\frac{\sqrt{5}+1}{2}.\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \text{ d. i. } uvwx<2,$$

und folglich der absolute Werth von Z kleiner als 2. Für $X=2$ ist aber $Y=-2$, also $Z=-3$, nach der dritten der Gleichungen 11), was gegen das Vorhergehende streitet.

XVIII.

Berechnung des Körperinhaltes der Prismen.

Von dem

Herrn Professor W. Matzka

an der k. k. philosophischen Lehranstalt zu Tarnow in Galizien.

Die Herleitung des Ausdrucks für den Körperinhalt der Prismen, wie sie in den mir bekannten Lehrbüchern gegeben wird, vermag durchaus nicht mich zufrieden zu stellen, weil die ihr zu Grunde liegende Untersuchung, unter was für Bedingungen Prismen gleich sind, überall mehr oder weniger mühselig durch allerhand particuläre Fälle und Verwandlungen sich hindurchzieht, und die Beweise der Proportionalität der Prismen entweder nur obenhin oder gegentheilig schleppend gegeben werden. Ich will hier zeigen, wie sich diesem Mangel der Stereometrie gründlich abhelfen lässt, und zwar nach zwei Verfahren, von denen das erstere neu und entschieden kürzer ist, und das zweite mehr an das übliche sich anschliesst.

Erstes Verfahren.

A. Vergleichung der Prismen.

§ 1. *Hauptlehrsatz.* *I.* Prismen von gleichen Seiten und *congruenten* Querschnitten*) sind gleich.

Beweis. Man erweitere die (prismatischen) Seitenflächen der Prismen $ACEace$ und $A'C'E'a'c'e'$ (Taf. II. Fig. 1.), führe ganz ausserhalb der Prismen Querschnitte, und bringe diese, da sie

*) Die Durchschnittsfigur einer Ebene, welche eine, also auch sämmtliche Seiten einer prismatischen Fläche oder eines Prisma schneidet, nenne ich kurz einen Querschnitt oder Schrägschnitt, je nachdem die Ebene auf den Seiten senkrecht oder schief (schräg) steht.

der Annahme gemäss congruent sind, dergestalt mit einander überein, dass die Prismen selbst auf verschiedene Seiten dieses gemeinschaftlichen Querschnittes $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ zu stehen kommen. Dann fallen, weil in einem Punkte auf einer Ebene nur eine einzige Gerade senkrecht sein kann, die auf dem gemeinsamen Querschnitte senkrechten Seiten, also auch die durch sie gehenden Seitenebenen und sofort selbst die prismatischen Seitenflächen der Prismen überein; und es entstehen zwei, im Allgemeinen, nicht parallel abgeschnittene Prismen $ACEA'C'E'$ und $acea'c'e'$, deren Congruenz sich leicht nachweisen lässt.

Denn 1) weil die Seiten, Aa und $A'a'$, der Prismen gleichlang vorausgesetzt worden sind, müssen, wenn man zu jeder von zweien in einerlei Geraden liegenden solchen Seiten, wie Aa und $A'a'$, das zwischen ihnen befindliche Stück aA' addirt, die als Summen entstehenden Seiten, AA' und aa', welche in einerlei Geraden liegen, einander gleich sein; also $AA'=aa'$ und ebenso $BB'=bb'$, $CC'=cc'$,.... Ferner sind 2) die parallelen Grundkanten der ursprünglichen Prismen gleich, wie $AB=ab$, $Bc=bc$, ..., $A'B'=a'b'$, $B'C'=b'c'$;..... Daher sind 3) in den nicht parallel abgeschnittenen Prismen $ACEA'C'E'$ und $acea'c'e'$ die Seiten- und Grundkanten, paarweise verglichen, gleich gerichtet und gleichlang; mithin müssen auch die Winkel jedweder zwei Paar gleichgerichteter Kanten gleich sein, wie $ABB'=abb'$, $B'BC=b'bc$, $ABC=abc$,.... Endlich 4) sind an ihnen auch die Winkel der gleichgestreckten Ebenen gleich, wie die Grundkantenwinkel an AB und ab, und wie die Seitenkantenwinkel an AA' und aa'. Denkt man sich daher die beiden nicht parallel abgeschnittenen Prismen $ACEA'C'E'$ und $acea'c'e'$ dergestalt zu einander gebracht, dass zwei gleiche Kanten, AA' und aa', und ihre gleichen Kantenwinkel überein fallen; so kommen auch die, diese Kanten bildenden Seitenebenen und die an den Grenzpunkten derselben befindlichen Ecken, wie jene an A und a, an A' und a', und überhaupt jeden zwei parallel gestellten Ecken, mit einander überein; ein solches Prisma $acea'c'e'$ wird gleichsam zwischen der sie beide einhüllenden prismatischen Fläche $Ab'Cd'Ea'$, um die Länge einer Seite Aa oder $A'a'$ der ursprünglichen Prismen, von a nach A geschoben und füllt sonach das andere Prisma $ACEace$ ganz aus. Weil nun in dieser Lage der nicht parallel abgeschnittenen Prismen $ACEA'C'E'$ und $acea'c'e'$ jedweder Unterschied zwischen ihnen aufgehoben erscheint, so sind sie congruent. — Zieht man demnach von denselselben das ihnen gemeinschaftliche eben solche Prisma $aceA'C'E'$, oder sie selbst von dem ganzen Prisma $ACEa'c'e'$ ab; so müssen die Reste, welche eben jene mit einander zn vergleichenden ursprünglichen Prismen $ACEace$ und $A'C'E'a'c'e'$ sind, gleich gross sein.

§. 2. *Lehrsatz. II.* Prismen von gleichen Seiten und Querschnitten sind gleich.

Beweis. Können die gleichen Querschnitte

1) entweder als Aggregate oder als Unterschiede congruenter Vielecke dargestellt oder dadurch erzeugt werden, dass einige stückweise congruente Vielecke vereint und andere davon abgetrennt werden; so lege man durch die Geraden, welche die gleichen Querschnitte als Zusammensetzungen oder Ueberreste

congruenter Vielecke vorstellen, Ebenen zu den Seiten der Prismen parallel, bis sie in die, wo nöthig erweiterten, Grundebenen einschneiden. Dann erscheinen auch die Prismen selbst auf die nemliche Weise als Summen oder Reste von gleichlangen Prismen mit congruenten Querschnitten, also vermöge §. 1. von gleichgrossen Prismen, und sind daher gleich.

2) Sind die Querschnitte Dreiecke oder Parallelogramme, folglich die Prismen dreiseitig oder Parallelepipede, und haben die Querschnitte a) eine Seite gleich, also wegen ihrer eigenen Gleichheit auch die, der Seite als Grundlinie angehörige, Höhe gleich; so können sie bekanntlich leicht als Summen oder Differenzen congruenter Dreiecke oder Trapeze vorgestellt werden*), daher sind die Prismen, vermöge 1), einander gleich. Haben aber b) die als Querschnitte vorkommenden zwei gleichen Dreiecke oder Parallelogramme keine Seite gleich; so kann man zur Hilfe ein drittes Dreieck oder Parallelogramm construiren, welches beiden gleicht und mit jedem eine Seite gleich hat.**) Bildet man dann über diesem als Querschnitt ein eben so langes Prisma wie die zwei verglichenen; so sind diese einzeln, vermöge a), ihm gleich, also auch einander selbst gleich.

3) Sind die Querschnitte der Prismen Vielecke, die sich in einder verwandeln lassen; so können sie nicht bloss, wenn durch solche Verwandlung zunächst nur eine Seite weggebracht wird, sondern auch, weil dies sich wiederholt, ganz allgemein als Summen oder Unterschiede theils von congruenten Vielecken, theils von gleichen Dreiecken oder Parallelogrammen dargestellt werden. Mithin sind auch die Prismen selbst gleich, da sie als eben solche Summen oder Unterschiede von Prismen die vermöge 1) und 2) gleich sind, sich vorstellen lassen.

4) Seien endlich die gleichgrossen Querschnitte Q, Q' zweier gleichlanger Prismen P, P' was immer für Vielecke von gleich- oder ungleichviel Seiten. Man denke sich diese gleichen Querschnitte nach und nach in Dreiecke oder Parallelo-

---

*) Für Parallelogramme ersieht man dies aus den gewöhnlichen Lehrbüchern nach Euklid. Elem. I. 35, oder einfacher nach Leslie aus Vega's Vorles. über Math. 7. Aufl. verbessert v. Matzka. 2. Bd. §. 389; für Dreiecke aus Gerwien's sinnreicher Zertheilung gleicher Dreiecke in congruente Stücke, in Crelle's Journal Bd. X. S. 228, oder im Archiv. 4. Theil. S. 237.

**) Diese planimetrische Hilfsaufgabe lässt sich wie folgt einfach lösen.

Denkt man sich (Taf. II. Fig. 2) zu dem einen Parallelogramm $ABCD$ das gleiche so gebracht, dass eine Spitze A derselben übereinfalle, eine Seite Ab längs der anderen AB liege und das Parallelogramm selbst zum Theil auf das erstere in die Lage $Abcd$ komme, so müsste Ab und AB ungleich sein. Sei Ab die kleinere; dann muss das über ihr zwischen den nemlichen Parallelen AB und CD wie $ABCD$ liegende Parallelogramm $Ab\mathfrak{cd} < ABCD$, also auch $< Abcd$ sein, folglich die aus A ausgehende Seite Ad die CD in $\mathfrak{d}$ schneiden. Der um A mit dem Halbmesser Ad beschriebene Kreisbogen schneidet demnach die CD in zwei Punkten, von denen einer δ. Führt man nun die $A\delta$, welche $= Ad$, und $B\gamma \parallel A\delta$, so ist $AB\gamma\delta$ das geforderte Parallelogramm; denn es ist $= ABCD$, daher auch $= Abcd$, und hat mit jenem die Seite AB und mit diesem die Seite $Ad = A\delta$ gleich.

gramme q, q' verwandelt, die demnach ebenfalls gleich werden müssen, und stelle sich über diesen dreiseitigen oder parallelogrammischen Querschnitten q, q' eben so lange Prismen p, p' vor. Dann ist vermöge 3), wegen $q=Q$ und $q'=Q'$, auch $p=P$ und $p'=P'$. Allein wegen $q=q'$ ist nach 2) auch noch $p=p'$, daher muss auch $P=P'$ sein.

Der behauptete Lehrsatz gilt demnach völlig allgemein.

B. Proportionalität der Prismen.

§. 3. *Lehrsatz. I.* Prismen von gleichen Seiten sind ihren Querschnitten direct proportional.

Beweis. Man denke sich zwei den Querschnitten Q, q der gleichlangen Prismen P, p congruente oder gleiche Vielecke Q', q' mit einer Seite oder einem Theil derselben an und neben, jedoch ganz ausser einander gelegt, so dass sie, wenn man diese gemeinschaftliche Seite auslässt, zusammen ein Vieleck $=Q'+q'$ ausmachen. Nimmt man nun dieses Vieleck zum Querschnitt eines eben so langen Prisma, so muss der durch die wiederhergestellt gedachte gemeinsame Seite gehende Diagonalschnitt das Prisma in zwei Prismen P', p' von den Querschnitten Q', q' zertheilen, welche den Prismen P, p gleich sein müssen, weil sie mit diesen die Querschnitte und Seiten gleich oder congruent haben. Das den Querschnitt $Q'+q'=Q+q$ enthaltende Prisma $P'+p'$ ist also $=P+p$, d. h. zur Summe der Querschnitte Q, q gehört bei gleichen Seiten die Summe der zugehörigen Prismen P, p; mithin sind die gleichlangen Prismen ihren Querschnitten direct proportionirt, nemlich $P:p=Q:q$. *)

§. 4. *Lehrsatz II.* Prismen von gleichen Querschnitten sind ihren Seiten direct proportional.

Beweis. Seien P, p irgend zwei Prismen von gleichen Querschnitten, und S, s ihre Seiten. Man denke sich eine prismatische Fläche von einem eben so grossen Querschnitte, auf ihrer unbestimmt langen Seite die Seiten S und s nach einander abgetragen, folglich in ihre Summe $S+s$ vereint, und endlich durch die erhaltenen drei Auftragepunkte parallele Ebenen geführt. Dadurch erhält man an der Seite $S+s$ ein Prisma, das aus zwei Prismen besteht, welche den Prismen P und p einzeln gleich sind, weil sie mit ihnen Querschnitt und Seite gleich haben, und das daher $=P+p$ ist. Zur Summe jeder zwei Seiten gehört dem-

---

*) Diese kurze und gründliche Beweisführung über die directe Proportionalität zweier zusammengehöriger Gattungen von Grössen scheint den mathematischen Schriftstellern und Lehrern nur wenig bekannt zu sein, da ich sie bloss in La Place Mécanique céleste. vol. 1. pag. 15 angedeutet und in Dr. Jos. Knar's, Prof. der Mathematik an der Grätzer Universität, Anfangsgründen der reinen Mathematik, 2 Theile. Arithmetik und Geometrie. Grätz, bei Damian und Sorge. 1829, im §. 528 des 1. Theils erwiesen, und in den §§. 260, 261, 399, 670, 671 des 2. Theils angewendet finde. Dieses kleine österreichische, ja sogar nur steyerische, Werkchen übertrifft, besonders in der Gründlichkeit und Systematik der Behandlung seines Gegenstandes, sehr viele derartige Schriften, und verdient daher mehr gekannt und nachgeahmt zu werden.

nach bei gleichen Querschnitten die Summe der zugehörigen Prismen; mithin sind Prismen von gleichen Querschnitten ihren Seiten direct proportional, nemlich $P:p=S:s$.

§ 5. *Hauptlehrsatz.* Prismen überhaupt sind ihren Querschnitten und Seiten zusammengesetzt direct proportional; oder: Prismen überhaupt stehen im zusammengesetzten geraden Verhältnisse ihrer Querschnitte und Seiten.

Denn sie sind, nach §. 3., bei gleichen Seiten, ihren Querschnitten, und nach §. 4., bei gleichen Querschnitten, ihren Seiten direct proportional, daher *) überhaupt ihren Querschnitten und Seiten zusammengesetzt direct proportional.

Haben demnach die Prismen P, p die Querschnitte Q, q und die Seiten S, s, so ist

$$P : p = \left.\begin{matrix} Q : q \\ S : s \end{matrix}\right\}$$

§. 6 *Folgesatz.* Prismen überhaupt verhalten sich zu einander wie die Producte der Zahlwerthe **) ihrer Querschnitte und Seiten.

Denn behält man wie üblich die gewählte Bezeichnung der Querschnitte und Seiten auch für ihre Zahlwerthe bei, so gilt die angesetzte Proportion, da man in jedem Verhältnisse von (gleichartigen) Grössen anstatt dieser ihre (auf einerlei Messeinheit bezogenen) Zahlwerthe einsetzen darf, auch jetzt noch. Da aber lassen sich die beiden Zahlenverhältnisse durch Multiplication zusammensetzen, und man erhält die behauptete Proportion

$$P : p = QS : qs.$$

C. Messung des Raumes eines Prisma.

§. 7. *Körpereinheit.* Zur Messeinheit der Körper setzt man gewöhnlich ein Prisma fest, dessen Seite die Einheit der Längen und dessen Querschnitt die Einheit der Flächen ist. Fast durchgehends nimmt man dazu den Würfel, dessen Seite die Längeneinheit ist, oder die sogenannte cubirte Längeneinheit.

§ 8. *Messung oder Ausdruck des Inhalts der Prismen.* Der Rauminhalt eines Prisma gleicht dem Producte der Zahlwerthe des Querschnittes und der Seite desselben.

Denn lässt man in der letzten Proportion die Zeichen der Räume der Prismen, wie es erlaubt ist, auch die Zahlwerthe, die Raum- oder Körperinhalte, der Prismen vorstellen, und nimmt man jenes Prisma zur Körpereinheit, also seinen Zahl-

*) nach Knar Arithmetik §. 532.

**) gewöhnlich, jedoch grammatisch unrichtig, Zahlenwerthe, und wohl eigentlich Werthzahlen?

werth $P=1$, dessen Querschnitt den Zahlwerth $Q=1$ und die Seite den Zahlwerth $S=1$ hat: so geht diese Proportion in

$$1 : p = 1.1 : qs$$

über, und daraus folgt $\qquad p = qs.$

D. Einführung der Grundebene und Höhe der Prismen.

§. 9. *Leitender Lehrsatz.* **In jedem Prisma verhält sich der Querschnitt zur Grundebene wie die Höhe zur Seite; oder: In jedem Prisma ist das Product aus den Zahlwerthen des Querschnittes und der Seite gleich dem Producte aus den Zahlwerthen der Grundebene und Höhe.**

Denn führt man, da in einer prismatischen Fläche alle parallelen Schnitte congruent ausfallen müssen, in einem Prisma $ACca$ (Taf. II. Fig. 3.) den Querschnitt $\alpha\beta\gamma\delta$, so dass er eine Grundebene desselben, $ABCD$, in der Geraden KL schneidet; so ist er jederzeit die (winkelrechte) Projection jeder Grundebene auf einer auf den Seiten des Prisma senkrechten (Projections-) Ebene. Projicirt man nun auf die Durchschnittslinie der Grundebene und ihrer Projection — des Querschnittes — sämmtliche ihrer Spitzen; so haben die Spitzen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des Querschnittes mit denjenigen Spitzen A, B, C, D der Grundebene, deren Projectionen sie sind, einerlei Projectionen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, und die Projicienden $\alpha\mathfrak{a}, \beta\mathfrak{b}, \gamma\mathfrak{c}, \delta\mathfrak{d}$ der ersteren Spitzen sind selbst die Projectionen der Projicienden $A\mathfrak{a}, B\mathfrak{b}, C\mathfrak{c}, D\mathfrak{d}$ der letzteren Spitzen auf der Ebene des Querschnittes. — Durch diese Projicirenden werden beide Vielecke in einerlei Weise als Aggregate oder Unterschiede theils von rechtwinkligen Dreiecken, theils von rechtwinkligen Trapezen dargestellt. Jedes solche Bestandstück des Querschnittes, wie $E\mathfrak{a}\alpha$, $\mathfrak{a}\alpha\delta\mathfrak{d}$, ist zugleich die Projection des analogen Bestandstückes $E\mathfrak{a}A$, $\mathfrak{a}AD\mathfrak{d}$ der Grundebene, mit dem es in der Durchschnittslinie KL eine Seite gemein hat. Daher verhält sich jedes rechtwinklige Dreieck $E\mathfrak{a}A$ der Grundebene zu seiner Projection $E\mathfrak{a}\alpha$, wie seine projicirte Kathete $\mathfrak{a}A$ zu ihrer Projection $\mathfrak{a}\alpha$; und jedes rechtwinklige Trapez $\mathfrak{a}AD\mathfrak{d}$ der Grundebene verhält sich zu seiner Projection $\mathfrak{a}\alpha\delta\mathfrak{d}$ wie die Summe $\mathfrak{a}A+\mathfrak{d}D$ seiner parallelen Seiten zur Summe $\mathfrak{a}\alpha+\mathfrak{d}\delta$ ihrer Projectionen. — Allein diese projicirten Seiten der Stücke der Grundebene bilden mit ihren Projectionen, mit denen sie insgesammt auf der Durchschnittslinie KL der Grundebene und des Querschnittes senkrecht sind, den spitzen Winkel dieser zwei Ebenen; mithin auch den spitzen Winkel jeder zwei auf diesen Ebenen senkrechten Geraden, wie der Höhe AH mit einer Seite Aa des Prisma, deren Projection sie ist. Ferner sind unter einerlei Winkel projicirte Geraden ihren Projectionen proportional. Mithin: so wie sich die Seite Aa des Prisma zu dessen Höhe AH, ihrer Projection, verhält, eben so verhält sich jede projicirte Seite jeglichen Stückes der Grundebene — oder beziehlich jede Abtheilungslinie der Grundebene — zu ihrer Projection; daher auch, dem Obigen gemäss, jedes Stück (rechtwinkliges Dreieck oder Trapez) der Grundebene zu seiner Projection auf dem Querschnitt; mithin

verhält sich auch eben so die ganze Grundebene $ABCD$ zu ihrer Projection, dem Querschnitt $\alpha\beta\gamma\delta$; nemlich $Aa:AH = ABCD:\alpha\beta\gamma\delta$, oder auch $\alpha\beta\gamma\delta:ABCD = AH:Aa$.

Bezeichnet man nun den Zahlwerth (Flächeninhalt) des Querschnittes mit q, jenen der Grundebene mit b, dann den Zahlwerth (die Länge) der Höhe mit a und jenen der Seitenkante mit s; so gibt diese Proportion, durch Einführung der Zahlwerthe ihrer Glieder, die folgende $q:b = a:s$, daher die Gleichung

$$qs = ab.$$

§. 10. *Gewöhnlicher Ausdruck des Rauminhaltes der Prismen.* Der Rauminhalt eines Prisma gleicht dem Producte der Zahlwerthe der Grundebene und der Höhe.

Denn vermöge §. 8. ist des Prisma Rauminhalt $p = qs$, und nach §. 9. das Product $qs = ab$, daher auch $p = ab$.

Zweites Verfahren.

A. Vergleichung der Prismen.

§. 1. *Hauptlehrsatz. I.* Wie oben im ersten Verfahren. §. 1.

§. 2. *Lehrsatz. II.* Parallelepipede von gleichen Grundebenen und Höhen sind gleich.

Beweis. 1) Haben die Parallelepipede $ACEG$ und $aceg$ (Taf. II. Fig. 4^α u. 4^β) auch noch die Grundkanten AB und ab, und daran die Kantenwinkel gleich; so sehe man sie als Prismen an, deren Seiten diese gleichen Kanten und deren Grundebenen die von ihnen geschnittenen Begrenzungsebenen AH, BG und ah, bg sind, und führe auf denselben Seiten senkrecht die Querschnitte $KLMN$ und $klmn$, endlich noch aus den gleichliegenden Spitzen N und n die nothwendig in die Ebenen der Querschnitte fallenden Höhen NP und np, weil jene Ebenen und diese Geraden durch einerlei Punkt gehend auf den (ursprünglichen) Grundebenen AC, ac zugleich senkrecht stehen. — Diese Querschnitte nun sind, als Schnitte in parallelepipedischen Flächen, Parallelogramme und aus folgenden Gründen einander congruent. Die Winkel an K, k sind, weil ihre Ebenen, also auch ihre Schenkel, auf den Kanten AB, ab senkrecht stehen, die Winkel an diesen Kanten, also der Annahme gemäss gleich; daher haben die Parallelogramme sämmtliche Winkel stückweise gleich. Die nach der Voraussetzung gleichen Höhen NP, np sind auf den Grundebenen AC, ac senkrecht, folglich auch auf den durch ihre Fusspunkte gehenden Geraden KL und kl dieser Ebenen, und sonach an P und p rechte und desswegen gleiche Winkel. In den Dreiecken NPK und npk sind demnach $NP = np$, $K = k$, $P = p$, nemlich eine Seite und zwei Winkel gleich; daher sind sie selbst congruent und die Seite $KN = kn$. Endlich sind die auf den Seiten oder Grundlinien AB, ab der Parallelogramme AC, ac senk-

rechten Geraden *KL*, *kl* die Höhen dieser Parallelogramme. Dieselben Parallelogramme *AC*, *ac* sind aber die nach der Annahme gleichen Grundebenen der Parallelepipede, und haben der Voraussetzung gemäss die Grundlinien *AB*, *ab* gleich; also müssen sie auch die Höhen *KL*, *kl* gleich haben. Mithin sind in den parallelogrammischen Querschnitten *KM*, *km* zwei zusammenstossende Seiten *KL*, *KM* und *kl*, *km* einander gleich; daher, weil nach dem Früheren auch alle ihre Winkel stückweise gleich sind, müssen diese Parallelogramme und respective Querschnitte *KM* und *km* selbst congruent sein. — Die parallelepipedischen Prismen *AHBG*, *ahbg* haben demnach vermöge der Voraussetzung die Seiten *AB*, *ab* gleich, und nach dem Erwiesenen die Querschnitte *KM*, *km* congruent; mithin sind sie, zu Folge §. 1., einander gleich.

2) Haben die Parallelepipede *ACEG* und 𝔞𝔠𝔢𝔤 (Taf. II. Fig. 4^{α} u. 4^{γ}) die Grundebenen *AC*, 𝔞𝔠 und die Höhen gleich, ohne dass der vorher in 1) betrachtete Fall eintritt: so construire man e r s t e n s zu den zwei gleichen Parallelogrammen *AC*, 𝔞𝔠 ein drittes ihnen gleiches *ac*, (Taf. II. Fig. 4^{β}), das mit jedem aus ihnen eine Seite gleich hat, nemlich $ab = AB$ und $bc =$ 𝔟𝔠,*) und führe dazu, als zu einer Grundebene, in dem der Höhe *NP* gleichen senkrechten Abstande *pn* eine unbestimmt weit ausgedehnte Ebene *nh* parallel; z w e i t e n s übertrage man den auf der Grundkante *AB* senkrechten Querschnitt *KM* an die gleiche Grundkante *ab* als Querschnitt *km*, oder auch nur den Winkel †) *LKN* der Kante *AB* an die Kante *ab* in den Winkel *lkn*, und lege durch *ab* und *kn* die Seitenebene *af*, dann zu ihr parallel durch *cd* die Seitenebene *dg*; endlich d r i t t e n s übertrage man eben so von der Kante 𝔟𝔠 an die gleiche *bc* entweder den Querschnitt 𝔮𝔯 nach *qr* oder den Kantenwinkel †) 𝔮 nach *q*, und führe durch *bc* unter dem Winkel $q =$ 𝔮 gegen *ac* geneigt die Seitenebene *bg* und dazu parallel durch *ad* die Ebene *ah*. Dann begrenzen die durch diese drei Vorgänge erhaltenen drei Paar parallelen Ebenen ein neues Parallelepiped *aceg*. Mit diesem hat nun jedes der zu vergleichenden Parallelepipede *ACEG* und 𝔞𝔠𝔢𝔤, ausser der Grundebene und Höhe auch noch eine Grundkante und daran den Winkel †) gleich, daher sind sie ihm einzeln, nach dem ersten Falle, folglich auch einander selbst gleich.

---

*) nach der Note **) zu 2) in obigem §. 2.

†) Kritische Leser fühlen gewiss mit mir an dieser Stelle die bereits von H. W o l f im Archiv. Theil 3. Heft 4, Seite 416. angeregte Nothwendigkeit, die Abweichung oder Verschiedenheit, welche bei zwei Geraden an ihrem Durchschnittspunkte „Winkel" heisst, bei zwei Ebenen an ihrer Durchschnittslinie a n d e r s, a b e r w i e? zu nennen, so wie z. B. das, was bei Geraden R i c h t u n g, bei krummen Linien S i n n heisst, bei Ebenen S t r e c k u n g oder ihr S t r e i c h e n genannt wird. Von den a. a. O. citirten Benennungen taugt schlechterdings keine. Vielleicht könnte und wollte einer unserer Koryphäen unter den Sprachforschern, etwa Herr G r a f f aus seinem preisswürdigen „althochdeutschen Sprachschatze" — mit einem passenden ein- oder höchstens zweisilbigen Wurzelnamen den Geometern helfen. — Ich benütze zugleich die Gelegenheit, um darauf aufmerksam zu machen, dass eben so in der analytischen Goniometrie, wenn man, strenge Wissenschaftlichkeit erstrebend, aus den Winkeln den überflüssigen Kreisbogen herauswirft, für den fast immer stillschweigend als Einheit zu Grund gelegten Winkel eine passliche Benennung Noth thut. Gewöhnlich bestimmt man ihn da-

Anmerkung. Wie man, ohne Berufung auf §. 1. oder vielmehr diesen in den Beweis einflechtend, die Gleichheit von Parallelepipeden nachweisen könne, habe ich bereits im 4. Bande des Archivs. Heft 3. S. 362. gezeigt.

§. 3. *Besonderer Fall.* **Ein Parallelepiped wird durch jede Diagonalebene in zwei gleiche dreiseitige Prismen zertheilt.**

Denn denkt man sich in dem Parallelepipede $ADEHBCFG$ (Taf. II. Fig. 4^a.) die Diagonalebene $CDEF$, so schneidet diese den Querschnitt $KLMN$, der bekanntlich ein Parallelogramm ist, in der Diagonale LN, und diese theilt den Querschnitt in zwei congruente Dreiecke LKN und LMN. Die beiden dreiseitigen Prismen, in die das Parallelepiped zerlegt wird, haben demnach die Querschnitte congruent und die Seitenkanten gleich; mithin sind sie nach §. 1. einander gleich.

B. Proportionalität der Parallelepipede.

I. Bei gleichen Höhen.

§. 4. **Parallelepipede von gleichen Höhen sind ihren Grundebenen direct proportional.**

Denn verwandelt man die als Grundebenen irgend zweier Parallelepipede p, P vorkommenden Parallelogramme b, B zuerst so, dass sie eine Seite oder die Höhe gleich haben, nachher aber noch so, dass sie einerlei Winkel besitzen; so kann man die entstehenden ihnen gleichen Parallelogramme b', B' an jener gleichen Seite oder zwischen zweien um die gleiche Höhe abständigen Parallellinien dergestalt an einander rücken, dass sie nur ein Parallelogramm $b'+B'=b+B$ ausmachen. Auch kann man nach einem minder bekannten Satze des Pappus (lib. 4. prop. 1.)*) die Parallelogramme b, B unter Einem in zwei andere b', B' von einerlei Winkeln verwandeln und in ein Praralellogramm vereinen, dessen eine Seite oder ein Winkel wählbar ist. Legt man dann durch die Seiten des zusammengesetzten Parallelogramms $b'+B'$, als einer neuen Grundebene, und durch seine Trennungslinie, Seitenebenen paarweise parallel, und in einem der Höhe der Parallelepipede p, P gleichen Abstande von ihm die zweite Grund-

---

durch, dass der Kreisbogen desselben seinem Halbmesser gleicht; er kann aber bei solchem Vorgange — wovon ein anderes Mal — als die Grenze des Quotienten eines unendlich abnehmenden Winkels durch seinen Sinus oder durch seine Tangente erklärt werden. Diesen Winkel nun, möchte ich, in Anbetracht, dass er völlig bestimmt und zugleich spitz sein muss, so wie man das Neunzigstel des rechten Winkels „Grad“ nennt, mit dem kurzen veralteten Namen „der Gehren“ (französ. le chanteau) bezeichnen. Man lese über dieses Wort die Wörterbücher von Adelung, Heinsius, Heyse, u. a., und ich hoffe. man werde es passend finden. Neue angemessene wissenschaftliche Benennungen schaffen ist zwar, weil sie nicht jedermann gefallen, misslich; allein sie ganz entbehren oder unpassende gebrauchen müssen, ist peinlich.

*) Van Swinden Geometrie. Buch 2. §. 91. Tellkampf Vorschule. Geometrie. Cap. 5. §. 262. 7.

ebene parallel, so entsteht ein Parallelepiped, das aus zweien zusammengesetzt ist, welche einzeln den Parallelepipeden p, P gleichen, weil sie mit ihnen Grundebene und Höhe gleich haben (§. 2.). Der Summe $b+B$ jeder zwei Grundebenen b, B entspricht demnach bei einerlei Höhe die Summe $p+P$ der ihnen angehörigen Parallelepipede p, P; mithin sind gleiche Parallelepipede ihren Grundebenen geradezu proportional, nemlich $p:P=b:B$.

II. Bei gleichen Grundebenen.

§. 5. **Parallelepipede auf gleichen Grundebenen sind ihren Höhen direct proportional.**

Denn von was immer für zwei Parallelepipeden p, P über gleichen Grundebenen trage man die Höhen a, A unmittelbar nach einander in eine Gerade $a+A$ zusammen; errichte auf dieser in den aufgetragenen drei Punkten Ebenen senkrecht, also unter sich parallel; construire in einer solchen Ebene ein den gleichen Grundebenen gleiches Parallelogramm; und lege endlich durch dessen Seiten paarweise parallele Ebenen. Bei solchem Vorgange entsteht über der Höhe $a+A$ ein Parallelepiped, das aus zweien zusammengesetzt ist, die mit den beiden gegebenen p, P Grundebene und Höhe gleich haben, also ihnen stückweise gleich sind (§. 2.). Bei gleichen Grundebenen gehört demnach zur Summe $a+A$ jeder zwei Höhen a, A die Summe $p+P$ der zugehörigen Parallelepipede p, P; mithin sind Parallelepipede über gleichen Grundebenen ihren Höhen direct proportionirt, nemlich $p:P=a:A$.

III. Ueberhaupt.

§. 6. **Parallelepipede sind überhaupt im zusammengesetzten Verhältnisse aus den geraden Verhältnissen ihrer Grundebenen und Höhen;**

oder: **Parallelepipede verhalten sich wie die Producte der Zahlwerthe ihrer Grundebenen und Höhen.**

Denn sie sind nach §. 4., bei gleicher Höhe, ihren Grundebenen, und nach §. 5., bei gleichen Grundebenen, ihren Höhen direct proportional; mithin überhaupt ihren Grundebenen und Höhen zusammengesetzt direct proportionirt.

Haben demnach die Parallelepipede p, P die Grundebenen b, B und die Höhen a, A, so ist

$$p : P = \left.\begin{matrix} b : B \\ a : A \end{matrix}\right\}$$

Benützt man die Bezeichnung der Grundebenen und Höhen auch für ihre Zahlwerthe, so darf man in der noch bestehenden Proportion die beiden Zahlenverhältnisse mittels Multiplication zusammensetzen, und man erhält

$$p : P = ab : AB.$$

C. Messung des Raumes eines Prisma.

§. 7. *Körpereinheit.* Zur Einheit der Körper wählt man gewöhnlich ein Parallelepiped, dessen Höhe die Linieneinheit und dessen

Grundebene die Flächeneinheit ist. Fast immer ertheilt man ihr die Gestalt des Würfels, dessen Seite die Längeneinheit ist.

§. 8. *Messung des Parallelepipeds.* Der Rauminhalt eines Parallelepipeds gleicht dem Producte der Zahlwerthe der Höhe und Grundebene desselben.

Denn bedeuten in der letzten Proportion die Zeichen der Parallelepipede, wie es verstattet bleibt, auch die Zahlwerthe, die Raum- oder Körperinhalte der Parallelepipede, und nimmt man dasjenige Parallelepiped zur Körpereinheit, also seinen Zahlwerth $P=1$, dessen Höhe die Länge $A=1$, und dessen Grundebene den Flächeninhalt $B=1$ hat; so verwandelt sich die Proportion in

$$p : 1 = ab : 1.1,$$

folglich ist $$p = ab.$$

§. 9. *Messung jedes Prisma.* Der Rauminhalt eines Prisma ist das Product der Zahlwerthe seiner Höhe und Grundebene.

Denn ist das Prisma

1) dreiseitig und seine Grundebene b, so kann es vermöge §. 3. als Hälfte eines eben so hohen Parallelepipeds über der doppelten Grundebene, $2b$, dargestellt werden, dessen Inhalt also $=2b.a$, daher der seinige $=ab$ ist.

2) Jedes andere Prisma aber lässt sich in eben so viele dreiseitige Prismen als seine Grundebene b in Dreiecke zerlegen. Mithin ist sein Inhalt p die Summe der Producte der gemeinsamen Höhe a aller dreiseitigen Prismen in gesammte Grunddreiecke, also auch das Product des gleich bleibenden Factors, der Höhe a des Prisma, in die Summe der Grunddreieke, d. i. in die Grundebene b des Prisma; folglich $p=ab$.

XIX.

Beweis und Berichtigung des im 4. Bande des Archivs, 3. Heft, S. 332, Nr. XXXV, Satz 2, vorgelegten Lehrsatzes.

Von dem

Herrn Professor W. Matzka

an der k. k. philosophischen Lehranstalt zu Tarnow in Galizien.

Der Inhalt dieses zum Erweise vorgegebenen Satzes ist kurz folgender:

> Eine dekadische Zahl $D=10N+A$ ist durch eine eben solche $d=10n\pm a$ theilbar, wenn $An\mp aN$ dadurch theilbar ist.

Beweis. Durch die Zahl d ist offenbar ihr Vielfaches Nd theilbar, daher auch der ihm gleiche Ausdruck $N(10n\pm a)+An-An$ $=n(10N+A)\pm aN-An=nD-(An\mp aN)$. Ist nun $An\mp aN$ durch d theilbar, so muss dies auch nD sein. Wenn demnach n und d, also, weil $d=10n\pm a$ ist, auch n und a, keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzen, muss sicher D durch d theilbar sein.

Allein! falls n und a, daher auch n und d, einen gemeinsamen Theiler haben, folgt daraus, dass nD durch d theilbar sein muss, keineswegs nothwendig, sondern nur etwa zufällig, die Theilbarkeit von D durch d.

So ist z. B. der letzte a. a. O. gebrauchte Theiler 68 von dieser bedenklichen Beschaffenheit, weil 6 und 8 zugleich durch 2 theilbar sind. In der That ist zwar die daselbst gewählte Zahl 816 durch 68 theilbar, allein 374 ist es nicht, obgleich $37.8-4.6$ $=296-24=272$ durch 68 theilbar ist.

Mithin ist in den aufgestellten Lehrsatz die berichtigende Einschränkung aufzunehmen:

> „wofern a und n keinen Theiler gemeinschaftlich haben."

Berechnung solcher untheilbaren Zahlen. Derlei Zahlen $D=10N+A$, die durch eine vorgelegte Zahl $d=10n\pm a$, in welch r n und a einen grössten gemeinschaftlichen Theiler

$t > 1$ haben, nicht theilbar sind, obwohl $An \mp aN$ es ist, können auf folgende Weise berechnet werden.

Es soll $An \mp aN$ durch d theilbar, also
$aN \equiv \pm An$, *mod* d sein.

Geben nun, wenn man die congruenten Zahlen und den Modul durch ihren grössten gemeinschaftlichen Theiler t theilt, die Zahlen a, n, d durch t getheilt, die Quotienten α, ν, δ; so verwandelt sich die Congruenz in

$$\alpha N \equiv \pm \nu A, \ mod\ \delta.$$

Lös't man diese Congruenz in Bezug auf N, indem man A überhaupt eine der zehn Ziffern $0, 1, \ldots 9$ gelten lässt, nach einem der bekannten Verfahren auf; so sei N' ein, die Zahl δ nicht übersteigender, Werth von N. Dann ist

$$N = N' + z\delta \text{ und } D = 10N' + A + 10\delta . z,$$

wenn z durchlaufend sämmtliche absoluten Anzahlen vorstellt.

Weil in $\delta = d : t = (10n \pm a) : t = 10\nu \pm \alpha$ die Zahlen α und ν keinen Theiler mehr gemeinschaftlich besitzen, muss die Zahl $10N' + A = D'$, dem geführten Beweise gemäss, durch δ theilbar sein. Da nunmehr $D = D' + 10\delta . z$ und $d = t\delta$ ist, so wird

$$\frac{D}{d} = \left(\frac{D'}{\delta} + 10z\right) : t = \frac{D'}{d} + \frac{2.5.z}{t}.$$

Demnach ist D allemal zugleich mit D' durch d theilbar oder untheilbar, so oft entweder

1. $t = 2$ oder 5 ist, oder
2. für z bloss Vielfache von t eingesetzt werden, oder endlich
3. z so gewählt wird, dass $\frac{D'}{\delta} + 10z$ durch t theilbar oder untheilbar ausfällt.

Beispiel. Bei dem Theiler $d = 68 = 6.10 + 8$ hat man $n = 6$, $a = 8$, also $t = 2$ und $\delta = 34$, $\nu = 3$, $\alpha = 4$; mithin soll $4N \equiv 3A$, *mod* 34 sein. Da 4 und 34 durch 2 theilbar sind, muss es auch A sein. Setzt man daher $A : 2 = A'$ oder $A = 2A'$, und theilt man sowohl die Zahlen als den Modul durch 2, so wird $2N \equiv 3A'$, *mod* 17. Dazu findet sich leicht $2 \times -8 = -16 \equiv 1$, *mod* 17, folglich, wenn man mit -8 multiplicirt, $N \equiv N' \equiv 10A'$, *mod* 17, wobei $N' \overline{\gtrless} 34$. Sofort ergeben sich folgende zusammengehörige Werthe:

Hilfszahl	$A' =$ 0,	1,	2,	3,	4
Ziffer der Einer	$A' =$ 0,	2,	4,	6,	8
kleinste Zehnermenge	$N' =$ 0,	10,	3,	13,	6
	17,	27,	20,	30,	23
kleinste Zahl	$D' =$ 0,	102,	34,	136,	68
	170,	272,	204,	306,	238.

Schliesst man hievon die durch 68 theilbaren Zahlen 68, 136, 204, 272 aus, und vermehrt man die Zehner der übrigen so oft man will widerholt um 34; so erhält man folgende, trotz der erfüllten Bedingung, durch 68 nicht theilbare Zahlen:

$D =$ 34, 102, 170, 238, 306,
374, 442, 510, 578, 646,
714, 782, 850, 918, 986, u. s. f.

Leichtere Bestimmungsweise. Sucht man, entweder mittels einer Tafel der Vielfachen der ganzen Zahlen oder durch wiederholte Addition, sämmtliche nach einander folgenden Vielfachen von $d:t=\delta$, und lässt man der Reihe nach jedes t^{te} solche Vielfache, dessen Multiplicator also selbst ein Vielfaches von t ist, hinweg, oder berechnet man erstlich alle Vielfachen von δ vor seinem $t$fachen, und vermehrt sie dann wiederholt um dieses $t$fache: so sind alle sich ergebenden Vielfachen von δ, weil ihr Multiplicator durch t nicht theilbar ist, derlei durch d untheilbare Zahlen D.

Denn je nachdem in $D = m\delta = \frac{m}{t} t\delta = \frac{m}{t} d$ der Multiplicator m durch t theilbar ist oder nicht, wird das Vielfache D durch d theilbar oder nicht. — Weil ferner $\delta = 10v \pm \alpha$ und $D = m\delta = 10mv \pm m\alpha$, also, wenn $\pm m\alpha = A \pm 10B$ ausfällt, $D = 10(mv \pm B = N) + A$ ist; so findet man $An \mp aN = Avt \mp \alpha tN = t(Av \mp \alpha N) = t[v(\pm m\alpha \mp 10B) \mp \alpha(mv \pm B)] = \mp B(10v \pm \alpha)t = \mp B\delta t = \mp Bd$, folglich die Bedingung, $An \mp aN$ sei durch d theilbar, jederzeit erfüllt.

XX.

Ueber die Normalen der Kegelschnitte.

Nach drei Aufsätzen des Herrn Gerono, Professeur de Mathématiques, in den Nouvelles Annales de Mathématiques. Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, rédigé par Terquem et Gerono. T. II. Paris. 1843. p. 16. 72. 170. frei bearbeitet

von

dem Herausgeber.

Mit den Normalen, die durch einen gegebenen Punkt an einen Kegelschnitt gezogen werden können, hat sich bekanntlich schon Apollonius in dem fünften Buche seines berühmten Werks über die Kegelschnitte beschäftigt, worüber man den Artikel Normale in dem mathematischen Wörterbuche. Thl. III. S. 688. nachsehen kann. Vorzüglich wichtig ist aber ferner eine Bemerkung von Legendre über die Kriterien, mittelst welcher sich die Anzahl der Normalen bestimmen lässt, die in den verschiedenen möglichen Fällen durch einen gegebenen Punkt an eine Ellipse gezogen werden können, welche man in dem Traité des fonctions elliptiques. T. II. Paris. 1825. p. 349. findet. An diese Bemerkung schliesst sich unmittelbar der Aufsatz des Herrn Gerono an, dessen wesentlichen Inhalt wir im Folgenden mittheilen werden.

I.

Die Gleichung einer Ellipse, welche wir zuerst betrachten wollen, sey

$$1)\ \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1,$$

wo a und b ihre gewöhnliche Bedeutung haben. Sind x_1, y_1 die Coordinaten eines beliebigen Punktes in dieser Ellipse, so ist bekanntlich

$$2)\quad y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)\ ^{*)}$$

die Gleichung der durch diesen Punkt an die Ellipse gezogenen Normale. Bezeichnen wir daher jetzt durch α, β die Coordinaten eines beliebigen Punktes in der Ebene der Ellipse, und durch x, y die Coordinaten des Durchschnittspunkts einer durch den Punkt $(\alpha\beta)$ an die Ellipse gezogenen Normale mit der Ellipse **); so haben wir zur Bestimmung von x, y die beiden folgenden Gleichungen:

$$3)\quad \begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \\ \beta - y = \frac{a^2 y}{b^2 x}(\alpha - x); \end{cases}$$

oder

$$4)\quad \begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \\ b^2\beta x - a^2\alpha y + (a^2 - b^2)xy = 0; \end{cases}$$

oder, wenn wie gewöhnlich

$$a^2 - b^2 = e^2$$

gesetzt wird:

$$5)\quad \begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \\ b^2\beta x - a^2\alpha y + e^2 xy = 0. \end{cases}$$

Setzen wir

$$6)\quad \frac{a\alpha}{e^2} = f,\ \frac{b\beta}{e^2} = h;$$

so wird die zweite der Gleichungen 5):

---

*) Wenn man $\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} = i$ und $a^2 - b^2 = e^2$ setzt, so kann man die Gleichung der Normale der Ellipse auch unter der folgenden bemerkenswerthen Gestalt darstellen:

$$y = ix \mp \frac{i e^2}{\sqrt{a^2 + b^2 i^2}},$$

wo man das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, jenachdem x_1 eine positive oder eine negative Grösse ist (Comte: Traité élém. de géom. anal. p. 358.).

**) Wo (xy) immer der Punkt der Ellipse ist, in welchem auf derselben die durch den Punkt $(\alpha\beta)$ gezogene Normale senkrecht steht.

$$7)\quad bhx - afy + xy = 0.$$

Die erste der Gleichungen 5) kann auf folgende Form gebracht werden:

$$8)\quad \frac{ay}{b(a+x)} = \frac{b(a-x)}{ay},$$

und wenn man daher

$$9)\quad z = \frac{ay}{b(a+x)} = \frac{b(a-x)}{ay}$$

setzt, so hat man die beiden folgenden Gleichungen:

$$10)\quad ay - bzx = abz,\ bx + azy = ab;$$

aus denen sich ohne Schwierigkeit:

$$11)\quad x = a\frac{1-z^2}{1+z^2},\ y = \frac{2bz}{1+z^2}$$

ergiebt. Führt man diese Werthe von x und y in die Gleichung 7) ein, so ergiebt sich nach einigen leichten Reductionen die Gleichung

$$12)\quad z^4 + \frac{2(f+1)}{h}z^3 + \frac{2(f-1)}{h}z - 1 = 0,$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$13)\quad A = \frac{2(f+1)}{h},\ B = \frac{2(f-1)}{h}$$

gesetzt wird, die Gleichung:

$$14)\quad z^4 + Az^3 + Bz - 1 = 0.$$

Weil das letzte Glied dieser Gleichung des vierten Grades negativ ist, so hat dieselbe nach einem bekannten Satze von den Gleichungen *) jederzeit zwei reelle Wurzeln mit entgegengesetzten Vorzeichen; und da nun wegen der Gleichungen 11) jedem reellen Werthe von z reelle Werthe von x und y entsprechen, so sieht man zuvörderst, dass sich durch jeden Punkt immer mindestens zwei Normalen an eine Ellipse ziehen lassen.

Bezeichnen wir die vier Wurzeln der Gleichung 14) überhaupt durch m, n, p, q; so haben wir zwischen denselben bekanntlich die vier folgenden Gleichungen:

---

*) Supplemente zum mathematischen Wörterbuche. Thl. II. Artikel Gleichung. S. 396.

$$15)\left\{\begin{array}{c} m+n+p+q=-A, \\ (mn+pq)+(mp+nq)+(mq+np)=0, \\ mnp+mnq+mpq+npq=-B, \\ mnpq=-1; \end{array}\right.$$

und können nun mit Hülfe dieser Gleichungen leicht die Gleichung des dritten Grades finden, deren Wurzeln die drei Grössen

$$mn+pq,\ mp+nq,\ mq+np$$

sind. Weil nämlich die Summe dieser drei Grössen nach 15) verschwindet, so hat die in Rede stehende cubische Gleichung die Form

$$16)\quad u^3+A_1u+B_1=0.$$

Ferner ist nach der Lehre von den Gleichungen

$$\begin{aligned} A_1= \ & (mn+pq)(mp+nq) \\ & (mn+pq)(mq+np) \\ & (mp+nq)(mq+np). \end{aligned}$$

Durch Multiplication der ersten und dritten der Gleichungen 15) erhält man aber ohne Schwierigkeit nach einigen leichten Reductionen:

$$\begin{aligned} AB=4mnpq&+(mn+pq)(mp+nq) \\ &+(mn+pq)(mq+np) \\ &+(mp+nq)(mq+np). \end{aligned}$$

Also ist wegen der vierten der Gleichungen 15)

$$AB=A_1-4,$$

und folglich

$$A_1=AB+4.$$

Endlich ist nach der Theorie der Gleichungen

$$B_1=-(mn+pq)(mp+nq)(mq+np).$$

Entwickelt man das Product auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens, so erhält man, mit Rücksicht auf die bekannte Relation

$$mnpq=-1,$$

ohne Schwierigkeit

$$\begin{aligned} B_1= \ & m^2+n^2+p^2+q^2 \\ & -(m^2n^2p^2+m^2n^2q^2+m^2p^2q^2+n^2p^2q^2). \end{aligned}$$

Quadrirt man aber die erste und dritte der Gleichungen 15), und zieht dann die letztere von der ersteren ab, so erhält man, mit Rücksicht auf die Relation

$$(mn+pq)+(mp+nq)+(mq+np)=0,$$

ohne Schwierigkeit

$$A^2-B^2= m^2+n^2+p^2+q^2 \\ -(m^2n^2p^2+m^2n^2q^2+m^2p^2q^2+n^2p^2q^2).$$

Also ist

$$B_1=A^2-B^2,$$

und die cubische Gleichung 16), deren Wurzeln die Grössen

$$mn+pq,\ mp+nq,\ mq+np$$

sind, wird daher

$$17)\quad u^3+(AB+4)u+A^2-B^2=0.$$

Bezeichnen wir die drei Wurzeln dieser Gleichung durch u_1, u_2, u_3; so können wir

$$18)\quad \begin{cases} u_1=mn+pq, \\ u_2=mp+nq, \\ u_3=mq+np \end{cases}$$

setzen, und erhalten hieraus die drei folgenden Gleichungen:

$$19)\quad \begin{cases} u_1-u_2=(m-q)(n-p), \\ u_2-u_3=(m-n)(p-q), \\ u_3-u_1=(m-p)(q-n). \end{cases}$$

Wenn nun

$$4(AB+4)^3+27(A^2-B^2)^2=0$$

ist, so sind nach der Theorie der cubischen Gleichungen*) die drei Wurzeln u_1, u_2, u_3 reell, und zwei derselben sind einander gleich. Sind also z. B. m und n die beiden reellen Wurzeln mit entgegengesetzten Vorzeichen, welche die Gleichung 14) jederzeit nothwendig haben muss, so ist wegen der zweiten der Gleichungen 19) die Differenz $p-q$ eine reelle Grösse. Wären nun aber p und q zwei imaginäre Wurzeln der Gleichung 14), so müssten dieselben nach der Theorie der Gleichungen von der Form

$$p=s+t\sqrt{-1},\ q=s-t\sqrt{-1}$$

sein, und es wäre folglich

$$p-q=2t\sqrt{-1},$$

diese Differenz also imaginär, was gegen das Obige streitet. Da-

*) M. vergl. z. B. Archiv. Thl. VI. S. 6.

her sind auch die Wurzeln p und q reell, und die Gleichung 14) hat folglich in diesem Falle vier reelle Wurzeln. Weil aber eine der Differenzen $u_1 - u_2$, $u_2 - u_3$, $u_3 - u_1$ verschwindet, so müssen wegen der Gleichungen 19) unter diesen vier reellen Wurzeln zwei gleiche vorkommen.

Wenn ferner

$$4(AB+4)^3 + 27(A^2 - B^2)^2 > 0$$

ist, so sind nach der Theorie der cubischen Gleichungen*) von den Wurzeln u_1, u_2, u_3 eine reell und zwei imaginär. Weil die beiden imaginären Wurzeln von der Form $v + w\sqrt{-1}$ und $v - w\sqrt{-1}$ sein müssen, so sind die Differenzen $u_1 - u_2$, $u_2 - u_3$, $u_3 - u_1$ offenbar alle drei imaginär. Sind nun wieder z. B. m und n die beiden reellen Wurzeln mit entgegengesetzten Vorzeichen, welche die Gleichung 14) nothwendig haben muss, so ist wegen der zweiten der Gleichungen 19) die Differenz $p - q$ imaginär, und da, weil die imaginären Wurzeln der Gleichungen immer paarweise vorhanden sind, nicht bloss eine der beiden Grössen p und q imaginär sein kann, so müssen dieselben beide imaginär sein; folglich hat die Gleichung 14) in diesem Falle zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln.

Wenn endlich

$$4(AB+4)^3 + 27(A^2 - B^2)^2 < 0$$

ist, so sind nach der Theorie der cubischen Gleichungen**) die Wurzeln u_1, u_2, u_3 alle drei reell, und unter einander ungleich. Daher sind zuvörderst wegen der Gleichungen 19) die vier Wurzeln m, n, p, q offenbar sämmtlich unter einander ungleich. Sind aber wieder z. B. m und n die zwei reellen Wurzeln mit entgegengesetzten Vorzeichen, welche die Gleichung 14) nothwendig haben muss, so ist wegen der zweiten der Gleichungen 19) die Differenz $p - q$ eine reelle Grösse, woraus man ganz wie im ersten Falle schliesst, dass die Wurzeln p und q beide reell sind. Daher hat im vorliegenden Falle die Gleichung 14) vier unter einander ungleiche reelle Wurzeln.

Rücksichtlich der Normalen der Ellipse ergiebt sich hieraus nun unmittelbar Folgendes:

Wenn

$$4(AB+4)^3 + 27(A^2 - B^2)^2 = 0$$

ist, so lassen sich durch den gegebenen Punkt $(\alpha\beta)$ drei Normalen an die Ellipse ziehen.

Wenn dagegen

$$4(AB+4)^3 + 27(A^2 - B^2)^2 > 0$$

ist, so lassen sich durch den gegebenen Punkt $(\alpha\beta)$ nur zwei Normalen an die Ellipse ziehen.

Wenn endlich

---

*) A. a. O. S. 6. **) A. a. O. S. 7.

$$4(AB+4)^3+27(A^2-B^2)^2<0$$

ist, so können durch den gegebenen Punkt $(\alpha\beta)$ vier Normalen an die Ellipse gezogen werden.

Die vorhergehenden Bedingungen lassen sich aber auf einen eleganteren Ausdruck bringen.

Setzen wir nämlich

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^2=\lambda^3, \left(\frac{A-B}{4}\right)^2=\mu^3,$$

wo λ und μ offenbar positive Grössen sind, so ist, wie man leicht findet:

$$(A^2-B^2)^2=256\lambda^3\mu^3, AB=4(\lambda^3-\mu^3),$$

also

$$4(AB+4)^3+27(A^2-B^2)^2$$
$$=256\{(\lambda^3-\mu^3+1)^3+27\lambda^3\mu^3\},$$

und die Bedingungen

$$4(AB+4)^3+27(A^2-B^2)^2 \gtreqless 0$$

sind folglich offenbar erfüllt, wenn respective die Bedingungen

$$(\lambda^3-\mu^3+1)^3+27\lambda^3\mu^3 \gtreqless 0,$$

oder die Bedingungen

$$(\lambda^3-\mu^3+1)^3 \gtreqless -27\lambda^3\mu^3$$

erfüllt sind. Weil nun aber $-3\lambda\mu$ negativ, und die dritte Potenz von $\lambda^3-\mu^3+1$ positiv oder negativ ist, jenachdem diese Grösse selbst positiv oder negativ ist, so sind die vorhergehenden Bedingungen, wie leicht erhellen wird, jederzeit erfüllt, wenn respective die Bedingungen

$$\lambda^3-\mu^3+1 \gtreqless -3\lambda\mu,$$

d. i. die Bedingungen

$$\lambda^3-\mu^3+1+3\lambda\mu \gtreqless 0$$

erfüllt sind. Weil aber

$$\lambda^3-\mu^3=(\lambda-\mu)^3+3\lambda\mu(\lambda-\mu)$$

ist, so kann man an die Stelle der vorhergehenden Bedingungen die Bedingungen

$$(\lambda-\mu)^3+1+3\lambda\mu(\lambda-\mu+1) \gtreqless 0$$

setzen. Nun ist aber

$$(\lambda-\mu)^3+1=(\lambda-\mu+1)\{(\lambda-\mu)^2-(\lambda-\mu)+1\},$$

und die vorhergehenden Bedingungen werden also jederzeit erfüllt sein, wenn respective die Bedingungen

$$(\lambda-\mu+1)\{(\lambda-\mu)^2-(\lambda-\mu)+1+3\lambda\mu\}\gtreqless 0$$

erfüllt sind. Wenn $\lambda-\mu$ negativ ist, so ist die Grösse

$$(\lambda-\mu)^2-(\lambda-\mu)+1$$

offenbar positiv; ist aber $\lambda-\mu$ positiv, so ist, weil

$$(\lambda-\mu)^2-(\lambda-\mu)+1=(\lambda-\mu-1)^2+(\lambda-\mu)$$

gesetzt werden kann, die Grösse

$$(\lambda-\mu)^2-(\lambda-\mu)+1$$

ebenfalls positiv; und diese Grösse ist daher stets positiv. Da nun $3\lambda\mu$ positiv ist, so ist auch die Grösse

$$(\lambda-\mu)^2-(\lambda-\mu)+1+3\lambda\mu$$

stets positiv, und die Bedingungen

$$(\lambda-\mu+1)\{(\lambda-\mu)^2-(\lambda-\mu)+1+3\lambda\mu\}\gtreqless 0$$

können daher jederzeit durch die Bedingungen

$$\lambda-\mu+1\gtreqless 0,$$

d. i. nach dem Obigen durch die Bedingungen

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+1\gtreqless 0$$

ersetzt werden. Daher ergiebt sich aus dem Vorhergehenden jetzt Folgendes:

Wenn

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+1=0$$

ist, so lassen sich durch den gegebenen Punkt $(\alpha\beta)$ drei Normalen an die Ellipse ziehen.

Wenn dagegen

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+1>0$$

ist, so können durch den gegebenen Punkt $(\alpha\beta)$ nur zwei Normalen an die Ellipse gezogen werden.

Wenn endlich

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+1<0$$

ist, so lassen sich durch den gegebenen Punkt vier Normalen an die Ellipse ziehen.

Nach dem Obigen ist

$$\frac{A+B}{4}=\frac{f}{h}=\frac{a\alpha}{b\beta},$$
$$\frac{A-B}{4}=\frac{1}{h}=\frac{e^2}{b\beta};$$

also

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+1=\left(\frac{a\alpha}{b\beta}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{e^2}{b\beta}\right)^{\frac{2}{3}}+1$$

oder

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+1=\frac{(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}}{(b\beta)^{\frac{2}{3}}},$$

und an die Stelle der Bedingungen

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+1 \gtreqless 0$$

können folglich, weil $(b\beta)^{\frac{2}{3}}$ eine positive Grösse ist, die Bedingungen

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}} \gtreqless 0$$

gesetzt werden. Daher erhalten wir endlich den folgenden bemerkenswerthen Satz:

An die durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

charakterisirte Ellipse können durch einen gegebenen Punkt $(\alpha\beta)$ zwei, oder drei, oder vier Normalen gezogen werden, jenachdem, indem wie gewöhnlich $a^2-b^2=e^2$ gesetzt wird,

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}>0,$$

oder

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}=0,$$

oder

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}<0$$

ist.

Dieser Satz ist aber auch einer bemerkenswerthen geometrischen Intrepretation fähig.

Aus der höheren Geometrie ist nämlich allgemein bekannt *), dass

$$(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=(e^2)^{\frac{2}{3}}$$

oder

$$(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}=0$$

die Gleichung der Evolute der durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

charakterisirten Ellipse ist **), und durch eine ganz einfache Betrachtung wird auf der Stelle erhellen, dass der Punkt (xy) ausserhalb, in oder innerhalb dieser Evolute liegt, jenachdem

$$(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}>0,$$

oder

$$(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}=0,$$

oder

$$(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}<0$$

ist. Daher hat man das folgende merkwürdige Theorem:

Durch einen Punkt in der Ebene einer Ellipse lassen sich an dieselbe zwei, oder drei, oder vier Normalen ziehen, jenachdem dieser Punkt ausserhalb, oder in, oder innerhalb der Evolute der Ellipse liegt.

II.

Die Gleichung einer Hyperbel sei

$$1)\ \left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1,$$

so hat man, wenn x, y die Coordinaten des Durchschnittspunkts einer durch den Punkt $(\alpha\beta)$ an die Hyperbel gezogenen Normale mit derselben bezeichnen ***), zur Bestimmung von x, y die beiden folgenden Gleichungen:

---

*) M. s. z. B. meine Elemente der Differential- und Integralrechnung. Thl. I. Leipzig. 1837. S. 291.

**) Eine Zeichnung der Evolute einer Ellipse s. m. Archiv. Thl. IV. Taf. II. Fig. 5.

***) Wo (xy) immer der Punkt der Hyperbel ist, in welchem auf derselben die durch den Punkt $(\alpha\beta)$ gezogene Normale senkrecht steht.

$$2)\quad \begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1, \\ \beta-y=-\frac{a^2\,y}{b^2\,x}(\alpha-x); \end{cases}$$

oder

$$3)\quad \begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1, \\ -b^2\beta x-a^2\alpha y+(a^2+b^2)xy=0; \end{cases}$$

oder, wenn wie gewöhnlich

$$a^2+b^2=e^2$$

gesetzt wird:

$$4)\quad \begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1, \\ -b^2\beta x-a^2\alpha y+e^2xy=0. \end{cases}$$

Setzen wir

$$5)\quad \frac{a\alpha}{e^2}=f,\ -\frac{b\beta}{e^2}=h;$$

so wird die zweite der Gleichungen 4):

$$6)\quad bhx-afy+xy=0.$$

Die erste der Gleichungen 4) kann auf folgende Form gebracht werden:

$$7)\quad \frac{ay}{b(x+a)}=\frac{b(x-a)}{ay},$$

und wenn man daher

$$8)\quad z=\frac{ay}{b(x+a)}=\frac{b(x-a)}{ay}$$

setzt, so hat man die beiden folgenden Gleichungen:

$$9)\quad ay-bzx=abz,\ bx-azy=ab;$$

aus denen sich ohne Schwierigkeit:

$$10)\quad x=a\frac{1+z^2}{1-z^2},\ y=\frac{2bz}{1-z^2}$$

ergiebt. Führt man diese Werthe von x und y in die Gleichung 6) ein, so erhält man nach einigen leichten Reductionen die Gleichung:

$$11)\quad z^4 - \frac{2(f+1)}{h}z^3 + \frac{2(f-1)}{h}z - 1 = 0,$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$12)\quad A = -\frac{2(f+1)}{h},\ B = \frac{2(f-1)}{h}$$

gesetzt wird, die Gleichung:

$$13)\quad z^4 + Az^3 + Bz - 1 = 0.$$

Aus dieser Gleichung lassen sich nun durch ganz gleiche Betrachtungen wie bei der Ellipse, die wir hier nicht wiederholen wollen, ganz dieselben durch die Grössen A und B ausgedrückten Bedingungen wie dort für die Anzahl der Normalen, welche durch den Punkt $(\alpha\beta)$ an die Hyperbel gezogen werden können, ableiten.

Nach dem Obigen ist aber

$$\frac{A+B}{4} = -\frac{1}{h} = \frac{e^2}{b\beta},$$
$$\frac{A-B}{4} = -\frac{f}{h} = \frac{a\alpha}{b\beta};$$

also

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + 1 = -\left(\frac{a\alpha}{b\beta}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{e^2}{b\beta}\right)^{\frac{2}{3}} + 1$$

oder

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + 1 = -\frac{(a\alpha)^{\frac{2}{3}} - (b\beta)^{\frac{2}{3}} - (e^2)^{\frac{2}{3}}}{(b\beta)^{\frac{2}{3}}},$$

und an die Stelle der Bedingungen

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + 1 \gtreqless 0$$

können folglich, weil $(b\beta)^{\frac{2}{3}}$ eine positive Grösse ist, die Bedingungen

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}} - (b\beta)^{\frac{2}{3}} - (e^2)^{\frac{2}{3}} \lesseqgtr 0$$

gesetzt werden. Daher erhalten wir endlich den folgenden bemerkenswerthen Satz:

An die durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

charakterisirte Hyperbel können durch einen gegebenen Punkt $(\alpha\beta)$ zwei, oder drei, oder vier Normalen

gezogen werden, jenachdem, indem wie gewöhnlich $a^2+b^2=e^2$ gesetzt wird,

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}-(b\beta)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}<0,$$

oder

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}-(b\beta)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}=0,$$

oder

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}-(b\beta)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}>0$$

ist.

Die Gleichung der Evolute der Hyperbel ist*)

$$(ax)^{\frac{2}{3}}-(by)^{\frac{2}{3}}=(e^2)^{\frac{2}{3}}$$

oder

$$(ax)^{\frac{2}{3}}-(by)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}=0,$$

woraus sich leicht ableiten lässt, dass die Evolute der Hyperbel aus vier gegen ihre Axen symmetrisch liegenden, sich in's Unendliche erstreckenden Zweigen besteht, welche gegen die Hauptaxe der Hyperbel convex sind. Betrachten wir nun den zwischen diesen vier Zweigen liegenden (unendlichen), aus zwei ganz von einander getrennten Theilen bestehenden Raum, welcher durch die Hauptaxe der Hyperbel halbirt wird, als den inneren, dagegen den zwischen den vier Zweigen liegenden (unendlichen) Raum, welcher durch die Nebenaxe der Hyperbel halbirt wird, als den äusseren Raum der Evolute; so wird durch eine ganz einfache Betrachtung auf der Stelle erhellen, dass der Punkt (xy) ausserhalb, in oder innerhalb der Evolute liegt, jenachdem

$$(ax)^{\frac{2}{3}}-(by)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}<0,$$

oder

$$(ax)^{\frac{2}{3}}-(by)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}=0,$$

oder

$$(ax)^{\frac{2}{3}}-(by)^{\frac{2}{3}}-(e^2)^{\frac{2}{3}}>0$$

ist. Vergleicht man dies aber mit dem Vorhergehenden, so ergiebt sich das folgende merkwürdige Theorem:

Durch einen Punkt in der Ebene einer Hyperbel lassen sich an dieselbe zwei, oder drei, oder vier Normalen ziehen, jenachdem dieser Punkt ausserhalb, oder in, oder innerhalb der Evolute der Hyperbel liegt

---

*) M. s. meine Elemente der Differential- und Integralrechnung a. a. O.

Dass dieser Satz mit dem oben von der Ellipse bewiesenen Satze ganz identisch ist, und daher von der Ellipse und Hyperbel gilt, fällt auf der Stelle in die Augen.

III.

Für eine Parabel, deren Parameter $2p$ ist, müssen die Coordinaten x, y des Punktes, in welchem eine durch den Punkt $(\alpha\beta)$ gezogene Normale der Parabel auf derselben senkrecht steht, aus den beiden Gleichungen:

$$1)\quad y^2=2px,\ \beta-y=-\frac{y}{p}(\alpha-x)$$

oder

$$2)\quad y^2=2px,\ xy-(\alpha-p)y-p\beta=0$$

bestimmt werden. Durch Elimination von x erhält man aber aus diesen beiden Gleichungen die Gleichung

$$3)\quad y^3-2p(\alpha-p)y-2p^2\beta=0,$$

und gelangt nun hierdurch mit Hülfe der Theorie der cubischen Gleichungen*) sehr leicht zu dem folgenden Resultate:

An die durch die Gleichung $y^2=2px$ charakterisirte Parabel können durch einen gegebenen Punkt $(\alpha\beta)$ eine, oder zwei, oder drei Normalen gezogen werden, jenachdem

$$27p\beta^2-8(\alpha-p)^3>0,$$

oder

$$27p\beta^2-8(\alpha-p)^3=0,$$

oder

$$27p\beta^2-8(\alpha-p)^3<0$$

ist.

Die Gleichung der Evolute der Parabel ist**)

$$27py^2-8(x-p)^3=0,$$

woraus sich leicht ableiten lässt, dass die Evolute aus zwei gegen die Axe der Parabel symmetrisch liegenden unendlichen Zweigen besteht, welche gegen die Axe convex sind. Betrachten wir nun den zwischen den beiden Zweigen auf deren convexen Seiten liegenden unendlichen Raum als den innern, den auf den concaven Seiten der beiden Zweige liegenden unendlichen Raum dagegen als den äusseren Raum der Evolute, so wird leicht erhellen, dass der Punkt (xy) ausserhalb, in oder innerhalb der Evolute liegt, jenachdem

---

*) M. s. Archiv Thl. VI. S. 6.

**) M. s. meine Elemente der Differential- und Integralrechnung a. a. O.

$$27py^2-8(x-p)^3>0,$$

oder

$$27py^2-8(x-p)^3=0,$$

oder

$$27py^2-8(x-p)^3<0$$

ist, und wir erhalten daher das folgende Theorem:

Durch einen Punkt in der Ebene einer Parabel lassen sich an dieselbe eine, oder zwei, oder drei Normalen ziehen, jenachdem dieser Punkt ausserhalb, oder in, oder innerhalb der Evolute der Parabel liegt.

XXI.

Nachträge zur Ausgleichungs-Rechnung.

Von dem

Herrn Professor Dr. Gerling

zu Marburg.

In der Vorrede zu meiner Ausgleichungs-Rechnung (S. XIII.) habe ich bereits die Erwartung angedeutet, dass sich bald Nachträge und Berichtigungen finden würden, wenn nur verständige Practiker erst häufiger von der Ausgleichung Gebrauch machten. Diese Erwartung hat sich jetzt schon dadurch verwirklicht, dass Herr Land-Messer Coester (dermalen bei der unter Leitung des Herrn Obristlieutenant Wiegrebe vorgehenden topographischen Vermessung Kurhessens angestellt) mir kürzlich zwei wesentliche Umstände mittheilte, welche in meinem Buche berichtigend nachzutragen sind.

Herr Coester ist nämlich beschäftigt mein grosses Triangel-System mit kleineren Dreiecken auszufüllen, besorgt dieses Gechäft mit eben so viel Eifer als Intelligenz unter dem Gesichtspunkt, dass seine Messungen uud Rechnungen mittelst der Ausgleichungen

überall den Prüfstein ihrer Richtigkeit in sich tragen, und hat dadurch eine Gelegenheit zu den reichsten Erfahrungen über die *Einschaltungs-Methoden*, welche mir bei den grossen Dreiecken nur ausnahmsweise vorkamen. Hierauf beziehen sich denn auch seine Mittheilungen. Ich kann dieselben nicht besser verdanken, als indem ich, die Erlaubniss ihres Urhebers benutzend, das Wesentliche davon hier selbstständig darstelle, und dadurch den Practikern, welche etwa ähnliche Geschäfte betreiben möchten, diese nützlichen Nachträge empfehlend bekannt mache. Diese werden sich das Einzelne leicht selbst weiter entwickeln.

Ich setze dabei auch hier lauter ebene Figuren voraus, indem jedenfalls eine vorläufige Rechnung die etwa zu berücksichtigenden sphärischen Excesse liefert.

Erster Nachtrag.

Für solche Fälle, wo ein *einzelner Punkt* zwischen mehrere andere, als absolut genau betrachtete, einzuschalten ist, und *bloss an ihm selbst* Winkel gemessen sind, und wo also wenigstens vier gute Punkte angeschnitten sein müssen, wenn man überhaupt ausgleichen will, rieth ich (S. 303.) die Bestimmung der gegebenen Punkte auf rechtwinkliche Coordinaten zu reduciren, und dann nach der Methode der vermittelnden Beobachtungen zu verfahren, wie ohnehin für die *Pothenotsche* Aufgabe vorgeschrieben zu werden pflegt. Dieser Rath ist aber *nicht allgemein* der zweckmässigste.

Kommen nämlich Fälle vor, wo man zunächst die Distanzen des einzuschaltenden Punktes von den gegebenen sucht, und sind dann überdies alle Winkel und Seiten zwischen den gegebenen Punkten schon fertig berechnet (wie dies z. B. in meinem grossen System der Fall ist); so kann man *ohne rechtwinkliche Coordinaten* bequemer zum Ziel kommen, indem man die Aufgabe als eine *bedingte* behandelt.

Man wird auch hier *zuerst* aus den Richtungen auf drei (zweckmässig gewählte) von den vorgegebenen Punkten den Orientirungs-Winkel einer Visirlinie gegen eine der gegebenen Verbindungslinien zu berechnen haben, und zwar aus Gründen, die sofort erhellen werden, in scharfer Rechnung.

Hiezu würde ich vorschlagen, etwa auf folgende Weise zwei vorliegende Seiten und ihren eingeschlossenen Winkel zu benutzen. Bezeichnen wir den einzuschaltenden Punkt mit 0, die drei gegebenen mit 1; 2; 3; und suchen die Winkel $q = \overset{0.1}{2}$ und $r = \overset{3.0}{2}$ aus den gemessenen $\overset{1.2}{0}$ und $\overset{2.3}{0}$; so ist die Gleichung

$$(1)\quad \overset{0.2}{\cdot\ \cdot} = \frac{\overset{1.2}{\cdot\ \cdot}}{\sin \overset{1.2}{0}} \sin\left(\overset{1.2}{0} + q\right) = \frac{\overset{2.3}{\cdot\ \cdot}}{\sin \overset{2.3}{0}} \sin\left(\overset{2.3}{0} + r\right)$$

zu erfüllen. Diese giebt zunächst

$$(2)\quad \frac{\sin\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{2.3}{0}+r\right)}{\sin\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{1.2}{0}+q\right)}=\frac{\underset{\cdot\;\cdot}{1.2}}{\underset{\cdot\;\cdot}{2.3}}\cdot\frac{\sin\genfrac{}{}{0pt}{}{2.3}{0}}{\sin\genfrac{}{}{0pt}{}{1.2}{0}}=\tang w,$$

wo der Hülfs-Winkel w also leicht berechnet wird.

Daraus erhält man, weil nach der Voraussetzung

$$(3)\quad q+r=\genfrac{}{}{0pt}{}{3.1}{2}$$

gegeben ist, endlich

$$(4)\quad \tang\tfrac{1}{2}\left\{\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{1.2}{0}-\genfrac{}{}{0pt}{}{2.3}{0}\right)+(q-r)\right\}=\tang\tfrac{1}{2}\left\{\genfrac{}{}{0pt}{}{1.2}{0}+\genfrac{}{}{0pt}{}{2.3}{0}+\genfrac{}{}{0pt}{}{3.1}{2}\right\}\tang(45^\circ-w)$$

und somit q und r.

F e r n e r wird man nun die Gleichung aufzusuchen haben, welche zwischen den Richtungs-Verbesserungen $\binom{1}{0}$; $\binom{2}{0}$; $\binom{3}{0}$ und der Verbesserung der berechneten Richtung $\genfrac{}{}{0pt}{}{0}{2}$ besteht. Da nun $(q)=-\binom{0}{2}$ und $(r)=+\binom{0}{2}$ ist, so erhält man diese Gleichung und zugleich eine Prüfung für die vorige Rechnung, wenn man, mit Benutzung der logarithmischen Differenzen, die Gleichung (1) berechnet. Es muss dann nothwendig der $\log \underset{\cdot\;\cdot}{0.2}$ auf beiden Seiten übereinstimmen, was zur Prüfung dient, überdies aber muss er einerseits die Correctionen $\binom{1}{0}$; $\binom{2}{0}$; $\binom{0}{2}$, andererseits die Correctionen $\binom{2}{0}$; $\binom{3}{0}$; $\binom{0}{2}$ mit sich führen, wodurch sich also die Gleichung

$$0=0+g_1\binom{1}{0}+g_2\binom{2}{0}+g_3\binom{3}{0}+g_4\binom{0}{2}$$

oder durch eine leichte Umgestaltung

$$(5)\quad \binom{0}{2}=h_1\binom{1}{0}+h_2\binom{2}{0}+h_3\binom{3}{0}$$

ergiebt. Man hat also, sobald demnächst $\binom{1}{0}$; $\binom{2}{0}$; $\binom{3}{0}$ bekannt sind, auch schon den definitiven Werth von $\log \underset{\cdot\;\cdot}{0.2}$, wenn man ihn durch Substitution zu finden vorzieht.

Wären nun die drei Punkte 1, 2, 3 allein angeschnitten, und also nichts auszugleichen, so würde die Rechnung doch eben so gemacht werden müssen, wenn man den Einfluss zu wissen wünschte, welchen die unvermeidlichen Fehler der Visirlinien auf die Orientirung ausübten.

Sollen nun aber w e i t e r die übrigen angeschnittenen Punkte

zur Ausgleichung aller Visirlinien benutzt werden, so giebt jeder von ihnen eine Bedingungsgleichung dritter Klasse in der für Auffindung der definitiven Distanzen bequemsten Form, wenn man eine weitere Distanz aus zwei Dreiecken berechnet, in welchen je eine Distanz zweier gegebenen Punkte vorkommt. Die Winkel dieser Dreiecke lassen sich nämlich durch die noch zu verbessernden Richtungen der Visirlinien, durch die gegebenen (als absolut genau betrachteten) Winkel zwischen den gegebenen Verbindungslinien und durch q (oder r) ausdrücken. Demnach hat man mit Hülfe der Gleichung (5) jedesmal eine Bedingungsgleichung zwischen lauter Richtungs-Verbesserungen.

Wäre z. B. ein Punkt 4 zwischen 2 und 3 und jenseits der Linie $\underset{\cdot\,\cdot}{2.3}$ angeschnitten, so hätte man entweder $\underset{\cdot\,\cdot}{2.4}$ und $\overset{4.3}{2}$ oder $\underset{\cdot\,\cdot}{3.4}$ und $\overset{2.4}{3}$ oder endlich beide Paare von Grössen zu benutzen, um entweder $\log \underset{\cdot\,\cdot}{0.2}$ oder $\log \underset{\cdot\,\cdot}{0.3}$ oder $\log \underset{\cdot\,\cdot}{0.4}$ doppelt auszudrücken. Man hat also die Wahl zwischen den drei endlichen Gleichungen

$$\underset{\cdot\,\cdot}{0.2} = \frac{\underset{\cdot\,\cdot}{2.3}}{\sin \overset{2.3}{0}} \sin\left(\overset{2.3}{0} + r\right) = \frac{\underset{\cdot\,\cdot}{2.4}}{\sin \overset{2.4}{0}} \sin\left(\overset{2.4}{0} + \overset{4.3}{2} + r\right),$$

$$\underset{\cdot\,\cdot}{0.3} = \frac{\underset{\cdot\,\cdot}{2.3}}{\sin \overset{2.3}{0}} \sin r = \frac{\underset{\cdot\,\cdot}{4.3}}{\sin \overset{4.3}{0}} \sin\left(180^0 - \overset{2.3}{0} - r + \overset{2.4}{3} + \overset{4.3}{0}\right),$$

$$\underset{\cdot\,\cdot}{0.4} = \frac{\underset{\cdot\,\cdot}{2.4}}{\sin \overset{2.4}{0}} \sin\left(\overset{4.3}{2} + r\right) = \frac{\underset{\cdot\,\cdot}{4.3}}{\sin \overset{4.3}{0}} \sin\left(180^0 - \overset{2.3}{0} - r + \overset{2.4}{3}\right).$$

In allen drei Fällen erhält man, wenn für $(r) = \binom{0}{2}$ sein Werth aus (5) eingeführt wird, eine Bedingungsgleichung von der Form

$$0 = w_1 + a_1 \binom{1}{0} + a_2 \binom{2}{0} + a_3 \binom{3}{0} + a_4 \binom{4}{0}.$$

Sollte aber etwa $\underset{\cdot\,\cdot}{2.4}$ zufällig fehlen und statt dessen $\underset{\cdot\,\cdot}{1.4}$ bekannt sein, so beständen drei andere endliche Gleichungen zur Auswahl, die auf dieselbe Bedingungsgleichung führten.

Man wird also unter den verschiedenen Wegen zu letzterer denjenigen wählen, welcher das grösste w_1 zu geben verspricht, oder wenn keiner sich hierin überwiegend vortheilhaft zeigt, den, welcher die bequemste Rechnung darbietet (vergl. S. 256.).

Sind nun die $n-3$ Bedingungsgleichungen, welche bei n vorgegebenen Punkten sich offenbar finden müssen, auf diese Weise aufgestellt, so wird e n d l i c h zu den Correlaten-Gleichungen und Normal-Gleichungen auf die bekannte Weise fortgeschritten.

Die ohnehin nöthige Prüfungsrechnung giebt dann die definitiven Distanzen, so wie auch aus dem ausgeglichenen Winkel die definitiven Azimuthe des Punkts in jedem gegebenen Punkte folgen.

Zweiter Nachtrag.

Wenn auf einem einzuschaltenden einzelnen Punkte keine Winkel gemessen sind, sondern derselbe bloss von mehreren gegebenen Punkten aus angeschnitten ist, deren also, wenn Ausgleichung statt finden soll, wenigstens drei sein müssen; so kann es allerdings vorkommen, dass man nur die Richtungen zwischen je zwei und zwei der gegebenen Punkte benutzen kann. Dieser mögliche Fall wird aber in der wirklichen Praxis nur höchst selten vorkommen. Vielmehr wird man hier fast immer ein vollständig gegebenes System zum Grunde zu legen und mit Rücksicht auf gegebene Richtungen und Seitenverhältnisse desselben auszugleichen haben.

Es ist in dieser Beziehung also (zu S. 304.) nachzutragen, dass man höchtens ausnahmsweise sich mit einer solchen Bedingungsgleichung wird begnügen dürfen, als welche in dem Rechnungs-Beispiel S. 202. vorkam, vielmehr in den regelmässig eintretenden Fällen nach derselben Weise einzuschalten hat, wie ich (Beiträge S. 173.) den Frauenberg zwischen vier Hauptpunkte einschaltete.

Vorausgesetzt also, dass eine beliebige Anzahl von Punkten in einem vollständigen System von Richtungen und Distanzen vorgegeben und nun ein einzelner bloss angeschnittener Punkt 0 mit Ausgleichung einzuschalten sei; kommt es zuerst auf Abzählung der Bedingungsgleichungen dritter Klasse an.

Hier findet sich leicht, dass allgemein für n gegebene Punkte $n-2$ unabhängige Bedingungsgleichungen bestehen (wie auch beispielsweise Ausgl. R. S. 305. und Beiträge S. 173. und 174. vorkommt). Denkt man sich nämlich in dem gegebenen System diejenigen Linien gezogen, welche zur Bestimmung desselben durch lauter Richtungen ausreichen (mit Weglassung der überschüssigen), so sind deren $2n-3$. Hierzu kommen nun die n Anschnittsrichtungen; also hat man in n. 58. (S. 277.) zu setzen: $l=3n-3$; $p=n+1$, und erhält also

$$z_{b_3}=l-2p+3=n-2.$$

Dasselbe ergiebt sich, wenn man die Linienverbindung zwischen zwei und zwei der gegebenen Punkte als Polygon betrachtet, in welchem alle Seiten und Winkel gemessen sind. Kommt dann der Punkt 0 mit seinen n Anschnitten hinzu, so hat man in n. 59 (S. 326.) zu setzen $l_\varrho=2n$; $l_\lambda=n$; $p=n+1$; $t=0$ und erhält also zusammen n Bedingungsgleichungen, von welchen aber nach derselben Formel ($l_\varrho=n$; $l_\lambda=n$; $p=n$; $t=0$ gesetzt) zwei dem gegebenen System angehörige als erfüllt vorausgesetzt werden; so dass für die Einschaltung nur $n-2$ übrig bleiben.

Was nun die Aufsuchung und Darstellung betrifft, so ist es auch hier wieder im Allgemeinen unter den obigen Umständen am bequemsten, von den (als absolut genau vorausgesetzten) Distanzen der gegebenen Punkte von einander auszugehen, und die Logarithmen der Distanzen des einzuschaltenden Punkts von jenen zu suchen, um deren Differenzen für die Bedingungsgleichungen zu benutzen, wie dieses im Besonderen für drei gegebene Punkte (S. 305.) vorgeschrieben ist.

Wäre also z. B. der Punkt 0 von fünf gegebenen Punkten angeschnitten, so hätte man etwa die drei endlichen Gleichungen:

$$\underset{\cdot\ \cdot}{.2} = \frac{\underset{\cdot\ \cdot}{1.2} \cdot \sin\genfrac{}{}{0pt}{}{2.0}{1}}{\sin\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{2.0}{1}+\genfrac{}{}{0pt}{}{0.1}{2}\right)} = \frac{\underset{\cdot\ \cdot}{2.3} \cdot \sin\genfrac{}{}{0pt}{}{0.2}{3}}{\sin\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{3.0}{2}+\genfrac{}{}{0pt}{}{0.2}{3}\right)},$$

$$\underset{\cdot\ \cdot}{0.3} = \frac{\underset{\cdot\ \cdot}{2.3} \cdot \sin\genfrac{}{}{0pt}{}{3.0}{2}}{\sin\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{3.0}{2}+\genfrac{}{}{0pt}{}{0.2}{3}\right)} = \frac{\underset{\cdot\ \cdot}{3.4} \cdot \sin\genfrac{}{}{0pt}{}{0.3}{4}}{\sin\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{4.0}{3}+\genfrac{}{}{0pt}{}{0.3}{4}\right)},$$

$$\underset{\cdot\ \cdot}{0.4} = \frac{\underset{\cdot\ \cdot}{3.4} \cdot \sin\genfrac{}{}{0pt}{}{4.0}{3}}{\sin\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{4.0}{3}+\genfrac{}{}{0pt}{}{0.3}{4}\right)} = \frac{\underset{\cdot\ \cdot}{4.5} \cdot \sin\genfrac{}{}{0pt}{}{0.4}{5}}{\sin\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{5.0}{4}+\genfrac{}{}{0pt}{}{0.4}{5}\right)}$$

logarithmisch auszuführen, und erhielte dadurch die drei Bedingungsgleichungen

$$0 = w_1 + a_1\binom{0}{1} + a_2\binom{0}{2} + a_3\binom{0}{3},$$

$$0 = w_2 + b_2\binom{0}{2} + b_3\binom{0}{3} + b_4\binom{0}{4},$$

$$0 = w_3 + c_3\binom{0}{3} + c_4\binom{0}{4} + c_5\binom{0}{5}.$$

Es bedarf keiner Erinnerung, dass man eben so gut den doppelten Ausdruck von $\underset{\cdot\ \cdot}{0.2}$; $\underset{\cdot\ \cdot}{0.4}$; $\underset{\cdot\ \cdot}{0.1}$ oder jeder beliebigen Dreizahl von Anschnittslinien zum Grunde legen könnte; und dass sich die Auswahl nach den bewussten practischen Rücksichten bestimmt.

XXII.

Ueber die Verwandlung der Quadratwurzeln in unendliche periodische Kettenbrüche.

Von dem

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Es lässt sich bekanntlich jede Quadratwurzel aus einer positiven ganzen Zahl in einen unendlichen und periodischen Kettenbruch auflösen; die hierzu nöthigen Operationen sind leicht aus einem einzelnen Falle zu ersehen. Um z. B. $\sqrt{28}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, bemerke man zuvörderst, dass $\sqrt{28}=5$ plus einem Bruche sein müsse, und setze demnach

$$\sqrt{28}=5+\frac{1}{x_1},$$

woraus folgt:

$$x_2=\frac{1}{\sqrt{28}-5}=\frac{\sqrt{28}+5}{3},$$

wenn man Zähler und Nenner mit $\sqrt{28}+5$ multiplicirt und im Nenner den Satz $(\sqrt{\alpha}-\beta)(\sqrt{\alpha}+\beta)=\alpha-\beta^2$ anwendet. Da nun $\sqrt{28}=5$ plus einem Bruche ist, so muss der Zähler $\sqrt{28}+5=10$ plus einem Bruche, folglich der Quotient $=3$ plus einem solchen sein. Deshalb sei weiter

$$x_1=\frac{\sqrt{28}+5}{3}=3+\frac{1}{x_2},$$

woraus folgt:

$$x_2=\frac{3}{\sqrt{28}-4}=\frac{\sqrt{28}+4)}{12}=\frac{\sqrt{28}+4}{4}.$$

Da der Zähler hier $=9$ plus einem Bruche ist, so setzen wir

$$x_2 = \frac{\sqrt{28}+4}{4} = 2 + \frac{1}{x_3},$$

woraus folgt:

$$x_3 = \frac{4}{\sqrt{28}-4} = \frac{4(\sqrt{28}+4)}{12} = \frac{\sqrt{28}+4}{3}.$$

Der fernere Gang der Rechnung ist jetzt:

$$x_3 = \frac{\sqrt{28}+4}{3} = 3 + \frac{1}{x_4},$$

$$x_4 = \frac{3}{\sqrt{28}-5} = \frac{\sqrt{28}+5}{1} = 10 + \frac{1}{x_5},$$

$$x_5 = \frac{1}{\sqrt{28}-5}, \ldots$$

Hier ist aber $x_5 = x_1$, folglich wird bei weiterem Verlauf $x_6 = x_2$, $x_7 = x_3$, u. s. f. in inf. Substituiren wir jetzt von allen gefundenen Gleichungen:

$$\sqrt{28} = 5 + \frac{1}{x_1}, \quad x_1 = 3 + \frac{1}{x_2}, \quad x_2 = 2 + \frac{1}{x_3},$$

$$x_3 = 3 + \frac{1}{x_4}, \quad x_4 = 10 + \frac{1}{x_5}, \quad x_5 = 3 + \frac{1}{x_6}, \text{ u. s. f.}$$

jede in die vorhergehende, so erhalten wir

$$\sqrt{28} = 5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}}}$$

also $\sqrt{28}$ in Form eines unendlichen periodischen Kettenbruches.

So bekannt nun Dieses ist, so wenig scheint man sich um die Eigenschaften der einzelnen periodisch vorkommenden Nenner bekümmert zu haben. Eine nur flüchtige Untersuchung dieses Gegenstandes, welche für anderweite Zwecke unternommen wurde, gab folgende bemerkenswerthe Resultate.

1) Ist die Periode zweigliedrig, also der Kettenbruch von der Form

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \ldots}}}}$$

so ist b eine gerade Zahl und a ein Theiler von b, also $\frac{b}{a}$ ganz, wie z. B. in

$$\sqrt{30}=5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{10+\ldots}}}} \qquad \sqrt{40}=6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{12+\ldots}}}},$$

2) Bei einer dreigliedrigen Periode wie

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{a+\ldots}}}}$$

ist $b=a$, c gerade und zugleich

$$\frac{ac+1}{a^2+1}$$

eine ganze Zahl. Da hier wegen des geraden c der Zähler immer ungerade ist, so muss folglich a immer gerade sein, weil sonst der Nenner gerade würde.

Beispiele:

$$\sqrt{41}=6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{2+\ldots}}}} \qquad \sqrt{1613}=40+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{80+\cfrac{1}{6+\ldots}}}}$$

3) Ist die Periode viergliedrig, also der Kettenbruch von der Form:

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{a+\ldots}}}}}$$

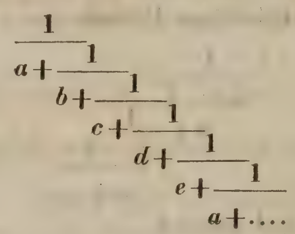
so ist $c=a$, ferner d gerade und der Ausdruck

$$\frac{abd+b+d}{a^2b+2a}$$

eine ganze Zahl, wie z. B. in dem oben entwickelten Kettenbruche für $\sqrt{28}$ und den folgenden:

$$\sqrt{248}=15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{30+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}} \qquad \sqrt{1248}=35+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{17+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{70+\cfrac{1}{3+\ldots}}}}}$$

4) Enthält die Periode fünf Glieder, steht also der Kettenbruch unter der Form:



so ist e eine gerade Zahl, ferner:

$$abc+a+c=bcd+b+d$$

und

$$\frac{bcde+bc+be+de+1}{abcd+ab+ad+cd+1}$$

eine ganze Zahl, was man z. B. an den Kettenbrüchen:

$$\sqrt{13}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}} \qquad \sqrt{29}=5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}}}$$

bestätigt finden wird.

Ueberhaupt ist in jeder Periode der letzte Nenner das Doppelte der ganzen in der gesuchten Wurzel steckenden Zahl. Für die übrigen Eigenschaften aber wollte sich auf dem Wege, welchen ich einschlug, kein allgemeines Gesetz entdecken lassen.

Das Mitgetheilte reicht wohl hin, um zu zeigen, dass hier noch ein weites Feld zur Bearbeitung offen liegt, welches vielleicht auch für die Theorie der Zahlen manche Ausbeute gewähren könnte.

XXIII.

Ueber die im vorhergehenden Aufsatze aufgestellten Sätze.

Von

Herrn Richard Müller,

Studirenden der Mathematik zu Jena.

Die Periode eines periodischen Kettenbruches x sei $n$gliedrig, q sei der letzte, p der vorletzte Nenner der Periode, so dass

$$x=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\ldots}} \qquad +\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\ldots}}}}$$

Da die Periodenzahl unendlich gross ist, so wird der Werth von x nicht geändert, wenn wir die erste Periode ganz weglassen und den Kettenbruch erst mit der zweiten Periode beginnen; es ist mithin der Theil des Kettenbruchs, der nach dem ersten q noch folgt, selbst gleich x, und folglich

$$x=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\ldots}} \qquad +\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+x}}.$$

Auf diese Weise ist es uns gelungen, den unendlichen Kettenbruch in eine endliche Form zu bringen, in welcher es uns allein möglich wird, seine Eigenschaften zu untersuchen.

Bezeichnen wir nun die einzelnen Näherungsbrüche des Ketten-

bruchs der Reihe nach mit $\frac{P_1}{Q_1}$, $\frac{P_2}{Q_2}$, etc., so wird der Näherungsbruch, der zum Nenner p gehört, durch $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ und der zu q gehörige durch $\frac{P_n}{Q_n}$ zu bezeichnen sein, da p der $(n-1)$ste und q der $n$te Nenner des Kettenbruchs ist. Nun wissen wir aber aus der Lehre von den Kettenbrüchen, wie die einzelnen Näherungsbrüche mittelst der Partialnenner aus einander berechnet werden können, dass nämlich

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{q \cdot P_{n-1} + P_{n-2}}{q \cdot Q_{n-1} + Q_{n-2}}.$$

Dieser Näherungsbruch $\frac{P_n}{Q_n}$ geht nun aber in den wahren Werth x des Kettenbruchs über, wenn wir $q+x$ statt q setzen, und es ist also

$$x = \frac{(q+x)\, P_{n-1} + P_{n-2}}{(q+x)\, Q_{n-1} + Q_{n-2}},$$

$$Q_{n-1}\, x^2 + (q Q_{n-1} + Q_{n-2})\, x = P_{n-1}\, x + q\, P_{n-1} + P_{n-2},$$

$$Q_{n-1}\, x^2 + (q\, Q_{n-1} + Q_{n-2} - P_{n-1})\, x = q P_{n-1} + P_{n-2},$$

$$x^2 + \left(\frac{q\, Q_{n-1} + Q_{n-2} - P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right) x = \frac{q P_{n-1} + P_{n-2}}{Q_{n-1}},$$

$$x^2 + \left(q + \frac{Q_{n-2} - P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right) x = \frac{P_n}{Q_{n-1}},$$

da bekantlich $P_n = q P_{n-1} + P_{n-2}$ ist. Wir haben auf diese Weise eine quadratische Gleichung erhalten. Soll nun der fragliche Kettenbruch einem Ausdrucke von der Form $-u \pm \sqrt{v}$, wo u und v ganze positive Zahlen bedeuten, gleich sein, so muss der Coefficient von x ganz und gerade sein, weil in jeder quadratischen Gleichung der Coefficient der ersten Potenz von x gleich der Summe der beiden Wurzeln, also hier gleich $-2u$ ist. Das Glied ohne x ist aber immer gleich dem Producte beider Wurzeln, also $\frac{P_n}{Q_{n-1}}$ $= (-u+\sqrt{v})\,(-u-\sqrt{v}) = u^2 - v$, also eine ganze Zahl. Es muss also noch $q + \frac{Q_{n-2} - P_{n-1}}{Q_{n-2}}$ ganz und gerade sein. Da nun q schon ganz ist, so muss also auch $\frac{Q_{n-2} - P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ ganz sein; es ist aber nothwendig $Q_{n-1} > Q_{n-2}$, also um so mehr $Q_{n-1} > Q_{n-2} - P_{n-1}$, und es kann also der Bruch $\frac{Q_{n-2} - P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ nicht anders ganz werden, als indem der Zähler gleich Null wird, also $Q_{n-2} - P_{n-1} = 0$ oder $Q_{n-2} = P_{n-1}$. Da nun aber der Coefficient von x auch gerade sein soll, so muss q gerade sein.

Wir haben also die drei Haupteigenschaften gefunden:

I. $\frac{P_n}{Q_{n-1}}$ muss ganz,
II. $P_{n-1} = Q_{n-2}$ und
III. q gerade sein.

Entwickeln wir die ersten Näherungsbrüche für die Nenner $a, b, c, d,$ so finden wir der Reihe nach

$$\frac{1}{a}, \quad \frac{b}{ab+1}, \quad \frac{bc+1}{abc+a+c}, \quad \frac{bcd+b+d}{abcd+ad+cd+ab+1}.$$

Es muss also für Kettenbrüche mit zweigliedrigen Perioden $\frac{b}{a}$ ganz, b gerade, also auch a gerade sein; für dreigliedrige Perioden muss $\frac{bc+1}{ab+1}$ ganz, $b=a$ und c gerade sein; für viergliedrige Perioden $\frac{bcd+b+d}{abc+a+c}$ ganz, $bc+1=ab+1$ oder $a=c$ und d gerade sein u. s. w.

Da nun nach den Gesetzen für die Kettenbrüche

$$P_{n-1}\,Q_{n-2} - P_{n-2}\,Q_{n-1} = \pm 1,$$

und da wir $Q_{n-2} = P_{n-1}$ gefunden haben, so muss

$$(P_{n-1})^2 = P_{n-2}\,Q_{n-1} \pm 1,$$

$$P_{n-1} = \sqrt{P_{n-2}\,Q_{n-1} \pm 1}$$

sein; es muss also dieses Kreuzproduct $P_{n-2}\;Q_{n-1}$ immer um die Einheit grösser oder kleiner sein als eine Quadratzahl.

Da P_n und Q_n relative Primzahlen sein müssen und $\frac{P_n}{Q_{n-1}}$ ganz, so müssen auch Q_n und Q_{n-1} relative Primzahlen sein; ebenso müssen Q_{n-1} und Q_{n-2} es sein, da $Q_{n-2} = P_{n-1}$ und P_{n-1} prim zu Q_{n-1} sein muss.

XXIV.

Auflösung der Gleichung $x^y = y^x$ in reellen Zahlen.

Von

Herrn T. Wittstein

zu Hannover.

1.

Unter den drei directen Operationen der Arithmetik zeichnet sich das Potenziren durch die Eigenthümlichkeit aus, dass man die beiden gegebenen Zahlen, mit denen die Operation vollzogen werden soll, nämlich Basis und Exponent, nicht allgemein vertauschen darf, ohne zugleich die Potenz zu ändern. Diese für die genetische Entwickelung der elementaren Arithmetik so wichtige Thatsache führt aber zu der Frage, ob sich nicht wenigstens isolirte Zahlenpaare angeben lassen, welche der Gleichung

$$x^y = y^x \dots (1.)$$

Genüge leisten, und schliesst man dabei, wie billig, die Auflösung

$$x = y \dots (2.)$$

aus, so führt schon ein Durchsuchen der ersten Zahlen der natürlichen Zahlenreihe zu dem Resultate

$$2^4 = 4^2 \dots (3.)$$

Ob dieses Resultat das einzige ist, sei es dass man sich auf positive ganze Zahlen beschränken oder dass man auch negative Zahlen, Brüche und Irrationalzahlen zuziehen will; oder wie, wenn es nicht das einzige ist, man allgemein solche Zahlenpaare angeben kann, welche der Gleichung (1.) genügen: das zu untersuchen ist hier die Absicht. Zunächst soll von positiven Zahlen allein die Rede sein.

Aus der Gleichung (1.) folgt unmittelbar

$$\frac{y}{x} = \frac{\log y}{\log x} \dots (4.)$$

Man setze $\frac{y}{x}=1+\alpha$, denn der Werth von $\frac{y}{x}$ muss nothwendig von Eins verschieden sein, weil die Auflösung (2.) ausgeschlossen bleibt; und ausserdem wird die Allgemeinheit nicht beschränkt, wenn man unter α eine positive Zahl versteht, denn dadurch wird nur die Bestimmung eingeführt, es solle von den beiden positiven Zahlen y und x jene die grössere sein. Man hat also aus (4.)

$$\frac{y}{x}=1+\alpha, \text{ woraus } y=x(1+\alpha);$$

$$\frac{\log y}{\log x}=1+\alpha, \text{ woraus } y=x^{1+\alpha};$$

folglich

$$\left.\begin{array}{c} x^{1+\alpha}=x(1+\alpha), \\ x=(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},\ y=(1+\alpha)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} \end{array}\right\} \dots (5.)$$

Diese beiden Gleichungen enthalten die vollständige Auflösung, und lässt man darin α alle Werthe von $\alpha=0$ bis $\alpha=\infty$ durchlaufen, so erhält man alle positiven reellen Werthe von x und y, welche der Gleichung (1.) Genüge leisten.

Für $\alpha=0$ reduciren sich die Werthe von x und y nach einem bekannten Satze beide auf die Zahl $e=2{,}718\dots$, welcher Fall mithin, als der Gleichung (2.) angehörig, ausgeschlossen werden muss.

Für jeden andern Werth von α hat man

$$1+\alpha<e^\alpha=1+\alpha+\frac{\alpha^2}{1.2}+\dots,$$

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}<e,\ x<e$$

und

$$\alpha<(1+\alpha)\log(1+\alpha)=\alpha+\tfrac{1}{2}\frac{\alpha}{1+\alpha}+\tfrac{1}{3}\frac{\alpha^3}{(1+\alpha)^2}+\dots,$$

$$e^\alpha<(1+\alpha)^{1+\alpha},\ e<(1+\alpha)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}},\ y>e.$$

Ferner ist für $\alpha=\infty$

$$\lim(\log x)=\lim\frac{\log(1+\alpha)}{\alpha}=\lim\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)=0,\ \lim x=1$$

und

$$\lim(\log y)=\lim\frac{(1+\alpha)\log(1+\alpha)}{\alpha}=\lim\{1+\log(1+\alpha)\}=\infty,$$

$$\lim y=\infty.$$

Folglich liegen alle Werthe von x, welche in den Gleichungen (5.) enthalten sind, zwischen 1 und e, alle Werthe von y dagegen zwischen e und ∞; oder mit andern Worten, jeder Zahl $>e$ cor-

respondirt eine andere $<e$ und >1, die mit ihr verbunden eine Auflösung der Gleichung (1.) liefert.

Eine Folge hieraus ist, dass zu keiner Zahl <1 und >0 eine correspondirende positive Zahl angegeben werden kann, die mit ihr die Gleichung (1.) löst; man überzeugt sich davon aber auch leicht unmittelbar, denn bedeuten x und y zwei Zahlen, die >1 sind, so hat die Gleichung

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{y}}=\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{x}} \dots \quad (6.)$$

unmittelbar zur Folge

$$x^x=y^y,$$

welches absurd ist, wenn x und y verschieden von einander sein sollen.

2.

Soll die Auflösung der Gleichung (1.) auf rationale positive Werthe von x und y beschränkt bleiben, so wird auch die Hülfszahl α, ihrer Definition gemäss, nur rational gewählt werden dürfen. Es sei deshalb

$$1)\quad \alpha=\frac{m}{n},$$

wo m und n von Eins verschieden und ausserdem relative Primzahlen sein mögen, so erhält man aus (5.)

$$x=\left(\frac{m+n}{n}\right)^{\frac{n}{m}},\ y=\left(\frac{m+n}{n}\right)^{\frac{m+n}{m}} \dots \quad (7.)$$

und sollen diese Werthe rational werden, so müssen, wenn man

$$(m+n)^{\frac{1}{m}}=p,\quad n^{\frac{1}{m}}=q$$

setzt, p und q ganze Zahlen sein. Nimmt man ferner $p-q=r$, so sind mithin q und r an die Bedingung gebunden:

$$(q+r)^m-q^m=m,$$

$$mq^{m-1}r+\frac{m(m-1)}{1.2}q^{m-2}r^2+\dots+r^m=m;$$

welcher Gleichung augenscheinlich durch positive ganze Werthe von q und r nicht Genüge geleistet werden kann. Die Annahme $\alpha=\frac{m}{n}$ liefert mithin keine rationalen Werthe von x und y.

Es sei ferner

$$2)\quad \alpha=\frac{1}{n},$$

wo n eine beliebige ganze Zahl bedeuten mag, so hat man aus (5.) jetzt

$$x=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \quad y=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \quad \ldots . \text{(8.)}$$

welche Werthe unmittelbar rational sind, und deshalb Auflösungen der gegebenen Aufgabe enthalten. Man hat z. B.

$$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots;$$

$$x=2,\ \frac{9}{4},\ \frac{64}{27},\ \frac{625}{256},\ldots;$$

$$y=4,\ \frac{27}{8},\ \frac{256}{81},\ \frac{3125}{1024},\ldots.$$

Man bemerkt leicht, dass alle diese Werthe von x und y zwischen den Zahlen 2 und 4 liegen.

Es sei endlich

$$3) \quad \alpha=m$$

und m eine beliebige ganze Zahl, so wird

$$x=(1+m)^{\frac{1}{m}},\ y=(1+m)^{\frac{1+m}{m}} \quad \ldots . \text{(9.)}$$

und damit diese Werthe rational werden, muss $(1+m)^{\frac{1}{m}}$ eine ganze Zahl sein. Aber zwischen 1 und e, in welchem Intervalle alle Werthe von $(1+m)^{\frac{1}{m}}$ enthalten sind, liegt nur die einzige ganze Zahl 2, und ihr entspricht der Werth $m=1$, folglich ist

$$x=2,\ y=4$$

die einzige rationale Auflösung unter der Voraussetzung $\alpha=m$. Dieselbe fand sich aber auch schon vorhin für $\alpha=\frac{1}{n}$.

Fasst man die vorstehenden Entwickelungen zusammen, so findet man, dass in der That die Gleichung (3.) die einzige mögliche Auflösung von (1.) in positiven ganzen Zahlen enthält, während der Auflösungen in rationalen Brüchen beliebig viele möglich sind, die durch die Gleichungen (8.) gegeben werden.

Nebenbei kann man noch bemerken, dass die Werthe in (3.) zugleich die Eigenschaft haben, dass für sie auch die Potenz x^y oder y^x rational ausfällt, welches für alle andern aus (8.) gezogenen Werthe von x und y nicht der Fall ist.

3.

Um jetzt die Auflösung der Gleichung (1.) auch auf negative Werthe der Unbekannten auszudehnen, darf zunächst die Bemerkung nicht übersehen werden, dass man mit einer Potenz einer

negativen Zahl nur dann eine bestimmte Bedeutung verbinden kann, wenn der Exponent rational ist, während bei irrationalem Exponenten das Vorzeichen der Potenz durchaus unbestimmbar bleibt. Aus diesem Grunde wird hier, wo es sich um die Gleichheit solcher Potenzen handelt, nur von rationalen Zahlen die Rede sein können.

Es sei nun zuerst die Gleichung

$$(-x)^{-y} = (-y)^{-x} \ldots\ (10.)$$

zu lösen, wo x und y positiv sein sollen, so hat man daraus sogleich

$$(-x)^y = (-y)^x,$$

welche Gleichung in die beiden

$$x^y = y^x \text{ und } (-1)^y = (-1)^x$$

zerfällt. Die erste dieser beiden Gleichungen wird aber nur durch die in (8.) gegebenen rationalen Werthe von x und y aufgelöst, und da dieselben Werthe auch der zweiten Gleichung Genüge leisten, so enthalten sie mithin, wenn man ihnen das Minuszeichen vorsetzt, die vollständige Auflösung der Gleichung (1.) in negativen rationalen Zahlen.

Es sei zweitens die Gleichung

$$(-x)^y = y^{-x} \ldots\ (11.)$$

gegeben, wo wiederum x und y positive Zahlen bedeuten, so bemerke man, dass hier nicht $x=y$ sein kann. Ferner ist zur Realisirung dieser Gleichung nothwendig und hinreichend, dass

$$x^y = y^{-x} \text{ und } (-1)^y = 1$$

sei. Aus der ersten dieser Gleichungen zieht man sogleich

$$\frac{y}{x} = -\frac{\log y}{\log x},$$

und setzt man $\frac{y}{x} = \mu$, wo μ positiv und von Eins verschieden sein muss, so hat man

$$y = x\mu, \qquad y = x^{-\mu};$$

folglich

$$x = \mu^{-\frac{1}{\mu+1}}, \quad y = \mu^{\frac{\mu}{\mu+1}} \ldots\ (12.)$$

Sollen nun x und y rational werden, so muss auch μ rational sein. Man setze deshalb

$$\mu = \frac{m}{n},$$

wo m und n ganze Zahlen sind, jedoch weder gleichzeitig $=1$

sein, noch einen von Eins verschiedenen gemeinschaftlichen Divisor besitzen sollen. Die Werthe (12.) verwandeln sich dadurch in folgende:

$$x=\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{m+n}}, \quad y=\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{m+n}};$$

und damit diese rational werden, müssen

$$m^{\frac{1}{m+n}}=p \text{ und } n^{\frac{1}{m+n}}=q$$

ganze Zahlen sein. Ist nun $m>n$ (die Annahme $n>m$ ändert hieran nichts Wesentliches, weil durch eine Vertauschung von m und n zugleich x und y vertauscht werden), und folglich $p>q$, und setzt man $p-q=r$, so sind q und r an die Gleichung gebunden:

$$(q+r)^{m+n}+q^{m+n}=m+n,$$

$$2q^{m+n}+(m+n)q^{m+n-1}r+\frac{(m+n)(m+n-1)}{1\,.\,2}q^{m+n-2}r^2+\ldots+r^{m+n}=m+n$$

welche Gleichung durch keine positive ganze Zahlen für q und r aufgelöst werden kann. Mithin ist die Gleichung (11.) in rationalen Zahlen nicht lösbar, oder die Gleichung (1.) ist nicht lösbar durch solche Paare rationaler Zahlen, von denen die eine positiv, die andere negativ ist. Beiläufig kann man aus dieser Entwickelung noch schliessen, dass die Gleichung

$$x^y\,.\,y^x=1$$

nur die eine Auflösung $x=y=1$ in positiven rationalen Zahlen zulässt.

4.

Durch geometrische Betrachtungen kann man sich auf mehr als eine Art die vorstehenden Resultate zur Veranschaulichung bringen. Nur kann dabei keine Unterscheidung der rationalen von den irrationalen Werthen stattfinden, aus welchem Grunde hier auch negative Werthe unberücksichtigt bleiben müssen.

Es sei ein Werth $y=a$ gegeben, und man sucht den zugehörigen Werth von x aus der Gleichung

$$x^a=a^x \ldots. \quad (13.)$$

Man betrachte

$$z=x^a \text{ und } z'=a^x \ldots. \quad (14.)$$

als Ordinaten zweier Curven für einerlei Abscisse x, so werden die Durchschnittspunkte dieser Curven, in denen $z=z'$ ist, die Auflösungen der Gleichung (13.) enthalten.

Es sei nun zuerst $a<1$, so ist für $x=0$

$$z<z',$$

dagegen für $x=\infty$ wird $\lim \frac{z}{z'}=\infty$, folglich

$$z > z',$$

mithin müssen sich die beiden Curven in einer ungeraden Anzahl von Punkten, also wenigstens einmal schneiden. Dieses geschieht aber augenschninlich in dem Punkte $x=a$, und da die Curven vor diesem Punkte einander ihre convexen Seiten, nach demselben aber ihre concaven Seiten zuwenden (wie man leicht aus der Entwickelung des zweiten Differentialquotienten findet), so können sie keinen zweiten Punkt mit einander gemein haben.

Es sei ferner $a=1$, so werden beide Curven in gerade Linien übergehen, die gleichfalls einen Durchschnittspunkt haben, nämlich für $x=a$.

Es sei endlich $a>1$, so ist für $x=0$

$$z < z',$$

und für $x=\infty$ wird $\lim \frac{z}{z'}=0$, folglich

$$z < z',$$

mithin muss die Anzahl der Durchschnittspunkte, wenn es deren giebt, gerade sein. Nun aber haben beide Curven wieder den Punkt $x=a$ mit einander gemein, und aus der Betrachtung der Differentialquotienten

$$\frac{dz}{dx}=a x^{a-1}, \quad \frac{dz'}{dx}=a^x \log a$$

geht hervor, dass beide sich nur dann für $x=a$ auf einerlei Werth reduciren, wenn $\log a=1$ oder $a=e$ ist. Folglich wird der Punkt $x=a$ ein Berührungspunkt werden, wenn $a=e$ ist, dagegen ein Durchschnittspunkt, wenn a von e verschieden ist, mithin muss es im letzten Falle noch einen zweiten Durchschnittspunkt geben; und zwar, weil für $x=a$

$$\frac{dz}{dx} > \frac{dz'}{dx},$$

wenn $\log a<1$ also $a<e$, dagegen

$$\frac{dz}{dx} < \frac{dz'}{dx},$$

wenn $a>e$ wird, so muss für $a<e$ der zweite Durchschnittspunkt einer Abscisse $x>a$, und für $a>e$ derselbe einer Abscisse $x<a$ entsprechen.

Fügt man diesem letzten Resultate nun noch hinzu, dass wegen der Symmetrie der Gleichung (13.) in Bezug auf x und a auch für $x<e$, $a>x$ und für $x>e$, $a<x$ sein muss, so folgt, dass der zweite Durchschnittspunkt der Curven für $a<e$ einer Abscisse $x>e$, und für $a>e$ einer Abscisse $x<e$ entsprechen wird.

Aus diesen Entwickelungen wird man schliessen, dass die beiden Curven (14.) immer einen Durchschnittspunkt besitzen, der zu der Abscisse $x=a$ gehört; dass sie aber nur dann einen zweiten Durchschnittspunkt, dessen Abscisse x von a verschieden ist, besitzen werden, wenn a zwischen 1 und e, oder zwischen e und ∞ liegt, und zwar wird im ersten Falle diese Abscisse zwischen e und ∞, im zweiten Falle zwischen 1 und e liegen: übereinstimmend mit §. 1.

5.

Eine andere geometrische Darstellung der in Rede stehenden Aufgabe ergiebt sich, wenn man die Gleichung (1.) in die Form bringt

$$x^{\frac{1}{x}}=y^{\frac{1}{y}} \;\ldots\; (15.).$$

Man setze

$$u=x^{\frac{1}{x}} \;\ldots\; (16.)$$

und betrachte diese Gleichung als Gleichung einer Curve, deren Abscissen x und deren Ordinaten u sind. Der Differentialquotient derselben

$$\frac{du}{dx}=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\log x)$$

wird in dem Intervalle von $x=0$ bis $x=\infty$ einmal Null, nämlich für $x=e$, wobei er aus dem Positiven ins Negative übergeht; folglich wächst u von $x=0$ bis $x=e$, und nimmt ab von $x=e$ bis $x=\infty$, und hat ein Maximum

$$u=e^{\frac{1}{e}} \text{ für } x=e.$$

Ferner ist lim $u=0$ für $x=0$ und lim $u=1$ für $x=\infty$, mithin wiederholen sich nach dem Maximum, nämlich von $x=e$ bis $x=\infty$, alle die Ordinaten wieder, welche vor dem Maximum von $x=1$ bis $x=e$ dagewesen sind, dagegen diejenigen Ordinaten, welche den Abscissen von $x=0$ bis $x=1$ entsprechen, kommen in der Curve nur einmal vor.

Betrachtet man nun x als Unbekannte in der Gleichung (16.), so ergibt sich zunächst, dass die Auflösung nur möglich ist für Werthe von u zwischen $u=0$ und $u=e^{\frac{1}{e}}$. Dabei hat für alle Werthe von u, welche zwischen $u=0$ und $u=1$ liegen, die Gleichung nur eine Wurzel, und diese liegt gleichfalls zwischen 0 und 1; desgleichen für $u=e^{\frac{1}{e}}$ nur eine Wurzel $=e$. Dagegen für alle Werthe von u zwischen $u=1$ und $u=e^{\frac{1}{e}}$ besitzt die Gleichung zwei von einander verschiedene Wurzeln, von denen die eine zwischen 1 und e, die andere zwischen e und ∞ liegt; und hiemit sind in der That wiederum die Ergebnisse des §. 1. zum Vorschein

gekommen, da offenbar die Auflösung der Gleichung (16.) identisch ist mit der Aufsuchung derjenigen zusammengehörigen Werthe von x und y, welche der Gleichung (15.) oder (1.) Genüge leisten.

6.

Was nun endlich die Aufgabe betrifft, zu einem gegebenen Werthe $y>1$ der Gleichung (1.) den zugehörigen Werth von x zu finden, so gelangt man dazu durch Auflösung der Gleichung (16.) für x, indem man $u=y^{\frac{1}{y}}$ als bekannt ansehen hann. Man findet nämlich leicht vermittelst der Reihe von Lagrange:

$$x=1+\log u+\frac{3}{1.2}(\log u)^2+\frac{4^2}{1.2.3}(\log u)^3+\ldots\frac{(n+1)^{n-1}}{1.2\ldots n}(\log u)^n+\ldots$$

Dividirt man den n^{ten} durch den $(n-1)^{\text{ten}}$ Coefficienten, um über die Convergenz der Reihe urtheilen zu können, so hat man

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1},$$

und da für $n=\infty$

$$\lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1}=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}=e,$$

so convergirt mithin die gegebene Reihe für alle Werthe von $\log u$ zwischen

$$\log u=-\frac{1}{e} \text{ und } \log u=\frac{1}{e}$$

oder für alle Werthe von u zwischen

$$u=e^{-\frac{1}{e}} \text{ und } u=e^{\frac{1}{e}},$$

und da für die vorliegende Aufgabe u nur zwischen $u=1$ und $u=e^{\frac{1}{e}}$ fallen kann, so convergirt die Reihe in der That in allen vorkommenden Fällen. Aber sie liefert von den beiden Wurzeln, welche die Gleichung (16.) in dem gegenwärtigen Falle besitzt, nur eine, nämlich die kleinere, wie man daraus ersieht, dass die Summe der Reihe zugleich mit u gegen 1 convergirt, und sie löst mithin nur die Aufgabe: Zu einem gegebenen Werthe $>e$ den zugehörigen Werth $<e$ zu finden; nicht aber die umgekehrte.

Anmerkung. Die vorstehenden Entwickelungen, so einfach sie sind, schienen mir der Beachtung nicht unwerth zu sein, theils weil die erörterte Frage an sich von Interesse ist, theils aber auch, weil dadurch der Werth $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ und seine Gränze, die Zahl e, in einen so nahen und innigen Zusammenhang mit der elementaren Theorie der Potenzen treten, dass ihrer schon auf einer viel frühern Unterrichtsstufe, als es gewöhnlich der Fall ist,

Erwähnung geschehen kann. Diese letztere Bemerkung soll hauptsächlich Pädagogen gesagt sein, für welche ich wohl nicht hinzuzufügen brauche, dass für die Stufe, welche ich andeutete, eine viel mehr elementare Darstellung des Gegenstandes nöthig sein wird, als ich hier gegeben habe.

XXV.

Auszug aus einem Briefe

des

Herrn Professor Steichen

an der École militaire Belgique zu Brüssel

an den

Herausgeber.

J'ai l'honneur de vous communiquer quelques observations, concernant certains passages da la théorie analytique du système du monde par Mr. de Pontécoulant. Je ne saurais admettre la comparaison que l'on établit habituellement entre le mouvement sur un arc elliptique et le mouvement d'un mobile qui oscille linéairement de part et d'autre d'un centre fixe qui attire avec une énergie inversement proportionnelle au quarré de la distance, et j'admettrai encore moins les conclusions que les auteurs en déduisent par le moyen du beau théorème d'Euler et de Lambert qui fait connaître la durée du mouvement en fonction de la corde et des rayons vecteurs extrêmes (voir l'ouvrage cité. p. 277. et p. 291. (h).). Pour justifier mon opinion, je resoudrai directement la question suivante: Un corps ou un simple point matériel d'abord au repos vient à être attiré par un centre fixe de masse μ. On demande d'examiner les circonstances du mouvement dans l'hypothèse que cette masse μ laisse au mobile un libre passage et que l'attraction soit en raison inverse du quarré des distances.

Solution. Soit k'^2 l'accélération de l'unité de masse à l'unité de distance; $\mu k'^2$ exprimera donc l'accélération du centre donné C à l'unité de distance. Considérons le mouvement pendant l'instant dt, qui succède au temps t déjà écoulé depuis le point de départ A du mobile qui est parvenu après t en un point M intermédiaire entre A et C. En posant $MC=z$, $MA=x$, $AC=R_1$, on obtient l'équation differ. seconde:

$$\frac{d^2x}{dt^2} \text{ ou} -\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{k'^2\mu}{z^2}.$$

Cette équation étant intégrée une première fois nous donnera:

$$\frac{dz^2}{dt^2} = \text{Const.} + k'^2 . \mu . \frac{1}{z} = c + \frac{k'^2 \mu}{z} \dots (1).$$

Si l'on determine la constante d'après la condition de $-\frac{dz}{dt}=0$, et de $z=R_1$, il viendra:

$$\frac{dz^2}{dt^2} = \frac{k'^2\mu}{R_1} \cdot \frac{R_1 - z}{z}, \text{ partant } -\frac{dz}{dt} = k' \sqrt{\frac{\mu}{R_1}} \cdot \sqrt{\frac{R_1 - z}{z}} \dots (2).$$

On prend dans cette équation $\frac{dz}{dt}$ avec le signe $-$, parceque les éléments dz, dt varient en sens contraire l'un de l'autre; si l'on pose encore pour simplifier $k'\sqrt{\frac{\mu}{R_1}} = H$, l'équation trouvée devient:

$$H . dt = -\frac{z . dz}{\sqrt{R_1 z - z^2}} \dots (2).$$

Si l'on intégre et que l'on nomme c' la constante amenée par cette opération, on obtient:

$$H . t = c' + \sqrt{R\ z - z^2} + R_1 . \text{arc}\left(\text{tang} = \sqrt{\frac{R_1 - z}{z}}\right);$$

et comme en comptant le temps dès l'instant du départ en A on doit avoir à la fois $t=0$, $z=R_1$, il vient $c'=0$ et

$$H . t = \sqrt{R_1 z - z^2} + R_1 . \text{arc}\left(\text{tang} = \sqrt{\frac{R_1 - z}{z}}\right) \dots (A).$$

De là on conclut facilement pour la durée du mouvement de chûte de A jusqu'en C la valeur:

$$\tau = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R_1}{H} = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{R_1\sqrt{R_1}}{k'\sqrt{\mu}} \dots (3).$$

Dans des cas d'attraction analogues à celui que l'on examine ici de certains auteurs ont conclu que le mobile ne saurait jamais descendre au dessous du centre C, parceque alors les quantités R_1, z devenant négatives, l'expression de la vitesse au dessous du centre, donnée par l'équation (2), devenait selon eux imaginaire. Mr. de Pontécoulant a admis avec raison qu'il doit y avoir un mouvement oscillatoire égal de part et d'autre du centre d'attraction; en effet non seulement les quantités R_1 et z doivent changer de signe au dessous de C; mais il faut affuter du même changement la force $k'^2\mu$, puisque dans le cas contraire on supposerait avec Euler et d'autres, et sans s'en appercevoir qu'au dessous de C la force attractive devienne repulsive. Or en faisant ce changement complet de signes, la formule (2) reste ce qu'elle est, et elle donnera pour $-\frac{dz}{dt}$ une valeur réélle dans l'un et l'autre cas. Mais l'erreur

qu'on vient de signaler est d'autant plus difficile à éviter que dans les notations ordinaires on prend pour unité la quantité que nous nommons k'^2; ce qui revient en quelque sorte à effacer la trace d'une quantité qui doit changer de signe. Au reste cette observation, de notre part à laquelle nous avons été naturellement amené par notre système de notations dans le mouvement elliptique des planètes, a été déjà présentée sous une forme différente par d'Alembert dans ses opuscules. Mais celui-ci n'a pas resolu toutes les difficultés de la question, et nous nous proposons d'y revenir plus tard et de les éclaircir le plus que possible. Pour mieux éviter tout embarras nommons z' la distance du mobile au point C, quand il s'en écarte en dessous; on aura donc en observant que z' augmente avec le temps, et par l'équation (2):

$$\frac{dz'}{dt'} = H \cdot \sqrt{\frac{R_1 - z'}{z'}} \text{ ou } H . dt' = \frac{z' dz'}{\sqrt{R_1 z' - z'^2}} \dots \quad (2').$$

Celle-ci donnera donc par l'intégration, en nommant c' la constante:

$$H . t' = c' - \sqrt{R_1 z' - z'^2} - R_1 . \text{arc} \left(\text{tang} = \sqrt{\frac{R_1 - z'}{z'}}\right) \dots (A')$$

Or pour l'instant du passage par le centre les équations (A, A') doivent subsister à la fois: mais alors on a $z' = 0$, $z = 0$, $t' = t = \tau$;

$$\text{partant: } H . \tau = c' - R_1 . \text{arc}(\text{tang} = \infty) = c' - \frac{\pi}{2} . R_1.$$

Substituant dans cette dernière la valeur de τ fournie par l'égalité (3), on obtient $c' = \pi . R_1$, et (A') deviendra par substitution:

$$H . t' = \pi R_1 - \sqrt{R_1 z' - z'^2} - R_1 . \text{arc} \left(\text{tang} = \sqrt{\frac{R_1 - z'}{z'}}\right) \dots (B).$$

Ainsi il est démontré 1) que le mobile oscille de part et d'autre du centre et que ses excursions extrêmes de ce point sont égales entr'elles; 2) que la durée τ' d'une oscillation entière qu'on déduit de (B) en posant $z' = R_1$ a la valeur:

$$\tau' = \pi . \frac{R_1}{4} = \pi . \frac{R_1 \sqrt{R_1}}{k' \sqrt{\mu}} \dots (4),$$

qu'elle vaut par conséquent le double de la durée de chûte de A vers C, partant que les durées des demi-oscillations ascendantes et descendantes sont isochrones.

Les résultats précédents étant une fois trouvés, nous sommes en état d'apprécier le plus ou le moins de validité des assertions de Mr. de Pontécoulant. L'auteur affirme d'après Laplace "qu'une planète après avoir atteint l'extrémité du grand axe revient au point d'où elle était partie; que dans le mouvement rectiligne au contraire le corps parvenu au foyer d'attraction passe au delá et qu'il s'en écarte à une distance égale à celle dont il est d'abord descendu; desorte que ce n'est qu'après deux revolutions de la pla-

nète qu'il se retrouve au même point de départ avec elle". Cette dernière proposition est inexacte: car en supposant à l'orbite de la planète un demi-grand axe a, et une excentricité e, et faisant partir à la fois la planète et le mobile du périhélie, la 1ère avec sa vitesse propre, et l'autre avec une vitesse nulle, la planète y reviendra par ce qu'on sait après un temps $\frac{2\pi . a^{\frac{3}{2}}}{k'\sqrt{\mu}}$, tandisque le mobile n'y reviendra qu'après un temps $\frac{2\pi . a^{\frac{3}{2}}(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{k'\sqrt{\mu}}$. Cette dernière durée vaudra seulement la durée de deux revolutions de la planète dans le cas particulier ou l'on aurait $(1-e^2)^{\frac{3}{2}}=2$, équation absurde pour tous les cas imaginables du mouvement elliptique; mais la planète et le mobile se retrouveront au même point de départ commun après une revolution et une double oscillation dans le cas particulier de $e=0$, car alors les durées de mouvement deviennent égales. On n'échappera pas à nos objections en prétendant qu'il faut faire partir le mobile d'une distance $2a$ du centre; car alors la durée d'une double oscillation du mobile sera $\pi . \frac{2 . 2a\sqrt{2a}}{k'\sqrt{\mu}}$, tandisque celle d'une double révolution de la planète reste $\frac{4\pi a\sqrt{a}}{k'\sqrt{\mu}}$. D'ailleurs les mobiles auraient dans ce cas des points de départ et de retour différents. En faisant partir le mobile d'une distance $2a$ l'auteur cité (p. 294.) prend la durée de chûte sur $2a$ ou de A vers C égale à $\pi a\sqrt{a} : k'\sqrt{\mu}$, tandisque la formule (3) donne pour cette durée la valeur $\frac{\pi}{2} . \frac{2a\sqrt{2a}}{k'\sqrt{\mu}} = \pi . a^{\frac{3}{2}}\sqrt{2} : k'\sqrt{\mu}$. Mais puisque ces conclusions sont inexactes, il importe d'assigner la source première d'où elles découlent. Or en considérant avec l'auteur la chûte rectiligne d'un corps attiré par le centre fixe et partant d'une distance $2a$, on trouve selon lui que la durée du mouvement sur un espace $\varrho'-\varrho$ est exprimée par la formule (p. 293):

$$t'-t=\frac{a\sqrt{a}}{k'\sqrt{\mu}} . (z'_1-z_2-\sin z'_1+\sin z_2) \dots . (C)$$

dans laquelle on fait pour abréger:

$$\frac{a-\varrho'}{a}=\cos z'_1 , \quad \frac{a-\varrho}{a}=\cos z_2 .$$

Il nous reste donc à vérifier si en effet cette formule est identique à celle que peut fournir notre équation (A) ou (B). Dans (A) faisons d'abord $\frac{R_1-z^2}{z}=\text{tang}^2\varphi$, ce qui donne $z=R_1\cos^2\varphi =2a . \cos^2\varphi$, et $R_1 z-z^2=4a^2\sin^2\varphi$, partant:

$$H . t=2a . \sin\varphi\cos\varphi+2a . \varphi=a(2\varphi+\sin 2\varphi).$$

Concevons une seconde distance $z_1 < z$, mais comprise entre 0 et $2a$, et soit t' le temps que le mobile emploie à décrire $2a - z_1$; on aura en posant encore une fois $\frac{R_1 - z_1}{z_1} = \tang^2 \varphi'$:

$$H.t' = a(2\varphi' + \sin 2\varphi'),$$

$$\text{partant: } H(t' - t) = a(2\varphi' - 2\varphi + \sin 2\varphi' - \sin 2\varphi),$$

ou en remettant pour H sa valeur:

$$t' - t = \frac{a\sqrt{2a}}{k'\sqrt{\mu}}.(2\varphi' - 2\varphi + \sin 2\varphi' - \sin 2\varphi) \ldots (D)$$

Or jamais cette formule ne saurait être identifiée dans le sens de l'auteur à la formule (C), qui donne la durée du mouvement sur un arc elliptique par la corde et les rayons vecteurs extrêmes: 1) parceque l'irrationnel $\sqrt{2}$ entre dans le second membre de (D); et 2) parceque les sinus $\sin 2\varphi'$, $\sin 2\varphi$ ont des signes contraires à ceux des quantités $\sin z'_1$, $\sin z_2$ de la formule (C) de Lambert; ainsi la formule (C) applicable à l'évaluation de la durée du mouvement sur l'arc d'ellipse n'est pas exacte pour representer la durée du mouvement rectiligne sur une étendue $z - z_1$, c'est ce qu'on peut aussi démontrer plus directement. Posons en effet pour $R_1 = 2a$:

$$\frac{a - z_1}{a} = \cos \varepsilon', \quad \frac{a - z}{a} = \cos \varepsilon;$$

la formule (A) deviendra:

$$Ht = a.\sin \varepsilon + 2a\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

$$H.t' = a.\sin \varepsilon' + 2a\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon'}{2}\right);$$

$$\text{partant } H(t' - t) = a.(\sin \varepsilon' - \sin \varepsilon + \varepsilon - \varepsilon'),$$

$$\text{et } t' - t = \frac{a\sqrt{2a}}{k'\sqrt{\mu}}(\varepsilon - \varepsilon' + \sin \varepsilon' - \sin \varepsilon).$$

Or dans cette nouvelle transformation les angles ε, ε' sont précisement et respectivement les angles z'_1, z de la formule (C) de l'auteur; de sorte que le facteur en $\varepsilon, \varepsilon'$, $\sin \varepsilon$, $\sin \varepsilon'$ est identique à celui en z'_1, z_2, $\sin z_1'$, $\sin z_2$ de (C); mais le facteur $a\sqrt{2a} : k'\sqrt{\mu}$ diffère de son correspondant dans (C) dans le rapport de $\sqrt{2} : 1$. Je termine par l'indication de quelques autres legères erreurs que l'auteur corrige au reste dans le courant du calcul, mais qui ne laissent pas que d'embarrasser le lecteur: 1) Le 3ième terme du developpement de $\frac{r}{a}$, p. 262., doit être pris avec le signe $+$. 2) Les coëfficients de $\tang^3 \varphi$, $\tang^5 \varphi \ldots$ dans le developpement de d (dernière formule de la p. 269.) doivent aussi être corrigés. 3) p. 273. le terme multiplicateur $(1 - e) \tang^2 \frac{1}{2} v$ doit être changé en $(1 - e) \tang \frac{1}{2} v$; cette faute ne se reproduit pas

plus loins. 4) Il est vrai que la direction de la vitesse initiale d'un corps lancé dans l'espace n'influe pas sur l'espèce de la section conique (p. 286.); mais il n'est pas exact de dire (p. 287.) que si la vitesse initiale est perpendiculaire au rayon vecteur, l'orbite décrite soit un cercle; il faut encore que le mobile soit lancé avec une vitesse convenable que l'on déterminera facilement. Du reste cette observation a été déjà faite ici, mais je ne saurais me rappeler ni le nom de l'auteur ni le receuil où je crois l'avoir lue.

XXVI.

Bemerkungen über die bei dem Mechanismus der Gegenlenkung an Dampfmaschinen beschriebenen Curven.

Von dem

Herrn Dr. Haedenkamp,

Oberlehrer am Gymnasium zu Hamm in Westphalen.

Um die Kolbenstangen bei Dampfcylindern oder auch bei gewöhnlichen Pumpen während der auf- und niedergehenden Bewegung in senkrechter Richtung der Bewegung zu erhalten, dient bekanntlich der Mechanismus der Gegenlenkung. Es soll durch denselben zugleich die schädliche, die Dichtung vermindernde Reibung der Kolbenstangen in der Stopfbüchse und des Kolbens im Cylinder so viel als möglich beseitigt werden. Es hat also ein praktisches Interesse zu wissen, in wie weit der beabsichtigte Zweck durch diese Vorrichtung der Gegenlenkung erreicht werden kann. Von Praktikern veranlasst habe ich daher die für den Maschinenbau nicht unwichtige Curve untersucht, die der Einhängepunkt der Kolbenstange bei der Gegenlenkung während der auf- und niedergehenden Bewegung beschreibt, und theile deren Gleichung hier mit. Die gewöhnlichen Vorrichtungen sind folgende. Um den festliegenden Punkt E (Taf. III. Fig. 1.) dreht sich der Hebelarm ED des Balanciers, mit dessen Endpunkt D das Querstück BD beweglich verbunden ist. Mit dem andern Ende desselben wird ein zweiter Hebel, der Gegenlenker genannt, der seinen festen Drehpunkt in A hat, in Verbindung gebracht. In der Mitte C wird die Kolbenstange eingehängt. Dieser Punkt beschreibt in allen seinen mög-

lichen Lagen eine Curve, die wir hier untersuchen wollen. Eine andere Gegenlenkung ist unter dem Namen Parallelogramm bekannt und wird in der Regel bei doppeltwirkenden Dampfmaschinen angewandt. Bei dieser Vorrichtung ist an dem Arm BD (Taf. III. Fig. 2.) des Balanciers das in seinen Ecken bewegliche Parallelogramm $CDEF$ angebracht. Der Eckpunkt E, in welchem hier die Kolbenstange aufgehängt ist, beschreibt während seiner auf- und niedergehenden Bewegung vermittelst des Lenkers AF, der seinen festen Drehpunkt in A hat, die krumme Linie, die näherungsweise, so weit sich der Endpunkt der Kolbenstange in dieser bewegt, eine gerade Linie sein muss, wenn der durch die Gegenlenkung beabsichtigte Zweck erreicht werden soll.

Es sei AE (Taf. III. Fig. 1.) die Axe der x und F, die Mitte von AE, der Anfang der Coordinaten. Seien die Coordinaten des Punktes $B: x_1, y_1$; von $C: x, y$; von $D: x_2, y_2$; die Constanten $AE=2d$, $AB=r$, $BD=2a$, $DE=\varrho$. Man hat zur Bestimmung der Curve, die der Punkt C beschreibt, folgende Gleichungen:

$$(d-x_1)^2+y_1^2=r^2,\ (d+x_2)^2+y_2^2=\varrho^2,\ (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=4a^2,$$
$$2x=x_1+x_2,\ 2y=y_1+y_2.$$

Durch Elimination von x_1, x_2, y_1, y_2 erhält man zuerst diese beiden Gleichungen:

$$\frac{r^2-\varrho^2}{4}=a(x\cos\psi-y\sin\psi)-dx,$$
$$\frac{r^2+\varrho^2}{2}=\omega^2+a^2+d^2-2ad\cos\psi;$$
$$\text{worin } \omega=CF,\ \psi=CGF.$$

Hieraus erhält man, wenn noch

$$\frac{r^2-\varrho^2}{4}=\Delta^2,\quad \frac{r^2+\varrho^2}{2}=m^2$$

gesetzt wird, für die gesuchte Curve folgende Gleichung:

$$(1)\quad \left.\begin{array}{c}\omega^2[\omega^2-m^2+(a+d)^2][\omega^2-m^2+(a-d)^2]\\ -4d^2x^2(\omega^2-m^2)+4d^2\Delta^4-4dx\Delta^2(\omega^2-m^2+a^2-d^2)\end{array}\right\}=0$$

Diese Gleichung vom 6ten Grade lässt sich nur unter besondern Bedingungen in zwei Factoren vom 2ten und 4ten Grade zerlegen. Es ist nicht Zweck, die mannigfachen Formen der in dieser Gleichung enthaltenen Curven hier genauer zu untersuchen. Es genügt hier die allgemeine Gleichung mitgetheilt zu haben. Der Endpunkt der Kolbenstange beschreibt während seiner auf- und niedergehenden Bewegung ein Stück dieser Curve, welches um den Durchschnittspunkt derselben mit der Achse liegt. Dass der Weg der Kolbenstange kein gerader sein kann, ergiebt sich aus der gefundenen Gleichung. Für gegebene Constanten lässt sich die Abweichung der Tangente von der Curve in jedem beliebigen Punkte berechnen, und somit die zulässige Höhe des Kolbenhubs bestimmen.

Setzt man in der Gleichung (1) $r = \varrho$, so erhält sie eine etwas einfachere Form:

$$(2)\quad \omega^2[\omega^2 - m^2 + (a+d)^2][\omega^2 - m^2 + (a-d)^2] = 4d^2 x^2 (\omega^2 - m^2).$$

In diesem Falle schneidet die Curve die Linie AE im Punkte F, der Mitte von AE, und die auf beiden Seiten der Achse der y liegenden Arme der Curve sind auch congruent.

Die Tangente, im Punkte F an die Curve gelegt, bestimmt die Richtung der Bewegung der Kolbenstange gegen die Achse AE. Nennt man φ den Neigungswinkel, den diese Tangente mit AE macht, so findet man leicht:

$$\cos\varphi^2 = \frac{[r^2 - (a-d)^2].[(a+d)^2 - r^2]}{4r^2\, d^2}.$$

Hieraus sieht man, dass die beiden in F sich schneidenden Tangenten gleiche Neigung gegen die Achse AE haben. Construirt man aus a, d, r ein Dreieck, so ist der von d und r eingeschlossene Winkel das Complement von φ, wonach die Tangenten leicht gezeichnet werden können. Setzt man in der Gleichung (1) noch $d = r$ und $d = a$, so lässt sie sich in zwei Factoren

$$\omega^2 = m^2,\quad \omega^2[\omega^2 - m^2 + (a+d)^2] = 4d^2 x^2$$

zerlegen; der eine stellt die Gleichung eines Kreises, der andere die Fusspunktencurven einer Hyperbel dar. In diesem Falle ist $\sin\varphi = \frac{r}{2d}$,

Um die Curve, die bei ber Vorrichtung mit dem Parallelogramm von dem Endpunkte der Kolbenstange beschrieben wird, zu finden, seien (Taf. III. Fig. 2) die Coordinaten des Punktes $F: x_1, y_1$; von $C: x_2, y_2$; von $D: x_3, y_3$ und von $E: x, y$; ferner die Constanten: $AF = r$, $AB = 2d$, $CD = b$. Zur Bestimmung der Curve dienen dann folgende Gleichungen:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = b^2,\ (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 = b^2,$$
$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = a^2,\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = a^2,$$
$$(2d - x_3)^2 + y_3{}^2 = (b+\varrho)^2,\ x_1{}^2 + y_1{}^2 = r^2,\ (2d - x_2)^2 + y_2{}^2 = \varrho^2.$$

Hieraus erhält man zuerst, wenn A als Anfangspunkt der Coordinaten und AB als Achse der x genommen, $AE = \omega$ und $AGF = \psi$ gesetzt wird, folgende Gleichungen:

$$b(a^2 - r^2 - d^2 - \varrho^2 - 2b\varrho) - \varrho(r^2 - b^2 - \omega^2) + 2bdx = -2bd(b+\varrho)\cos\psi,$$
$$r^2 = b^2 + \omega^2 + 2b\omega(x\cos\psi - y\sin\psi);$$

und hieraus

$$(3)\quad \left.\begin{array}{l}\left(\dfrac{r^2 - b^2 - \omega^2}{2b}\right)^2 + \left(\dfrac{b^2 - r^2 - \omega^2}{b}\right) x(M + N\omega^2 + Rx) \\ + (M + N\omega^2 + Rx)^2\,\omega^2\end{array}\right\} = y^2,$$

wo $b(\omega^2 - r^2 - d^2 - \varrho^2 - 2b\varrho) - \varrho(r^2 - b^2 - \omega^2) + \frac{x}{b+\varrho} = M + N\omega^2 + Rx$ gesetzt ist.

Setzt man in dieser Gleichung vom 6ten Grade $b=r$, so geht ein Zweig dieser Curve durch den Anfang der Coordinaten, welcher zur senkrechten Bewegung der Kolbenstange dient. Um die Tangente in diesem Punkte und somit die Richtung der Bewegung der Kolbenstange zu erhalten, setze man in der vorhergehenden Gleichung ω und y unendlich klein, und man erhält zur Bestimmung des Neigungswinkels φ der Tangente gegen die Achse der x die folgende Gleichung:

$$\sin\varphi^2 = \frac{[a^2-d^2-(r+\varrho)^2]^2}{4d^2(r+\varrho)^2}.$$

Setzt man $r=\varrho$ und $a=d$, so lässt sich die Gleichung (3) in diese beiden Factoren zerlegen:

$$\omega^2=(b+\varrho)^2,$$

$$[(b+\varrho)^2-\omega^2]\cdot\left[\frac{\omega^2}{d^2}+\frac{(b-\varrho)^2}{r^2}-\frac{2(\varrho-b)x}{dr}\right]=\frac{4by^2}{r};$$

wovon die eine die Gleichung eines Kreises darstellt; die andere Curve schneidet die Achse der x in einem Punkte, der von A um $\frac{d}{r}(r-b)$ entfernt ist. Verlegt man den Anfangspunkt der Coordinaten in diesen Punkt, indem $x=\frac{d}{r}(r-b)+x_1$ gesetzt wird, so wird

$$\omega^2\left[(b+r)^2-y^2-\left(\frac{d}{r}(r-b)+x_1\right)^2\right]=\frac{4bd^2}{r}y^2.$$

Im Anfangspunkte der Coordinaten erhält man für die Richtung der Tangente:

$$\sin\varphi^2=\frac{r}{4d^2b}\left[(b+r)^2-\frac{d^2}{r^2}(r-b)^2\right].$$

Ist noch $r=b$, so wird die vorhergehende Gleichung diese:

$$\omega^2(4r^2-\omega^2)=4d^2y^2.$$

Hier ist $\sin\varphi=\frac{r}{d}\cdot$

XXVII.

Berechnung der Geschwindigkeit der Locomotiven auf Eisenbahnen.

Von dem

Herrn Dr. Haedenkamp,

Oberlehrer am Gymnasium zu Hamm in Westphalen.

Wenn bei einer Locomotive die Kraft der Maschine und der Widerstand, den die bewegten Massen der Bewegung entgegen stellen, bekannt sind, so kann man auch bei diesen Maschinen für jede Zeit die Geschwindigkeit und den von der Maschine zurückgelegten Raum berechnen. Wir wollen hier versuchen, unter der Voraussetzung, dass alle auf die Bewegung der Locomotive Einfluss übenden Kräfte bekannt sind, die Geschwindigkeit der Locomotive mit den daran gehängten Wagen zu bestimmen.

Die Widerstände in der Bewegung auf gerader Bahn, die wir hier allein betrachten, sind:

1. Die gleitende Reibung an den Wagenachsen.
2. Die wälzende Reibung der Radfelgen an den Schienen.
3. Der Widerstand der Luft auf die in Bewegung begriffenen Wagen des Convois.
4. Auf einer Schiefenebene das relative Gewicht der Massen, welches subtractiv oder additiv ist, jenachdem der Convoi auf der Schiefenebene herunter oder herauf geht.

Nennt man den Reibungscoefficienten der Reibung der Räder an der Achse μ, die Halbmesser der Achse und des Rades r und R und das Gewicht der Wagen und Ladung ohne das der Räder M; so ist der auf den Umfang der Räder übergetragene Widerstand der Reibung $\frac{M\mu r}{R}$. Der Coefficient μ hängt noch von dem guten Zustande der Achsen und der Achsenbüchsen ab und ist insofern veränderlich. Bei richtig abgedrehten und gut geschmierten Achsen kann μ bis zu $\frac{1}{40}$ heruntergehen. In der Regel wird μ zu 0,1 gerechnet. Bezeichnet μ' den Reibungscoefficienten der wälzenden Reibung am Radumfange und m das Gewicht der Räder, so wird dieselbe, weil sie im umgekehrten Verhältnisse der Grösse der Radhalbmesser steht, durch $\frac{(M+m)\mu'}{R}$ ausgedrückt. Diese Reibung ist im Allgemeinen auf Schienen im Verhältnisse zur Achsen-Reibung sehr gering, und kann in den meisten Fällen vernachlässigt werden.

Einer Reibung des Spurkranzes an den Bahnschienen soll zwar dadurch vorgebeugt werden, dass man dem Rade eine conische Form giebt und ausserdem den Rädern auf jeder Seite der Bahn einen gewissen Spielraum lässt, kann aber dennoch durch zufälligen Seitendruck, z. B. durch Wind und dadurch, dass die Schienen nicht in horizontaler Ebene liegen, beträchtlich werden. Wir vernachlässigen diese Art Reibung hier. Um den Ausdruck für den Widerstand der Luft zu erhalten, setze man die ganze widerstehende Fläche des Convoi's s, und die Geschwindigkeit desselben v; so wird dieser Widerstand bekanntlich durch $\varepsilon v^2 s$ ausgedrückt, wo ε der auf die Flächeneinheit ausgeübte Widerstand ist. Fasst man diese drei Widerstände zusammen so erhält man für den Gesammtwiderstand diesen Ausdruck:

$$\frac{M\mu r + (M+m)\mu'}{R} + \varepsilon s v^2 = \frac{M\mu''}{R} + \varepsilon s v^2$$

auf einer horizontalen Bahn. Auf einer unter dem Winkel ψ geneigten Ebene geht dieser Ausdruck für den Widerstand in folgenden über:

$$\frac{M\mu''}{R}\cos\psi \pm (M+m)\sin\psi + \varepsilon s v^2.$$

Zur Berechnung der bewegenden Kraft der Maschine bezeichne man den wirksamen Druck des Dampfes auf den Kolben mit dem Durchmesser d auf die Flächeneinheit durch p, nach Abzug des Luftdrucks und aller Reibungen der Maschine von der Bodenfläche des Dampfcylinders bis zur Kurbel. Der Druck auf die ganze Kolbenfläche wird durch $\frac{d^2\pi p}{4}$ ausgedrückt. Dass bei Expansionsmaschinen p nicht constant sein kann, versteht sich von selbst. Auch bei Maschinen ohne Expansion kann p während der Dauer eines Kolbenlaufes nicht genau constant sein, und dem Drucke des Dampfes im Kessel nicht entsprechen, da der Dampf durch die Dampfleitungsröhren nicht momentan aus dem Kessel in den Kolben eindringen kann, auch Wärme beim Uebergange des Dampfes verloren geht. p muss von der Geschwindigkeit, womit der Dampf in den Cylinder stürzt, abhängen. Je weiter der Dampfcanal und je grösser der Druck im Kessel, desto näher ist p einer Constante gleich. In Ermangelung genauerer Versuche, und weil immer der Unterschied unbeträchtlich, nehmen wir bei Maschinen ohne Epansion p constant. Um bei Expansionsmaschinen den Druck des Dampfes im Cylinder nach der Absperrung desselben durch eine Formel auszudrücken, benutzen wir die vom Grafen de Pambour in seinem Werke über Dampfmaschinen mitgetheilten, aus den Navierschen Versuchen abgeleiteten Formeln. Sei M das Volumen des Dampfes im Cylinder im Augenblicke der Absperrung, welcher sich unter dem Drucke p aus dem Volumen S Wasser gebildet hat; so ist nach Naviers Versuchen

$$\frac{M}{S} = \frac{1}{\alpha + \beta p},$$

wo α und β Constanten.

Ferner sei M' das Volumen Dampfes, welches sich unter dem Drucke p' nach der Absperrung aus demselben Volumen S Wasser gebildet hat, so wird

$$\frac{M'}{S} = \frac{1}{\alpha + \beta p'}.$$

Hieraus erhält man

$$\frac{M}{M'} = \frac{\alpha + \beta p'}{\alpha + \beta p}.$$

Ist nun l die ganze Länge des Kolbenlaufs und l' die Länge desselben bis zur Absperrung des Dampfes, und γ der schädliche Raum, dann ist für den um x vorgerückten Kolben

$$M = d^2\pi(l' + \gamma),\ M' = d^2\pi(l' + \gamma + x)$$

$$\text{und } \frac{l' + \gamma}{l' + \gamma + x} = \frac{\alpha + \beta p'}{\alpha + \beta p}.$$

Hieraus erhält man für den Druck auf den Kolben nach der Absperrung des Dampfes

$$p' = (\frac{\alpha}{\beta} + p)\frac{l' + \gamma}{l' + \gamma + x} - \frac{\alpha}{\beta}.$$

Da bekanntlich die Locomotive so eingerichtet ist, dass der Dampf, nachdem er seine Wirkung gethan, durch eine Röhre von geringem Durchmesser, das Blasrohr genannt, durch den Schornstein in die Luft entweicht, wodurch ein künstlicher Luftstrom erzeugt wird, der zur lebhaften Verbrennung in der Esse durchaus nothwendig ist: so kann dieser Dampf nicht augenblicklich ent weichen und muss daher während des Ausströmens noch einen Druck gegen den Kolben ausüben, der dem Drucke p entgegengesetzt ist. Aus angestellten Versuchen, die Pambour in seinem Werke über Dampfwagen mitgetheilt hat, hat sich herausgestellt, dass dieser Widerstand bei derselben Oeffnung des Blasrohres nahe der Geschwindigkeit der Locomotive proportional gesetzt werden könne. Diesen Widerstand bezeichnen wir durch $\frac{d^2\pi}{4}qv$. Die bewegende auf den Kolben wirkende Kraft der Maschine wird demnach durch $\frac{d^2\pi}{4}(p - qv)$ bei Maschinen ohne Expansion ausgedrückt. Bei Maschinen mit Expansion ist vor der Absperrung des Dampfes die Kraft auch: $\frac{d^2\pi}{4}(p - qv)$ und nach der Absperrung: $\frac{d^2\pi}{4}\left[(\frac{\alpha}{\beta} + p)\frac{l' + \gamma}{l' + \gamma + x} - \frac{\alpha}{\beta} - qv\right]$.

Diese Kraft des Dampfes wird durch die Kolbenstange, die immer ein und dieselbe Richtung beibehält, und durch die mit derselben verbundene Leitstange zur Kurbel fortgepflanzt, setzt diese und das damit verbundene Triebrad und so die Maschine und den angehängten Wagen in Bewegung. Bei dieser Einrichtung kann die Dampfkraft nicht senkrecht auf den Kurbelhalbmesser wirken und muss daher in den verschiedenen Lagen der Kurbel verschiedene Werthe annehmen. Um dies deutlich zu machen und die auf

den Umfang übergetragene Kraft des Dampfes zu berechnen, sei in Taf. III. Fig. 3. *da* ein Stück der Kolbenstange, $ac=t$ die Leitstange und $bc=\frac{1}{2}$ der Halbmesser des Krummzapfens. Nennt man nun die in der Richtung *da* wirkende unmittelbare Kraft des Dampfes P und die in c übergetragene auf bc senkrechte Kraft Q, so findet man leicht

$$Q=P\frac{\sin bca}{\cos bac}=P\sin\varphi\left[1+\frac{k\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right],$$

wo Winkel $cba=\varphi$, $\frac{1}{2t}=k$ ist.

Für die Kraft des Dampfes im zweiten Cylinder auf den andern Kurbelarm, der senkrecht auf dem ersten angenommen wird, hat man

$$Q=P\cos\varphi\left[1-\frac{k\sin\varphi}{\sqrt{1-k^2\cos^2\varphi}}\right].$$

Trägt man diese Kräfte auf den Umfang des Triebrades über, so wird für den einen Kolben die Kraft:

$$\frac{d^2 l}{2D}(p-qv)\sin\varphi\left[1+\frac{k\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right]$$

und für den andern:

$$\frac{d^2 l}{2D}(p-qv)\cos\varphi\left[1-\frac{k\sin\varphi}{\sqrt{1-k^2\cos^2\varphi}}\right];$$

wo D der Durchmesser des Triebrades.

Für beide Kräfte zusammen setzen wir der Kürze wegen: $\frac{d^2 l}{2D}(p-qv)F\varphi$. Diese Ausdrücke gelten für Maschinen ohne Expansion; für Expansionsmaschinen gelten vor der Absperrung dieselben Formeln, und nach der Absperrung muss man darin für p den obigen Werth p' setzen. Demnach wird die Kraft, welche die fortschreitende Bewegung des Convoi's auf horizontaler Bahn bewirkt, diese:

$$\frac{d^2\pi l}{2D}(p-qv)F(\varphi)-\frac{M\mu''}{R}-\varepsilon s v^2,$$

und für die beschleunigende Kraft erhält man den Ausdruck:

$$\frac{2g\left[\frac{d\ \pi l}{2D}(p-qv)F(\varphi)-\frac{M\mu''}{R}-\varepsilon s v^2\right]}{M+m+\frac{m\ ^2}{R^2}};$$

wo g den Fallraum in der ersten Sekunde und mA^2 das Moment der

Trägheit der Räder bezeichnet. Hieraus erhält man endlich nach den bekannten Gesetzen der Bewegung zur Bestimmung der Geschwindigkeit des ganzen Wagenzugs folgende Gleichung:

$$1)\quad \frac{vdv}{Rd\varphi}=2g\left[\frac{\frac{d^2\pi l}{2D}(p-qv)F(\varphi)-\frac{M\mu''}{R}-\varepsilon s v^2}{M+m+\frac{mA^2}{R^2}}\right].$$

Die Integration dieser Gleichung giebt die Geschwindigkeit für jeden Stand des Kolbens im Cylinder und in jedem Punkte der Bahn, und so die vollständige Lösung unserer Aufgabe. Indess ist von dieser Gleichung das Integral in endlicher Form nicht zu erhalten. Um hier Reihenentwickelungen zu vermeiden, beschränken wir uns auf Annäherungen. Zu diesem Ende setzen wir p und $F(\varphi)$ constant, und zwar $F(\varphi)=1$, d. h. wir betrachten die durch die Kolben- und Leitstange fortgepflanzte Kraft des Dampfes als auf den Kurbelarm senkrecht wirkend. Unter dieser Voraussetzung wird die Gleichung (1), wenn wir noch der Kürze wegen

$$\frac{pld^2}{2D(M+m+\frac{mA^2}{R^2})}=A^2,\quad \frac{ld^2}{2D(M+m+\frac{mA^2}{R^2})}=2B,$$

$$\frac{\varepsilon s}{2D(M+m+\frac{mA^2}{R^2})}=C^2$$

setzen, folgende:

$$2)\quad \frac{vdv}{dx}=2g(A-2Bv-Cv^2).$$

Nimmt man von dieser Gleichung das Integral und setzt für $x=0$ auch $v=0$, so wird

$$3)\ \frac{(L+v)^{1+m}(L'-v)^{1-m}}{L^{1+m}L'^{1-m}}=e^{-4gC^2x},\ \left(\frac{L'}{L}\right)^{m'}\left(\frac{L+v}{L'-v}\right)^{m'}=e^{4C^2gt};$$

$$\text{wo}\quad \frac{\sqrt{A^2+B^2}-B}{C}=L,\quad \frac{\sqrt{A^2+B^2}+B}{C}=L',$$

$$m=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad m'=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

x der von der Locomotive durchlaufene Raum und t die zu x gehörige Zeit ist.

Wollte man den vom Blasrohre herrührenden Widerstand vernachlässigen, so würde die Gleichung (3) diese:

$$\frac{A^2}{C^2}-v^2=\frac{A^2}{C^2}.e^{-4C^2gx}\quad\text{oder}\quad v=\frac{A}{C}\sqrt{1-e^{-4C^2gx}}.$$

Für ein unendlich grosses x wird die Geschwindigkeit constant und $v = L' = \frac{\sqrt{A^2 + B^2} + B}{C}$. Obgleich dieser Zustand genau genommen nie Statt findet, so tritt er doch in der Wirklichkeit annähernd bald ein.

Die hier gegebenen für eine horizontale Bahn geltenden Formeln gelten auch für geneigte Ebenen, wenn man in (2) für A^2 diesen Werth setzt:

$$A^2 = \frac{\frac{d^2\, lp}{2D} - \frac{M\mu''}{R}\cos\psi - (M+m)\sin\psi}{M + m + \frac{mA^2}{R^2}}$$

Um zu berechnen, wie weit ein Wagenzug sich noch fortbewegt, wenn bei einer bestimmten Geschwindigkeit die Dämpfe zu wirken aufhören, muss man die Gleichung (2), nachdem darin p und $q = 0$ gesetzt, so integriren, dass für $x = 0$, v einen bestimmten Werth v' hat. Man erhält dann

$$\frac{A^2}{A^2 - C^2 v'^2} = e^{-4C^2 gx}.$$

Um steilere Ebenen ohne stehende Dampfmaschinen mit Dampfwagen noch hinanzusteigen, bedient man sich zweier Züge. Man lässt nemlich einen Zug auf der schiefen Ebene heruntergehen, während der andere, der mit dem ersten durch ein auf Rollen liegendes Seil verbunden ist, auf einer zweiten parallelen Ebene herauf geht. Dass ein solcher Betrieb noch einfach und sicher, wenn die Ebene nicht zu steil ist, ausgeführt werden kann, hat die Elberfelder Bahn bewiesen. Wir wollen für diesen Fall noch die Geschwindigkeit berechnen, womit ein Zug eine solche Ebene noch hinangeht. Zu diesem Ende wollen wir, der Einfachheit wegen, die beiden Züge in allen Theilen gleich setzen. Es hindert aber nichts diese Rechnungen auf ganz verschiedene Züge auszudehnen. Das Seil, welches die beiden Züge verbindet, habe bei der Länge l'' das Gewicht G; die Halbmesser der Rollen und deren Achsen seien ϱ, ϱ'; der Reibungscoefficient an der Achse der Rollen sei μ'''. Ist nun die Geschwindigkeit der Züge v, und x der von denselben durchlaufene Weg von dem Kopfe der schiefen Ebene angerechnet: dann ist der Widerstand des hinaufgehenden Zuges mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungen:

$$\left(\frac{M\mu''}{R} + \frac{l''-x}{l''} \cdot G\frac{\varrho'}{\varrho}\mu'''\right)\cos\psi + \varepsilon s v^2 + \left(M + m + \frac{l''-x}{l''} \cdot G\right)\sin\psi,$$

und des heruntergehenden:

$$\left(\frac{M\mu''}{R} + \frac{x}{l''} \cdot G\frac{\varrho'}{\varrho}\mu'''\right)\cos\psi - \left(M + m + \frac{x}{l''} \cdot G\right)\sin\psi + \varepsilon s v^2;$$

der Widerstand von beiden Zügen ist also:

$$2\left(\frac{M\mu''}{R} + G\frac{\varrho'}{\varrho}\mu'''\right)\cos\psi + \frac{l''-2x}{l''} \cdot G\sin\psi + 2\varepsilon s v^2.$$

Hierbei ist der aus der Steifigkeit des Seils der grossen Seilrollen hervorgehende Widerstand ausser Rechnung gelassen.

Setzt man die Kraft der beiden Maschinen auch gleich und jede wie früher: $\frac{d^2l}{2D}(p-qv)$, dann ist die beschleunigende Kraft:

$$R=4g\left[\frac{\frac{d^2l}{2D}(p-qv)-(\frac{M\mu''}{R}+G\frac{\varrho'}{\varrho}\mu''')\cos\psi-\varepsilon s v^2-\frac{l''-2x}{2l''}.G\sin\psi}{2M+2m+\frac{2m\varDelta^2}{R^2}+\frac{m'\varDelta'^2}{\varrho^2}}\right];$$

wo m' das Gewicht der Rollen und $m'\varDelta'^2$ das Moment der Trägheit bedeutet. Hieraus erhält man zur Bestimmung der Geschwindigkeit wie in (1) folgende Gleichung:

$$\frac{vdv}{dx}=4gR,$$

deren Integral die Abhängigkeit von x giebt.

Numerische aus Versuchen entnommene Details werde ich an einem andern Orte mittheilen.

XXVIII.

Auflösung der Aufgabe: In ein gegebenes Viereck ein Quadrat zu beschreiben; nebst einigen Sätzen, welche zu beweisen sind.

Von

Herrn Fr. Seydewitz,

Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

A. Trigonometrische Behandlung.

Analysis.

Es seien in einer Ebene (Taf. III. Fig. 4.) die Geraden A, A_1; B, B_1 als die Gegenseiten eines einfachen Vierecks gegeben, und p, q, r, s, f, g der Reihe nach die Durchschnitte von A, B; B, A_1; A_1, B_1; B_1, A; A, A_1; B, B_1; man denke sich ein

Quadrat aba_1b_1, dessen Gegenecken a, a_1; b, b_1 auf jenen Geraden liegen; es werde die Länge von fg mit a, die Seite des Quadrates mit q, die Winkel, welche A, A_1 und ab mit der Richtung von f nach g bilden, mit α, α_1 und φ, und die Winkel, welche B, B_1 mit der Richtung von g nach f bilden, mit β, β_1 bezeichnet. Diess vorausgesetzt, so hat man folgende Relationen:

$$1)\quad fs = a\frac{\sin\beta_1}{\sin(\alpha+\beta_1)};\quad gq = a\frac{\sin\alpha_1}{\sin(\beta+\alpha_1)};$$

$$fp = a\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)};\quad gp = a\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta+\alpha)};$$

also $$ps = a\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin\beta_1 - \sin(\alpha+\beta_1)\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta_1)} = a\frac{\sin\alpha\sin(\beta_1-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta_1)};$$

$$pq = a\frac{\sin(\beta+\alpha)\sin\alpha_1 - \sin(\beta+\alpha_1)\sin\alpha}{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta+\alpha_1)} = a\frac{\sin\beta\sin(\alpha_1-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta+\alpha_1)}.$$

$$2)\quad pa = q\frac{\sin(\beta-\varphi)}{\sin(\alpha+\beta)};\quad pb = q\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(\beta+\alpha)};$$

$$sa = q\frac{\cos(\beta_1-\varphi)}{\sin(\beta_1+\alpha)};\quad qb = q\frac{\cos(\alpha_1+\varphi)}{\sin(\alpha_1+\beta)};$$

also $$ps = q\frac{\sin(\beta-\varphi)\sin(\beta_1+\alpha)+\cos(\beta_1-\varphi)\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta_1)};$$

$$pq = q\frac{\sin(\alpha+\varphi)\sin(\alpha_1+\beta)+\cos(\alpha_1+\varphi)\sin(\beta+\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\alpha_1)}.$$

Aus 1) und 2) ergibt sich:

$$3)\quad \frac{\sin(\beta-\varphi)\sin(\beta_1+\alpha)+\cos(\beta_1-\varphi)\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\varphi)\sin(\alpha_1+\beta)+\cos(\alpha_1+\varphi)\sin(\alpha+\beta)} =$$

$$\frac{(\sin\beta\cot\varphi-\cos\beta)\sin(\beta_1+\alpha)+(\cos\beta_1\cot\varphi+\sin\beta_1)\sin(\alpha+\beta)}{(\sin\alpha\cot\varphi+\cos\alpha)\sin(\alpha_1+\beta)+(\cos\alpha_1\cot\varphi-\sin\alpha_1)\sin(\alpha+\beta)} =$$

$$\frac{\sin\alpha\sin(\beta_1-\beta)}{\sin\beta\sin(\alpha_1-\alpha)};\text{ also}$$

$$\cot\varphi = \frac{\left[\begin{array}{l}\sin\beta\sin(\alpha_1-\alpha)[\cos\beta\sin(\beta_1+\alpha)-\sin\beta_1\sin(\alpha+\beta)]\\+\sin\alpha\sin(\beta_1-\beta)[\cos\alpha\sin(\alpha_1+\beta)-\sin\alpha_1\sin(\alpha+\beta)]\end{array}\right]}{\left[\begin{array}{l}\sin\beta\sin(\alpha_1-\alpha)[\cos\beta_1\sin(\alpha+\beta)+\sin\beta\sin(\beta_1+\alpha)]\\-\sin\alpha\sin(\beta_1-\beta)[\cos\alpha_1\sin(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha_1+\beta)]\end{array}\right]} = \frac{Z}{N}.$$

Endlich ergibt sich nun aus 2) und 3):

$$4)\quad \frac{pa}{pb} = \frac{\sin(\beta-\varphi)}{\sin(\alpha+\varphi)} = \frac{\sin\beta\cot\varphi-\cos\beta}{\sin\alpha\cot\varphi+\cos\alpha} = \frac{Z\sin\beta-N\cos\beta}{Z\sin\alpha+N\cos\alpha} = \frac{Z_1}{N_1};$$

$$Z_1 = -\sin\beta\sin(\alpha_1-\alpha)\sin(\alpha+\beta)[\cos\beta\cos\beta_1+\sin\beta\sin\beta_1]$$

$$+\sin\alpha\sin(\beta_1-\beta)\begin{bmatrix}\sin(\alpha_1+\beta)(\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha)\\+\sin(\alpha+\beta)(\cos\beta\cos\alpha_1-\sin\beta\sin\alpha_1)\end{bmatrix}$$

$$=\sin(\alpha+\beta)\begin{bmatrix}\sin\alpha\sin(\beta_1-\beta)(\cos(\alpha_1+\beta)+\sin(\alpha_1+\beta))\\-\sin\beta\sin(\alpha_1-\alpha)\cos(\beta_1-\beta)\end{bmatrix};$$

$$N_1=\sin(\alpha+\beta)\begin{bmatrix}\sin\beta\sin(\alpha_1-\alpha)(\cos(\beta_1+\alpha)+\sin(\beta_1+\alpha))\\-\sin\alpha\sin(\beta_1-\beta)\cos(\alpha_1-\alpha)\end{bmatrix};$$

folglich $\frac{pa}{pb}=$

$$\frac{\sin\alpha\sin(\beta_1-\beta)[\cos(\alpha_1+\beta)+\sin(\alpha_1+\beta)]-\sin\beta\sin(\alpha_1-\alpha)\cos(\beta_1-\beta)}{\sin\beta\sin(\alpha_1-\alpha)[\cos(\beta_1+\alpha)+\sin(\beta_1+\alpha)]-\sin\alpha\sin(\beta_1-\beta)\cos(\alpha_1-\alpha)}.$$

Konstruktion.

1) Aus irgend einem der vier Punkte p, q, r, s, z. B. aus p, dem Durchschnitte von A, B, fälle man auf A_1 eine Senkrechte pc, nehme auf A_1 die Strecke $cd=cp$ und ziehe pd. Sodann errichte man in p auf B eine Senkrechtè, fälle vom Punkte e, wo letztere die B_1 schneidet, eine Senkrechte ei auf pd, welche A_1 in h (und pc in n) schneidet, und lege durch h mit pc eine Parallele; so erhält man, als Durchschnitt dieser letzteren mit A, einen Punkt k.

2) Auf dieselbe Weise, indem man nur die Geraden A und B, A_1 und B_1 mit einander vertauscht, suche man die den Punkten c, d, e, h, k entsprechenden Punkte c_1, d_1, e_1, h_1, k_1.

3) Jetzt verbinde man die Punkte k und k_1 mit einander durch eine Gerade, welche A_1 in v, B_1 in w schneidet, beschreibe über kk_1, als Diagonale, ein Quadrat $k\alpha k_1\beta$. und über vw, als Diagonale, ein zweites $v\gamma w\delta$, und verbinde die Punkte α und β mit p durch zwei Gerade, und γ und δ mit r durch zwei andere; so ist einer der Punkte, in welchen letztere die beiden ersteren schneiden, aber auch nur einer, z. B. m, der Mittelpunkt eines Quadrates aba_1b_1, dessen Ecken a, a_1; b, b_1 auf A, A_1; B, B_1 liegen; und zwar sind die Diagonalen desselben den Seiten, und die Seiten den Diagonalen der beiden vorigen parallel. Errichtet man in k (oder k_1) auf kk_1 eine Senkrechte, welche B_1 (oder A_1) in k_2 schneidet, beschreibt über kk_2, als Diagonale, ein Quadrat, und verbindet die beiden neuen Ecken desselben mit s (oder q) durch zwei Gerade, so geht eine von diesen ebenfalls durch den Punkt m, so dass also über diesen Punkt keine Ungewissheit weiter bleibt.

Beweis

1) W. $pfr=\alpha_1-\alpha$, W. $pgr=\beta_1-\beta$, W. $pqr=\alpha_1+\beta$, W. $psr=\beta_1+\alpha$; $pc=pf.\sin(\alpha_1-\alpha)$, $fc=pf.\cos(\alpha_1-\alpha)$, $pe=pg.\operatorname{tang}(\beta_1-\beta)$, $qd=qc+pc=pq.(\cos(\alpha_1+\beta)+\sin(\alpha_1+\beta))$; $pc_1=pg.\sin(\beta_1-\beta)$, $gc_1=pg.\cos(\beta_1-\beta)$, $pe_1=pf.\operatorname{tang}(\alpha_1-\alpha)$, $sd_1=sc_1+pc_1=ps.(\cos(\beta_1+\alpha)+\sin(\beta_1+\alpha))$; $\frac{pf}{pg}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

Da W. $pcq=epq=R$, so ist W. $pqd=$ W. epn, und da W. $eip=$ W. $pcq=R$, so ist W. $pdq=$ W. $pne=$ W. $dpc=$ W. nhc

$=\frac{1}{2}R$, also $\Delta pqd \sim \Delta pen$, $nc=hc$, und $pq:pe=dq:pn$; demnach $pn=pe.\frac{dq}{pq}=pg.\operatorname{tang}(\beta_1-\beta)(\cos(\alpha_1+\beta)+\sin(\alpha_1+\beta))$, und $hc=nc=pn-pc=pg.\operatorname{tang}(\beta_1-\beta)(\cos(\alpha_1+\beta)+\sin(\alpha_1+\beta))-pf\sin(\alpha_1-\alpha)$.

Ebenso ist

$$h_1c_1=pf.\operatorname{tang}(\alpha_1-\alpha)(\cos(\beta_1+\alpha)+\sin(\beta_1+\alpha))-pg.\sin(\beta_1-\beta).$$

2) Da $hk \parallel pc$, $h_1k_1 \parallel pc_1$, also

$$pf:pk=cf:ch,\ pg:pk_1=c_1g:c_1h_1;\ \text{so ist}$$

$$\frac{pk}{pk_1}=hc\frac{c_1g}{pg}:h_1c_1\frac{cf}{pf}=\frac{hc.\cos(\beta_1-\beta)}{h_1c_1.\cos(\alpha_1-\alpha)}=$$

$$\frac{pg\sin(\beta_1-\beta)(\cos(\alpha_1+\beta)+\sin(\alpha_1+\beta))-pf\sin(\alpha_1-\alpha)\cos(\beta_1-\beta)}{pf\sin(\alpha_1-\alpha)(\cos(\beta_1+\alpha)+\sin(\beta_1+\alpha))-pg\sin(\beta_1-\beta)\cos(\alpha_1-\alpha)}.$$

3) Zieht man durch einen beliebigen Punkt m der Linie $p\alpha$ mit $k\alpha$ und $k_1\alpha$ die Parallelen ma und mb, welche von A und B begrenzt werden, so ist $ma:mb=k\alpha:k_1\alpha=1:1$, also W. $mab=mba=\frac{1}{2}R=$ W. αkk_1; folglich $ab \parallel kk_1$.

Denkt man sich in k auf kk_1 eine Senkrechte errichtet, welche B_1 in k_2 schneidet, sodann über kk_2, als Diagonale, ein Quadrat beschrieben, und die neuen Ecken desselben mit s durch zwei Gerade verbunden, so werden die Seiten dieses Quadrates mit denen des $k\alpha k_1\beta$ einerlei Richtung haben, und eine dieser zwei Geraden wird die $p\alpha$ in einem Punkte u schneiden, welcher in der Richtung von $k\alpha$ und $k_1\alpha$ sowohl von A und B, als auch von A und B_1 gleichweit absteht, d. h. $u\alpha_0=u\beta_0=u\beta'_0$, wenn die Punkte α_0, β_0, β'_0 auf A, B, B_1 liegen, und $\beta_0u\beta'_0 \parallel k_1\alpha$, $u\alpha_0 \parallel k\alpha$ ist. Denkt man sich nun $u\alpha_0$ um $u\alpha'_0=u\alpha$ verlängert, so ist $\alpha_0\beta_0\alpha'_0\beta'_0$ ein Quadrat; und es ist zu zeigen, dass die Ecke α'_0 auf A_1 liegt, und dass die Punkte u und m identisch sind.

Man denke sich durch α'_0 mit A_1 eine Parallele A_2 gelegt, welche A in f_1 schneiden möge, so sind die Winkel, welche A_2 mit A, B bildet, $=\alpha_1-\alpha$, $\alpha_1+\beta$; und es mögen die Winkel, welche A und B mit f_1g bilden, α_2 und β_2 heissen. Wird nun die in der Analysis gegebene Entwickelung in Ansehung der Geraden A, B, A_2, B_1 und des Qudrates $\alpha_0\beta_0\alpha'_0\beta_0$ wiederholt, so findet man:

$$\frac{p\alpha_0}{p\beta_0}=\frac{\sin\alpha_2\sin(\beta_1-\beta)(\cos(\alpha_1+\beta)+\sin(\alpha_1+\beta))-\sin\beta_2\sin(\alpha_1-\alpha)\cos(\beta_1-\beta)}{\sin\beta_2\sin(\alpha_1-\alpha)(\cos(\beta_1+\alpha)+\sin(\beta_1+\alpha))-\sin\alpha_2\sin(\beta_1-\beta)\cos(\alpha_1-\alpha)};$$

vergleicht man aber diesen Ausdruck mit dem für $\frac{pk}{pk_1}$ in 2) gefundenen und bedenkt, dass $kk_1 \parallel \alpha_0\beta_0$, also $\frac{pk}{pk_1}=\frac{p\alpha_0}{p\beta_0}$, und dass $\sin\alpha_2:\sin\beta_2=pg:pf_1$ ist, so überzeugt man sich, dass $pf_1=pf$ sein, also A_2 mit A zusammenfallen muss.

Und da nun $u\alpha'_0=u\beta'_0$, also der Punkt u auch auf der Geraden $r\delta$ (oder $r\gamma$) liegen muss, so sind die Punkte u und m,

und somit auch das Quadrat $\alpha_0 \beta_0 \alpha'_0 \beta'_0$ mit dem durch die Konstruktion erhaltenen Viereck aba_1b_1 identisch.

Determination.

Da zwei Quadrate mlt parallelen Seiten ähnliche und ähnlich liegende Figuren sind, also die Geraden A, A_1, B, B_1, welche ihre Ecken paarweise verbinden, in einerlei Punkte convergiren, so kann es für die gefundene Richtung kk_1 nur einen einzigen Punkt m geben. Da aber die Punkte d und d_1 ein jeder resp. sowohl auf der einen als auf der andern Seite von pc und pc_1 liegen kann, man also zwei Punkte k und zwei Punkte k_1 erhält, so scheint es, dass die Aufgabe im Allgemeinen einer Anzahl von vier Auflösungen fähig ist. Hierüber wird die folgende Untersuchung ein bestimmteres Urtheil gewähren.

Anm. Ist $A \parallel A_1$ und $B \parallel B_1$, so ist $\sin\alpha : \sin\beta = pg : pf = 1$, $\cos(\alpha_1 - \alpha) = \cos(\beta_1 - \beta) = 1$, $\sin(\alpha_1 - \alpha) : \sin(\beta_1 - \beta) = \frac{pq}{fq} \sin(\alpha + \beta) : \frac{ps}{gs} \sin(\alpha + \beta) = pq : ps$, wodurch sich die obige Konstruktion sehr vereinfacht.

B. Mittels projektivischer Gebilde.

Analysis.

Der Mittelpunkt des gesuchten Quadrates ist der Mittelpunkt der Hypotenusen zweier gleichschenkliger rechtwinkliger Dreiecke, deren jedes einem von zwei gegebenen Dreiecken eingeschrieben ist, also der Durchschnitt der geometrischen Oerter dieses Mittelpunktes für die zwei gegebenen Dreiecke.

Es sei (Taf. III. Fig. 5.) npq irgend ein gleichschenkliges, bei p rechtwinkliges Dreieck, dessen Ecken n, q, p auf drei der Lage nach gegebenen Geraden A, A_1, A_2 liegen, m sei der Mittelpunkt von nq, also $mn = mp = mq$ und W. $qmp = R$. Es seien B, B_1 die Durchschnitte von A_2 mit A, A_1, durch B mit pq die Parallele a', welche A_1 in $\mathfrak{a}_1$ schneidet, und durch B_1 mit pn die Parallele a'_1, welche A in $\mathfrak{a}$ schneidet, gezogen; ferner seien $B\alpha_1$ und $B_1\alpha$ oder a'' und a''_1 parallel mit pm, und der Punkt m mit B und B_1 durch zwei Gerade a, a_1 verbunden, welche resp. die a''_1 und a'' in α und α_1 schneiden. Diess vorausgesetzt, so ist $\Delta B\mathfrak{a}_1\alpha_1 \sim \Delta pqm$ und $\Delta B_1\mathfrak{a}\alpha \sim \Delta pnm$, W. $\mathfrak{a}_1 B \alpha_1 =$ W. $qpm =$ W. $\mathfrak{a} B_1 \alpha =$ W. $npm = \frac{1}{2} R$ und $B\alpha_1 : B\mathfrak{a}_1 = pm : pq = pm : pn = B_1\alpha : B_1\mathfrak{a} = 1 : \sqrt{2}$.

Die Geraden a', a'_1 sind, ebensowie pq, pn, rechtwinklig zu einander; denkt man sich also das Dreieck npq fortwährend unter denselben Bedingungen variirt, und die den Linien a, a_1, a', a'_1, a'', a''_1 entsprechenden Linien der Reihe nach mit b, b_1, b', b'_1, b'', b''_1; c, c_1; c', c'_1, c'', c''_1; d, d_1, d', d'_1, d'', d''_1 ...., und die

den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, α, α_1 entsprechenden Punkte mit $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$, β, β_1; $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}_1$, γ, γ_1; $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$, δ, δ_1, ... bezeichnet, so liegen die Durchschnitte je zweier Geraden a', a'_1; b', b'_1; c', c'_1; d', d'_1 .... auf einer Kreislinie, deren Durchmesser BB_1 ist; und da W. $\mathfrak{a}_1 B\alpha_1 = \mathfrak{b}_1 B\beta_1 = \mathfrak{c}_1 B\gamma_1 = \mathfrak{d}_1 B\delta_1 \ldots = \mathfrak{a}B_1\alpha = \mathfrak{b}B_1\beta = \mathfrak{c}B_1\gamma = \mathfrak{d}B_1\delta \ldots = \frac{1}{2}R$, und $B\alpha_1 : B\mathfrak{a}_1 = B\beta_1 : B\mathfrak{b}_1 = B\gamma_1 : B\mathfrak{c}_1 = B\delta_1 : B\mathfrak{d}_1 \ldots = B_1\alpha : B_1\mathfrak{a} = B_1\beta : B_1\mathfrak{b} = B_1\gamma : B_1\mathfrak{c} = B_1\delta : B_1\mathfrak{d} \ldots = 1 : \sqrt{2}$ ist, und da sämmtliche Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$.... auf einer Geraden A_1, und sämmtliche Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$.... auf einer Geraden A liegen, so müssen, nach einem bekannten Lokaltheorem, auch die Punkte α_1, β_1, γ_1, δ_1 .... alle auf einer, und die Punkte α, β, γ, δ... alle auf einer anderen Geraden liegen. Bedenkt man endlich, dass sowohl die Geraden a', b', c', d'... und a'', b'', c'', d''..., als auch die Geraden a'_1, b'_1, c'_1, d'_1... und a''_1, b''_1, c''_1, d''_1.... zwei concentrische projectivisch-gleiche Strahlbüschel bilden, so kann man der Reihe nach setzen:

$$B(a, b, c, d\ldots) \equiv B_1(a''_1, b''_1, c''_1, d''_1\ldots) = B_1(a'_1, b'_1, c'_1, d'_1\ldots)$$
$$= B(a', b', c', d'\ldots) = B(a'', b'', c'', d''\ldots) \equiv B_1(a_1, b_1, c_1, d_1\ldots);$$

also ist $B(a, b, c, d\ldots) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1\ldots)$.

Da je zwei Strahlen a'', a''_1 parallel sind; so müssen sich irgend zwei derselben, und folglich auch zwei der Strahlen a, a_1; b, b_1... längs der Geraden BB_1 vereinigen, also ist

$$B(a, b, c, d\ldots) \equiv B_1(a_1, b_1, c_1, d_1\ldots), \text{ d. h.}$$

die Durchschnitte sämmtlicher Strahlenpaare a, a_1; b, b_1; c, c_1; d, d_1..., oder sämmtliche Punkte m, liegen in einer Geraden S.

Macht man W. BB_1g = W. $B_1Bh = \frac{1}{2}R$ und $Bi = hi$, $B_1k = gk$, so sind offenbar auch i, k zwei solche Punkte m, also die Gerade S durch diese zwei Punkte leicht zu konstruiren.

Jeder Punkt m dieser Geraden hat also die Eigenschaft, dass wenn man durch ihn eine Gerade nq legt, welche von A, A_1 begrenzt und in m gehälftet wird, und in m auf nq eine Senkrechte mp errichtet, welche von A_2 begrenzt wird, jedesmal $mp = mn = mq$ sein muss. Uebrigens gibt es allemal zwei Gerade S, und nur wenn $A \| A_1$, fallen beide in eine zusammen. Sie schneiden sich auf A_2; und je zwei denselben entsprechende Dreiecke npq und $n_1p_1q_1$ (wo n und n_1 auf A, q und q_1 auf A_1 liegen) haben eine solche Lage zu einander, dass wenn durch blosse Verschiebung des einen $n_1p_1q_1$ in der Ebene die Punkte n, n_1 vereinigt werden, und die Gerade n_1q_1 in die Richtung von n nach q gelegt wird, die Punkte p, p_1 auf verschiedene Seiten von nq fallen.

Konstruktion.

Sollen (Taf. III. Fig. 6.) die Gegenecken des gesuchten Quadrates paarweise auf den gegebenen Geraden A, A_1 und B, B_1 liegen, und sind p, q, r, s die Durchschnitte von A, B; B, A_1; A_1, B_1, B_1, A, so beschreibe man über irgend zwei der vier Strecken pq, qr, rs, sp, z. B. über pq und rs, als Diagonalen, zwei Quadrate. Zwei anstossende, von p und q ausgehende Seiten des einen mögen die

A_1 und A in den Punkten p_1 und q_1, die beiden anderen Seiten dieselben Geraden in $p_{\prime\prime}$ und $q_{\prime\prime}$ schneiden, und auf ähnliche Weise seien durch die Seiten des anderen Quadrates die Punkte s_1 und r_1, $s_{\prime\prime}$ und $r_{\prime\prime}$ bestimmt. Man verbinde die Mittelpunkte der Strecken pp_1 und qq_1 mit einander durch eine Gerade S, und ebenso die Mittelpunkte der Strecken $pp_{\prime\prime}$ und $qq_{\prime\prime}$, ss_1 und rr_1, $ss_{\prime\prime}$ und $rr_{\prime\prime}$ durch die Geraden S_1, S_2, S_3. Die Geraden S, S_1 schneiden die Geraden S_2, S_3 in vier Punkten m, m_1, m_2, m_3. Legt man durch irgend einen dieser Punkte, z. B. durch m, eine Gerade aa_1, welche von A, A_1 (oder B, B_1) begrenzt und in m gehälftet wird, und errichtet in m auf aa_1 eine Senkrechte, welche B, B_1 in b, b_1 schneidet, so ist $mb = ma = ma_1 = mb_1$; aber in zwei Fällen fallen die Punkte b, b_1 mit dem Durchschnitte von B und B_1 zusammen, und nur in den beiden andern bilden die Punkte a, b, a_1, b_1 ein Quadrat.

Beweis.

Da der Punkt m zur Geraden S gehört, so folgt aus der Analysis, dass $mb = ma = ma_1$, und da er auch zur Geraden S_2 gehört, so ist auch $mb_1 = ma = ma_1$, also sind a, a_1 und b, b_1, wofern nicht b und b_1 zusammenfallen, die Gegenecken eines Quadrates. Da nun $mb = ma = mb_1$, so muss der Punkt m auch auf einer der beiden Geraden liegen, welche man ebenso wie S, S_1 findet, indem man A, A_1 mit B, B_1 und B mit A vertauscht u. s. w. Welcher zwei der vier Strecken pq, qr, rs, sp man sich also auch zur Konstruktion der Punkte m, m_1, m_2, m_3 bedienen mag, allemal werden dieselben Punkte sich darunter befinden, welche in irgend einem Falle Quadrate liefern.

Determination.

Nennt man irgend zwei Dreiecke npq und $n_1p_1q_1$ (Taf. III. Fig. 5.) welche zu zwei der vier Geraden S, S_1, S_2, S_3 (Taf. III. Fig. 6.) gehören, gleichliegend oder ungleichliegend, jenachdem die Punkte p, p_1 auf einerlei oder auf verschiedene Seiten von nq fallen, wenn das eine Dreieck auf die in der Analysis angegebene Weise verschoben wird, und sind m, m_1 z. B. die Punkte, wo S_2 von S und S_1 geschnitten wird, so lässt sich folgendermassen urtheilen. Ist irgend eines der Dreiecke, welche zu S_2 gehören, mit irgend einem der zu S gehörigen gleichliegend, so müssen, weil alle Dreiecke, welche zu einer und derselben Geraden gehören, gleichliegend sind, je zwei Dreiecke, welche zu S und S_2 gehören, gleichliegend sein, und da je zwei zu S und S_1 gehörige Dreiecke ungleichliegend sind, so müssen auch je zwei zu S_2 und S_1 gehörige ungleichliegend sein, und umgekehrt. Gesetzt also, es fielen die durch m erhaltenen Punkte b, b_1 zusammen, so wären die Dreiecke aba_1 und ab_1a_1, deren eines zu S, das andere zu S_2 gehört, gleichliegend; folglich würden die beiden durch den Punkt m_1 erhaltenen, zu S_1 und S_2 gehörigen Dreiecke ungleichliegend sein, also ein Quadrat bilden, und umgekehrt. Hieraus folgt, dass allemal zwei, aber auch nur zwei der vier Punkte m, m_1, m_2, m_3 Quadrate liefern.

Uebrigens geht die Unmöglichkeit, dass die Aufgabe vier Auflösungen habe, noch einfacher schon daraus hervor, weil einer jeden der Strecken pq, qr, rs, sp ein Paar Gerade S, S_1 entsprechen, und eine jede von diesen acht Geraden zwei der Punkte m, m_1, m_2, m_3 verbinden müsste, was unmöglich ist, wenn nicht zwei derselben mit zwei anderen zusammenfallen sollen.

Anm. Ist $A \parallel A_1$ und $B \parallel B_1$, so fallen alle vier Punkte m mit dem Mittelpunkte des Parallelogramms zusammen, und dann wird die zuletzt gegebene Auflösung illusorisch, weshalb man in diesem Falle die in der vorigen Anmerkung angedeutete oder auch die in Diesterwegs Geometrischen Aufgaben nach der Methode der Griechen S. 166 mitgetheilte Auflösung zu wählen hat.

Zu beweisende Sätze.

1. Bildet man aus einer beliebigen Anzahl n Tangenten eines Kegelschnittes, deren Berührungspunkte alle auf einerlei Seite der Hauptachse liegen, irgend ein einfaches n-Eck, so ist die Summe der Winkel, unter welchen der Abstand der Brennpunkte von einander von den Ecken aus gesehen wird, eben so gross als die Summe der Winkel, unter welchen derselbe Abstand von den Berührungspunkten aus erscheint, und ist daher für alle so möglichen $3.4.5\ldots(n-1)$ einfachen n-Ecke von gleicher Grösse.

2. Haben eine Schaar von Kegelschnitten, welche

eine reelle oder ideale Sekante gemein haben, mit einem und demselben Kegelschnitte eine reelle oder ideale doppelte Berührung einerlei Art: *a*) so liegen auf jeder Tangente des letzteren zwei projektivische Gerade, deren entsprechende Punktenpaare auf jenen ersteren Kegelschnitten liegen, und zwar sind allemal im Berührungspunkte und auf der gem. Sekante entsprechende Punkte vereinigt; *b*) und je zwei Tangenten des letzten Kegelschnittes sind auf zweifache Weise in Ansehung der Punktenpaare, in denen sie von den ersteren geschnitten werden, perspektivisch; und zwar liegen die beiden Projektionspunkte auf der gem. Sekante; *c*) dagegen sind dieselben in Ansehung der, auf die beiden noch übrigen Weisen combinirten Punktenpaare zwar projektivisch, aber schiefliegend.

einen reellen oder idealen Tangentendurchschnitt gemein haben, mit einem und demselben Kegelschnitte eine reelle oder ideale doppelte Berührung einerlei Art: *a*) so ist jeder Punkt des letzteren der Mittelpunkt zweier projektivischer Strahlbüschel, deren entsprechende Strahlenpaare die von demselben an die ersteren gehenden Tangentenpaare sind; und zwar sind längs der Tangente des letzten Kegelschnittes und in der Richtung nach dem gem. Tangentendurchschnitte entsprechende Strahlen vereinigt; *b*) und jeder dieser beiden Tangentenbüschel ist mit einem der beiden, welche irgend einen anderen Punkt desselben Kegelschnittes zum Mittelpunkt haben, perspectivisch; und zwar gehen die beiden perspectivischen Durchschnitte nach dem gem. Tangentendurchschnitte; *c*) dagegen ist derselbe mit dem jedesmaligen anderen zwar projektivisch, aber schiefliegend.

3. Haben eine Schaar von Kegelschnitten, welche

eine reelle oder ideale Sekante gemein haben, mit einem und demselben Kegelschnitte eine reelle oder ideale doppelte Berührung einerlei Art: *a*) so liegen die Berührungspunkte aller Tangenten, welche von irgend einem Punkte der gem. Sekante an jene Kegelschnitte gezogen werden, auf dem Umfange eines neuen Kegelschnittes, welcher den letzteren ebenfalls, und zwar unter jenem Punkte (als Berührungspole) doppelt berührt, und welcher mit denjenigen Kegelschnitten, die die harmonischen Pole je einer beliebigen Geraden in Bezug auf die erste Schaar enthalten —, einerlei Sekante gemein hat. *b*) Alle mittels der einzelnen Punkte der gem. Sekante jener Schaar so erzeugten Kegelschnitte bilden eine zweite Schaar, welche eine Sekante gemein und mit demselben Kegelschnitte als die erste Schaar eine doppelte Berührung einerlei Art haben. *c*) Diese beiden Schaaren von Kegelschnitten stehen in vollkommener Wechselbeziehung zu einander, d. h. die erste kann aus der zweiten ebenso, wie diese aus jener, erzeugt werden u. s. w.

einen reellen oder idealen Tangentendurchschnitt gemein haben, mit einem und demselben Kegelschnitte eine reelle oder ideale doppelte Berührung einerlei Art: *a*) so umhüllen alle Tangenten derselben, deren Berührungspunkte mit dem gem. Tangentendurchschnitte in gerader Linie liegen, einen neuen Kegelschnitt, welcher den letzteren ebenfalls, und zwar längs dieser geraden Linie, doppelt berührt, und welcher mit denjenigen Kegelschnitten, die von den harmonischen Polaren je eines beliebigen Punktes in Bezug auf die erste Schaar umhüllet werden —, einerlei Tangentendurchschnitt gemein hat. *b*) Alle mittels der einzelnen Strahlen des gem. Tangentendurchschnittes jener Schaar so erzeugten Kegelschnitte bilden eine zweite Schaar, welche einen Tangentendurchschnitt gemein und mit demselben Kegelschnitte als die erste Schaar eine doppelte Berührung einerlei Art haben. *c*) Diese beiden Schaaren von Kegelschnitten stehen in vollkommener Wechselbeziehung zu einander, d. h. die erste kann aus der zweiten ebenso, wie diese aus jener, erzeugt werden u. s. w.

4. Die Seiten sämmtlicher Dreiecke, welche einem gegebenen Dreiecke eingeschrieben und einem anderen gegebenen Dreiecke ähnlich sind, sind die Tangenten dreier Kegelschnitte, deren jeder zwei Seiten des ersteren Dreiecks berührt.

Dieser letztere Satz führt zu einer ziemlich einfachen Lösung der Aufgabe: In ein gegebenes Dreieck ein zweites zu beschreiben, welches einem gegebenen dritten ähnlich sei und dessen eine Seite durch einen gegebenen Punkt gehe.

XXIX.

Ueber bestimmte Integrale und Summirung einiger Reihen.

Von

Herrn F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Die vorliegende Abhandlung beschäftigt sich vorzüglich mit der Entwickelung des bestimmten Integrals

$$\int_0^{n\pi} \varphi \log \sin\varphi d\varphi ,$$

welches von Hill zuerst angegeben und von Clausen in Crelle's Journal Band VII. S. 309. besonders untersucht worden ist.

Beide Geometer erhalten $-\frac{1}{2}n^2\pi^2 \log 2$ als Werth des obigen Integrals. Die Clausensche Entwickelung ist sehr einfach. Sie geht von der bekannten Gleichung aus:

$$\log \sin\varphi = -\log 2 - \cos 2\varphi - \tfrac{1}{2}\cos 4\varphi - \tfrac{1}{3}\cos 6\varphi - \text{ etc.}$$

Multiplicirt man nämlich auf beiden Seiten mit $\varphi d\varphi$, und integrirt zwischen den Grenzen 0 und $n\pi$, so ergiebt sich, da $\int_0^{n\pi} \varphi \cos 2k\varphi d\varphi$ verschwindet, auf der Stelle der angezeigte Werth.

Indem ich mich nun bei anderen Untersuchungen des Werths jenes Integrals bediente, gerieth ich auf einen Widerspruch, der mich veranlasste, die obige Entwickelung einmal genau durch zu nehmen, und bald entdeckte ich, dass in ihr ein Fehlschluss obwalte. Dieser liegt in der Annahme der obigen Gleichung, welche aufhört richtig zu sein, sobald $\sin\varphi$ negativ, oder $\log \sin\varphi$ imaginär wird. Dieser Fall tritt nun wirklich ein, wenn n grösser als die Einheit ist, indem dann der Bogen φ wegen der Integrationsgrenzen durch den dritten und vierten Quadranten geht, wo sein Sinus negativ wird, und somit gelangte ich zu der Ueberzeugung, dass Hill einen unrichtigen Werth angegeben hatte, welches sich

durch meine eigene Entwickelung in der That bestätigt hat. Zugleich ist log sin φ selbst unbestimmt, indem ein Logarithmus bekanntlich unendlich viele Werthe zulässt, weswegen angegeben werden muss, welchen dieser Werthe man verstanden wissen will.

Meine Entwickelung weicht nun von der Clausenschen nicht nur ab, sondern sie leitet mich zugleich auf die Summation von Reihen, die ich der Mittheilung nicht ganz unwerth halte. Endlich reiht sich die Untersuchung des einfachern Integrals

$$\int_0^{n\pi} \log \sin \varphi d\varphi$$

an.

Nach diesen Bemerkungen schreite ich zur Sache, und erinnere rücksichtlich der vielfachen Werthe eines Logarithmus, und der Bedeutung des Logarithmus einer negativen Grösse an die aus Cauchy's Cours d'analyse de l'école royale polyt. bekannten Gleichungen

$$(\log a) = \log a + 2k\pi\sqrt{-1}, \quad (\log - a) = \log a + (2\lambda+1)\pi\sqrt{-1},$$

wo $\log a$ den reellen Werth des Logarithmus der positiven Grösse a, dagegen die Grössen auf der Linken den Complex aller Werthe des Logarithmus bedeuten sollen; k und λ sind positive oder negative, beliebige ganze Zahlen.

Dieses Resultat ergiebt sich leicht, wenn man die imaginäre Exponentialgrösse $e^{y\sqrt{-1}}$ so definirt, dass sie aus der für e^y bekannten unendlichen Reihe hervorgeht, wenn $y\sqrt{-1}$ an die Stelle von y gesetzt wird. Dadurch erhält man definitiv $e^{y\sqrt{-1}} = \cos y + \sqrt{-1} \cdot \sin y$. Ist also $x + y\sqrt{-1}$ der Logarithmus der beliebigen Grösse a, so hat man $a = e^x(\cos y + \sqrt{-1} \cdot \sin y)$, weshalb $\sin y = 0$ und $e^x \cos y = a$. Wegen der ersteren dieser Relationen ist $y = k\pi$, $\cos y = (-1)^k$, $(-1)^k e^x = a$. Ist daher a positiv, so muss k gerade und $e^x = a$ (d. h. $x = \log a$) sein; wenn aber a negativ ist, so ist nothwendig k ungerade und $e^x = -a$ (d. h. $x = \log - a$). Folglich wird $x + y\sqrt{-1} = \log a + 2k\pi\sqrt{-1}$, oder $= \log - a + (2\lambda+1)\pi\sqrt{-1}$, jenachdem a positiv oder negativ ist, was oben behauptet wurde.

Demnach ist jeder beliebige Werth von log sin φ begriffen in den Formeln

$$1) \quad \begin{cases} (\log \sin \varphi) = \log \sin \varphi + 2k\pi\sqrt{-1}, \\ (\log \sin \varphi) = \log - \sin \varphi + (2\lambda+1)\pi\sqrt{-1}; \end{cases}$$

indem die erste, oder die zweite verstanden wird, jenachdem φ im ersten und zweiten, oder im dritten und vierten Quadranten endigt.

Ich nehme endlich an, dass in dem Integral $\int_0^{n\pi} \varphi \log \sin \varphi d\varphi$ für alle Bogen φ, die im ersten und zweiten, oder im dritten und vierten Quadranten endigen, resp. k und λ einen unveränderlichen Werth behalten.

I. Das bestimmte Integral $\int_0^{n\pi} \varphi \log \sin\varphi d\varphi$, in welchem n eine positive ganze Zahl anzeigt.

Führt man für $\sin\varphi$ den gleichbedeutenden Ausdruck $\pm\sqrt{1-\cos\varphi^2}$ ein, indem das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist, jenachdem der Bogen φ resp. im ersten und zweiten, oder im dritten und vierten Quadranten endigt, und entwickelt den Logarithmus in eine unendliche (wegen $\cos\varphi^2 < 1$ convergirende) Reihe, so erhält man nach einer von selbst verständlichen Bezeichnungsart:

$$2)\quad \int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi} \varphi \log \sin\varphi d\varphi$$

$$= -\tfrac{1}{2} \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p} \int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi} \varphi \cos\varphi^{2p} d\varphi + 2k\pi\sqrt{-1} \int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi} \varphi d\varphi,$$

$$3)\quad \int_{(2m-1)\pi}^{2m\pi} \varphi \log \sin\varphi d\varphi$$

$$= -\tfrac{1}{2} \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p} \int_{(2m-1)\pi}^{2m\pi} \varphi \cos\varphi^{2p} d\varphi + (2\lambda+1)\pi\sqrt{-1} \int_{(2m-1)\pi}^{2m\pi} \varphi d\varphi,$$

wo m eine positive ganze Zahl bedeutet.

Wendet man nun auf das erste Integral zur Rechten die allgemeinste Reductionsformel an, indem man $\cos\varphi^{2p} d\varphi$ zerlegt in $\cos\varphi^{2p-1} \cos\varphi d\varphi$, und den letztern Factor integrirt, so erhält man den Ausdruck

$$\varphi\cos\varphi^{2p-1} \sin\varphi + \frac{1}{2p}\cos\varphi^{2p} + (2p-1)\int \cos\varphi^{2p-2} \sin\varphi^2 d\varphi.$$

Zerlegt man aber das letzte Integral dadurch, dass man $1-\cos\varphi^2$ für $\sin\varphi^2$ nimmt, so entsteht nach der Zusammenziehung

$$2p\int \varphi \cos\varphi^{2p} d\varphi$$

$$= \varphi\cos\varphi^{2p-1} \sin\varphi + \frac{1}{2p}\cos\varphi^{2p} + (2p-1)\int \varphi \cos\varphi^{2p-2} d\varphi.$$

Bezeichnen demnach m und n zwei positive ganze Zahlen, so wird

$$\int_{m\pi}^{n\pi} \varphi \cos\varphi^{2p} d\varphi = \frac{2p-1}{2p} \int_{m\pi}^{n\pi} \varphi \cos\varphi^{2p-2} d\varphi.$$

Diese Reductionsformel kann nun auf das Integral zur Rechten von Neuem angewandt werden u. s. f., da es aus dem zur Linken hervorgeht, wenn in diesem $p-1$ statt p gesetzt wird. Auf diese Weise kommt durch gehörige Substitution

$$4)\quad \int_{m\pi}^{n\pi} \varphi \cos\varphi^{2p} d\varphi = \tfrac{1}{2}\pi^2 (n^2 - m^2) \cdot \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots.2p}.$$

Führt man diesen Werth in 2) und 3) ein, so wird

$$5)\int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi}\varphi\log\sin\varphi d\varphi$$

$$=-\tfrac{1}{4}\pi^2(4m+1)\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1}{p}\cdot\frac{1.3.5..(2p-1)}{2.4.6....2p}+k\pi^3\sqrt{-1}.(4m+1),$$

$$6)\int_{(2m-1)\pi}^{2m\pi}\varphi\log\sin\varphi d\varphi$$

$$=-\tfrac{1}{4}\pi^2(4m-1)\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1}{p}\cdot\frac{1.3.5..(2p-1)}{2.4.6....2p}+\frac{2\lambda+1}{2}\pi^3\sqrt{-1}.(4m-1).$$

Es liegt uns nun ob, die hierin enthaltene Summe von unendlich vielen Gliedern zu bestimmen. Zu dem Ende versuche ich die Summation der allgemeinen Reihe, deren allgemeines Glied $\frac{1}{p}\cdot\frac{1.3.5..(2p-1)}{2.4.6....2p}.x^p$ ist, welche für jeden Werth von x, dessen absoluter Werth kleiner als die Einheit ist, convergirt, wovon man sich durch den einfachsten Satz von der Convergenz der Reihen sogleich überzeugt. Die Summation gelingt mittelst der bekannten Binomialreihe:

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}-1=\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1.3.5..(2p-1)}{2.4.6....2p}x^p.$$

Denn dividirt man mit x und multiplicirt mit dx, so entsteht durch Integration

$$\text{Const.}+\int\frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}}-1}{x}dx=\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1}{p}\cdot\frac{1.3.5..(2p-1)}{2.4.6....2p}x^p.$$

Hiernach ist das Integral auf der Linken zu bestimmen, und zwar so, dass es für $x=0$ verschwindet.

Man zerlegt es aber in die beiden $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$ und $\int\frac{-dx}{x}$, von denen das letztere unmittelbar bekannt ist, indem es den Werth $-\log x$ hat. Was das erste betrifft, so wird es rational durch die Substitution $\sqrt{1-x}=y$, nämlich $\int\frac{-2dy}{1-y^2}$, welches letztere wieder zerlegt wird in $\int\frac{-dy}{1-y}+\int\frac{-dy}{1+y}$, also den Werth $\log\frac{1-y}{1+y}$ hat. Führt man für y seinen Werth ein, so wird

$$\int\frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}}-1}{x}dx=\text{Const.}-2\log(1+\sqrt{1-x}),$$

und wenn man es für $x=0$ verschwinden lässt:

$$\int_0^x\frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}}-1}{x}dx=-2\log\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}.$$

Demnach ist

$$7)\ \sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1}{p}\cdot\frac{1.3.5..(2p-1)}{2.4.6....2p}x^p=-2\log\frac{1+\sqrt{1-x}}{2},$$

für jedes x, dessen absoluter Werth kleiner als die Einheit ist.

Hier ist jetzt $x=1$ zu setzen; allein es muss zuvor untersucht werden, ob die Summe auf der Linken noch für diesen Werth convergirt. Dass dies wirklich statt finde, erhellet aus einem Theorem von Raabe*), welches uns auf die Grenze des absoluten Werths von $(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1)n$ hinweist, wo u_n das allgemeine Glied ist. Ist diese Grenze grösser als die Einheit, so findet Convergenz statt. Unsere Reihe entspricht nun in der That dieser Bedingung, da man leicht findet $(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1)n=\frac{3+\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}}$, welches $\frac{3}{2}$ zur Grenze hat.

Setzen wir also in 7) $x=1$, so wird

$$7^*)\ \sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1}{p}\cdot\frac{1.3.5..(2p-1)}{2.4.6....2p}=2\log 2.$$

Deshalb ist nach 5) und 6)

$$8)\ \int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi}\varphi\log\sin\varphi d\varphi=-\tfrac{1}{2}\pi^2\log 2\,(4m+1)+k\pi^3\sqrt{-1}\,.(4m+1),$$

$$9)\ \int_{(2m-1)\pi}^{2m\pi}\varphi\log\sin\varphi d\varphi=-\tfrac{1}{2}\pi^2\log 2(4m-1)+\frac{2\lambda+1}{2}\pi^3\sqrt{-1}\,.(4m-1)$$

Setzt man in der ersten dieser Relationen $m-1$ für m, und addirt dann 8) und 9), so entsteht

$$\int_{(2m-2)\pi}^{2m\pi}\varphi\log\sin\varphi d\varphi$$

$$=-\tfrac{1}{2}\pi^2\log 2\,(2m)^2+k\pi^3\sqrt{-1}\,.(4m-3)+\frac{2\lambda+1}{2}\pi^3\sqrt{-1}\,.(4m-1).$$

Nimmt man nun für m nach und nach die Zahlen 1, 2, 3, ... m und addirt alle dadurch entstandenen Integrale, so wird

$$\int_0^{2m\pi}\varphi\log\sin\varphi d\varphi$$

$$=-\tfrac{1}{2}\pi^2\log 2(2m)^2+k\pi^3\sqrt{-1}\,.(2m-1)m+\frac{2\lambda+1}{2}\pi^3\sqrt{-1}\,.(2m+1)m,$$

oder

---

*) Zeitschrift für Physik und Mathematik von Baumgartner und v. Ettingshausen. Wien 1831.

$$10)\ \int_0^{2m\pi} \varphi \log \sin \varphi d\varphi$$

$$= -\tfrac{1}{2}\pi^2 (2m)^2 \left[\log 2 - k\pi\sqrt{-1}.(1-\frac{1}{2m}) - \frac{2\lambda+1}{2}\pi\sqrt{-1}.(1+\frac{1}{2m})\right]$$

Addirt man hiezu das Integral 8), so ergiebt sich nach leichten Reductionen:

$$11)\ \int_0^{(2m+1)\pi} \varphi \log \sin \varphi d\varphi$$

$$= -\tfrac{1}{2}\pi^2 (2m+1)^2 \left[\log 2 - k\pi\sqrt{-1}.(1+\frac{1}{2m+1}) - \frac{2\lambda+1}{2}\pi\sqrt{-1}.(1+\frac{1}{2m})\right].$$

Daher ist jetzt

$$12)\ \int_0^{n\pi} \varphi \log \sin \varphi d\varphi$$

$$= -\tfrac{1}{2} n^2\pi^2 \left[\log 2 - k\pi\sqrt{-1}.(1 \mp \frac{1}{n}) - \frac{2\lambda+1}{2}\pi\sqrt{-1}.(1+\frac{1}{n-a})\right],$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen, und $a=0$ oder $=1$ zu setzen ist, jenachdem n gerade oder ungerade ist.

Ist $n=1$, so wird $\frac{1}{n-a}$ unendlich, allein die ganze Betrachtung lehrt, dass dann $\frac{2\lambda+1}{2}\pi\sqrt{-1}.(1+\frac{1}{n-a})$ ganz zu vernachlässigen ist, indem der Logarithmus für diese Integrationsgrenzen nicht imaginär wird. Daher ist für $n=1$

$$13)\ \int_0^{\pi} \varphi \log \sin \varphi d\varphi = -\tfrac{1}{2}\pi^2 \left[\log 2 - 2k\pi\sqrt{-1}\right],$$

welche Formel als Ausnahmefall von 12) zu betrachten ist.

Versteht man in dieser Gleichung unter $\log \sin \varphi$ nur die reellen Werthe, welche es zwischen $\varphi=0$ und $\varphi=\pi$ jedesmal erlangt, so verschwindet k und es wird $\int_0^{\pi} \varphi \log \sin \varphi d\varphi = -\tfrac{1}{2}\pi^2 \log 2$. Dann ist der von Hill angegebene Werth richtig, in allen andern Fällen ist er falsch.

II. Das bestimmte Integral $\int_0^{n\pi} \log \sin \varphi d\varphi$, in welchem n eine positive ganze Zahl anzeigt.

Der Werth dieses Integrals zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ wird am leichtesten durch das Integral $\int_0^{\pi} \varphi \log \sin \varphi d\varphi$ bestimmt.

Denn zerlegt man das letztere von $\varphi=0$ bis $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, und von $\varphi=\frac{1}{2}\pi$ bis $\varphi=\pi$, und transformirt den zweiten Theil durch die Substitution $\varphi=\pi-\varphi'$, so findet man sogleich $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\sin\varphi d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi\log\sin\varphi d\varphi$. Also ist nach 13)

$$14)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\sin\varphi d\varphi=-\tfrac{1}{2}\pi(\log 2-2k\pi\sqrt{-1}).$$

Da nun nach dem Begriffe eines bestimmten Integrals als der Grenze einer Summe von unendlich vielen Elementen offenbar $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}\log\sin\varphi d\varphi=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\sin\varphi d\varphi$ ist, so ist ferner

$$15)\quad \int_0^{\pi}\log\sin\varphi d\varphi=-\pi(\log 2-2k\pi\sqrt{-1}).$$

Ganz nach derselben Ansicht ist $\int_{\pi}^{2\pi}\log-\sin\varphi d\varphi=\int_0^{\pi}\log\sin\varphi d\varphi$. Da nun $\log-\sin\varphi=\log\sin\varphi+(2\lambda+1)\pi\sqrt{-1}$, so ist $\int_0^{\pi}\log\sin\varphi d\varphi$ $=\int_{\pi}^{2\pi}\log\sin\varphi d\varphi+(2\lambda+1)\pi\sqrt{-1}\int_{\pi}^{2\pi}d\varphi$, folglich

$$\int_{\pi}^{2\pi}\log\sin\varphi d\varphi=\int_0^{\pi}\log\sin\varphi d\varphi-(2\lambda+1)\pi^2\sqrt{-1},$$

also

$$\int_0^{2\pi}\log\sin\varphi d\varphi=-2\pi\left[\log 2-2k\pi\sqrt{-1}-\frac{2\lambda+1}{2}\pi\sqrt{-1}\right].$$

Dieselben Werthe haben die Integrale von 2π bis 4π, von 4π bis 6π u. s. f.; demnach hat man allgemein

$$16)\quad \int_0^{2m\pi}\log\sin\varphi d\varphi=-2m\pi\left[\log 2-2k\pi\sqrt{-1}-\frac{2\lambda+1}{2}\pi\sqrt{-1}\right].$$

Nun zerfälle man $\int_0^{(2m+1)\pi}\log\sin\varphi d\varphi$ von $\varphi=0$ bis $\varphi=2m\pi$, und von $\varphi=2m\pi$ bis $\varphi=(2m+1)\pi$, so erhält man, da $\int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi}\log\sin\varphi d\varphi$ $=\int_0^{\pi}\log\sin\varphi d\varphi$ ist, nach 16) und 15)

$$17)\quad \int_0^{(2m+1)\pi}\log\sin\varphi d\varphi$$

$$=-(2m+1)\pi\left[\log 2-2k\pi\sqrt{-1}-(2\lambda+1)\frac{m}{2m+1}\pi\sqrt{-1}\right].$$

Folglich ist allgemein

$$18)\quad \int_0^{n\pi}\log\sin\varphi d\varphi$$

$$=-n\pi\left[\log 2-2k\pi\sqrt{-1}-\frac{2\lambda+1}{2}\;\frac{n-a}{n}\pi\sqrt{-1}\right],$$

indem man $a=0$ oder $=1$ zu setzen hat, jenachdem n gerade oder ungerade ist.

III. Summirung einer Reihe mittelst Transformation des Integrals 14).

Macht man in dem Integral $J=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\log\sin\varphi d\varphi$ die Substitution $\sin\varphi=x$, so geht es über in $\int_0^1\frac{\log x dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Da nun nach dem binomischen Lehrsatze $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1=\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1.3.5..(2p-1)}{2.4.6....2p}x^{2p}$, so ist $\int_0^1\log x dx[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1]=\int_0^1\log x dx\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1.3.5..(2p-1)}{2.4.6....2p}x^{2p}$. Es ist aber $\int x^{2p}\log x dx=\frac{x^{2p+1}\log x}{2p+1}-\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)^2}$, folglich, da man sich leicht versichert, dass $x^{2p+1}\log x$ für $x=0$ verschwindet, $\int_0^1 x^{2p}\log x dx=-\frac{1}{(2p+1)^2}$. Daher wird $\int_0^1\log x dx[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1]$ $=-\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cdot\frac{1.3.5..(2p-1)}{2.4.6....2p}$. Weil endlich $-\int_0^1\log x dx=1$, so hat man $\int_0^1\frac{\log x dx}{\sqrt{1-x^2}}=-1-\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cdot\frac{1.3...(2p-1)}{2.4....2p}$; oder nach 14)

$$19)\quad 1+\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\cdot\frac{1.3.5..(2p-1)}{2.4.6....2p}=\tfrac{1}{2}\pi\log 2.\ ^{*)}.$$

IV. Bekanntlich ist $\operatorname{Arc}\sin x=x+\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1.3.5..(2p-1)}{2.4.6....2p}\cdot\frac{x^{2p+1}}{2p+1}$,

folglich

$$20)\quad \int_0^1\frac{\operatorname{Arc}\sin x}{x}dx=-\int_0^1\frac{\log x dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

oder

$$21)\quad \int_0^1\frac{\operatorname{Arc}\sin x dx}{x}=\tfrac{1}{2}\pi\log 2.$$

---

*) Der Factor $2k\pi\sqrt{-1}$ muss hier verschwinden, da $\int_0^1\frac{\log x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ nur unter der Voraussetzung den Werth $-\frac{1}{(2p+1)^2}$ hat, dass unter $\log x$ der reelle Werth verstanden wird.

XXX.

Ueber eine geometrische Aufgabe.

Von

dem Herausgeber.

In der von Herrn Director Rümker zu Hamburg herausgegebenen trefflichen vierten Auflage des Handbuchs der Schifffahrts-Kunde. Hamburg. 1844., welche so eben erschienen ist, hat Herr Hofrath Gauss S. 81. — S. 84. eine schöne Auflösung der folgenden, auch von Herrn Director Rümker S. 72. aufgelösten Aufgabe gegeben:

Aus drei in einer und derselben geraden Linie liegenden Punkten M, M_1, M_2, deren Entfernungen von einander bekannt sind, werden zwei andere mit jenen drei Punkten in einer Ebene liegende Punkte S und S_1, deren Entfernung von einander gleichfalls bekannt ist, gesehen, und in den Punkten M, M_1, M_2 die 180° nicht übertseigenden Winkel SMS_1, SM_1S_1, SM_2S_1, welche die von einem jeden der Punkte M, M_1, M_2 nach S und S_1 gezogenen Gesichtslinien mit einander einschliessen, gemessen. Man soll die gegenseitige Lage der fünf Punkte M, M_1, M_2 und S, S_1 bestimmen.

Ich hoffe die von Herrn Hofrath Gauss gegebene Auflösung den Lesern des Archivs, denen wohl nicht allen das Handbuch der Schifffahrts-Kunde zu Gesicht kommen dürfte, in einem späteren Hefte mittheilen zu können, und will hier nur in der Kürze zeigen, wie sich vier verschiedene Auflösungen des vorliegenden Problems aus den bei Gelegenheit einer andern Aufgabe in der Abhandlung Archiv. Thl. IV. Nr. XLII. von mir entwickelten Gleichungen ableiten lassen.

Ich nehme wie a. a. O. die gerade Linie, in welcher die drei Punkte M, M_1, M_2 liegen, als die Abscissenaxe eines rechtwinkligen Coordinatensystems an, und bezeichne die bekannten Coordinaten der Punkte M, M_1, M_2 respective durch

$$a,\ 0;\ a_1,\ 0,\ a_2,\ 0;$$

die unbekannten Coordinaten der Punkte S und S_1 durch x, y und x_1, y_1. Ferner bezeichne ich die 180° nicht übersteigenden Winkel

$$SMS_1,\ SM_1S_1,\ SM_2S_1$$

selbst oder deren Ergänzungen zu 180°, jenachdem man sich, um respective von dem Punkte

$$M,\ M_1,\ M_2$$

durch den Punkt S zu dem Punkte S_1 zu gelangen, nach derselben Richtung, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, oder nach der entgegengesetzten Richtung hin bewegen muss, durch

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2;$$

die bekannte Entfernung SS_1 durch $2e$, und setze wie a. a. O.

$$1)\quad x+x_1=2u,\ y+y_1=2v;\quad x-x_1=2u_1,\ y-y_1=2v_1;$$

also

$$2)\quad x=u+u_1,\ y=v+v_1;\quad x_1=u-u_1,\ y_1=v-v_1.$$

Dann habe ich wie a. a. O. S. 393. Nr. 35) zwischen den Grössen $u,\ v,\ u_1,\ v_1$ die drei folgenden Gleichungen:

$$3)\quad \begin{cases} u^2+v^2-u_1^2-v_1^2+2\cot\alpha.(uv_1-vu_1)-2au-2a\cot\alpha.v_1=-a^2, \\ u^2+v^2-u_1^2-v_1^2+2\cot\alpha_1.(uv_1-vu_1)-2a_1u-2a_1\cot\alpha_1.v_1=-a_1^2, \\ u^2+v^2-u_1^2-v_1^2+2\cot\alpha_2.(uv_1-vu_1)-2a_2u-2a_2\cot\alpha_2.v_1=-a_2^2; \end{cases}$$

zu denen nun wegen der bekannten Entfernung $2e$ der Punkte S und S_1 von einander die vierte Gleichung

$$4)\quad u_1^2+v_1^2=e^2$$

kommt.

Mittelst der drei ersten Gleichungen, welche in Beziehung auf die unbekannten Grössen

$$u^2+v^2-u_1^2-v_1^2,\ uv_1-vu_1,\ u,\ v_1$$

vom ersten Grade sind, kann man auf dem Wege gewöhnlicher algebraischer Elimination jede drei dieser vier Grössen durch die vierte in linearer Form darstellen, so dass man entweder

$$5)\ u^2+v^2-u_1^2-v_1^2=A+Bu,\ uv_1-vu_1=A_1+B_1u,\ v_1=A_2+B_2u;$$

oder

$$6)\ u^2+v^2-u_1^2-v_1^2=A'+B'v_1,\ uv_1-vu_1=A'_1+B'_1v_1,\ u=A'_2+B'_2v_1;$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$7)\quad u^2+v^2-u_1^2-v_1^2=t$$

gesetzt wird,

$$8)\quad uv_1-vu_1=A''+B''t,\ u=A''_1+B''_1t,\ v_1=A''_2+B''_2t;$$

oder endlich, wenn der Kürze wegen

$$9)\quad uv_1-vu_1=w$$

gesetzt wird,

$$10)\ u^2+v^2-u_1^2-v_1^2=A'''+B'''w,\ u=A'''_1+B'''_1w,\ v_1=A'''_2+B'''_2w$$

erhält, wo die sämmtlichen durch die Symbole A und B bezeichneten Coefficienten als bekannt zu betrachten sind.

Was nun zuvörderst die erste dieser vier Auflösungen betrifft, so erhält man aus den drei Gleichungen 5) mit Hülfe der Gleichung 4) leicht die Gleichung

$$u(A_2+B_2u)-u_1\sqrt{e^2+A+Bu-u^2}=A_1+B_1u,$$

also

$$u_1=\frac{u(A_2+B_2u)-(A_1+B_1u)}{\sqrt{e^2+A+Bu-u^2}},$$

und folglich vermöge der Gleichung 4):

$$11)\quad \frac{\{u(A_2+B_2u)-(A_1+B_1u)\}^2}{e^2+A+Bu-u^2}+(A_2+B_2u)^2=e^2.$$

Wie man, wenn man mittelst dieser Gleichung, welche, gehörig entwickelt, vom dritten Grade ist, u bestimmt hat, mit Hülfe der Gleichungen 4) und 5) auch v, u_1, v_1, und dann mittest der Gleichungen 2) auch x, y; x_1, y_1 bestimmen kann, unterliegt keinem Zweifel.

Ferner ergiebt sich aus den Gleichungen 6) mit Hülfe der Gleichung 4) die Gleichung

$$v_1(A'_2+B'_2v_1)-u_1\sqrt{e^2+A'+B'v_1-(A'_2+B'_2v_1)^2}=A'_1+B'_1v_1,$$

also

$$u_1=\frac{v_1(A'_2+B'_2v_1)-(A'_1+B'_1v_1)}{\sqrt{e^2+A'+B'v_1-(A'_2+B'_2v_1)^2}},$$

und folglich wegen der Gleichung 4):

$$12)\quad \frac{\{v_1(A'_2+B'_2v_1)-(A'_1+B'_1v_1)\}^2}{e^2+A'+B'v_1-(A'_2+B'_2v_1)^2}+v_1^2=e^2,$$

woraus sich nach gehöriger Entwickelung zur Bestimmung von v_1 wieder eine Gleichung des dritten Grads ergiebt. Hat man v_1 mittelst dieser Gleichung gefunden, so lassen sich dann mittelst der Gleichungen 4), 6) und 2) auch leicht die Grössen u, v, u_1 und x, y; x_1, y_1 bestimmen.

Aus den Gleichungen 8) und 4) ergiebt sich

$$(A''_1+B''_1t)(A''_2+B''_2t)-v\sqrt{e^2-(A''_2+B''_2t)^2}=A''+B''t,$$

also

$$v=\frac{(A''_1+B''_1t)(A''_2+B''_2t)-(A''+B''t)}{\sqrt{e^2-(A''_2+B''_2t)^2}}.$$

Führt man nun diesen Werth von v und den Werth

$$u=A''_1+B''_1t$$

in die Gleichung 7) ein, so erhält man mit Hülfe der Gleichung 4) die Gleichung

$$13)\quad (A''_1+B''_1t)^2+\frac{\{(A''_1+B''_1t)(A''_2+B''_2t)-(A''+B''t)\}^2}{e^2-(A''_2+B''_2t)^2}=e^2+t,$$

welche, gehörig entwickelt, wieder zu einer Gleichung des dritten Grades führt. Hat man aber mittelst dieser Gleichung t gefunden, so können mittelst der aus dem Obigen bekannten Formeln auch die übrigen unbekannten Grössen ohne Schwierigkeit bestimmt werden.

Endlich erhält man aus den Gleichungen 9), 10) und 4) die Gleichung

$$w=(A'''_1+B'''_1w)(A'''_2+B'''_2w)$$
$$-\sqrt{\{e^2-(A'''_2+B'''_2w)^2\}\{e^2+A'''+B'''w-(A'''_1+B'''_1w)^2\}}$$

oder

$$14)\quad \{w-(A'''_1+B'''_1w)(A'''_2+B'''_2w)\}^2$$
$$=\{e^2-(A'''_2+B'''_2w)^2\}\{e^2+A'''+B'''w-(A'''_1+B'''_1w)^2\},$$

welche, gehörig entwickelt, wieder zu einer Gleichung des dritten Grades führt.

Von diesen vier Auflösungen wollen wir nun bloss die erste etwas weiter entwickeln. Wenn man mittelst der Gleichungen 3) die Grössen

$$u^2+v^2-u^2_1-v_1^2,\ uv_1-vu_1,\ v_1$$

sämmtlich durch die Grösse u ausdrückt, und der Kürze wegen

$$15)\quad N=2(a-a_1)\cot\alpha\cot\alpha_1+2(a_1-a_2)\cot\alpha_1\cot\alpha_2+2(a_2-a)\cot\alpha_2\cot\alpha,$$

$$Z=-2a_2^2(a-a_1)\cot\alpha\cot\alpha_1$$
$$-2a^2(a_1-a_2)\cot\alpha_1\cot\alpha_2-2a_1^2(a_2-a)\cot\alpha_2\cot\alpha,$$

$$\mathfrak{Z}=4a_2(a-a_1)\cot\alpha\cot\alpha_1$$
$$+4a(a_1-a_2)\cot\alpha_1\cot\alpha_2+4a_1(a_2-a)\cot\alpha_2\cot\alpha,$$

$$Z_1=-a(a_1-a_2)(a_1+a_2)\cot\alpha$$
$$-a_1(a_2-a)(a_2+a)\cot\alpha_1-a_2(a-a_1)(a+a_1)\cot\alpha_2,$$

$$\mathfrak{Z}_1=2a(a_1-a_2)\cot\alpha+2a_1(a_2-a)\cot\alpha_1+2a_2(a-a_1)\cot\alpha_2,$$

$$Z_2=-(a_1-a_2)(a_1+a_2)\cot\alpha$$
$$-(a_2-a)(a_2+a)\cot\alpha_1-(a-a_1)(a+a_1)\cot\alpha_2,$$

$$\mathfrak{Z}_2=2(a_1-a_2)\cot\alpha+2(a_2-a)\cot\alpha_1+2(a-a_1)\cot\alpha_2$$

setzt, so ist

$$u^2 + v^2 - u_1{}^2 - v_1{}^2 = \frac{Z}{N} + \frac{\mathfrak{Z}}{N}u,\ uv_1 - vu_1 = \frac{Z_1}{N} + \frac{\mathfrak{Z}_1}{N}u,\ v_1 = \frac{Z_2}{N} + \frac{\mathfrak{Z}_2}{N}u;$$

im Obigen also

$$16)\ A = \frac{Z}{N},\ B = \frac{\mathfrak{Z}}{N};\ A_1 = \frac{Z_1}{N},\ B_1 = \frac{\mathfrak{Z}_1}{N};\ A_2 = \frac{Z_2}{N},\ B_2 = \frac{\mathfrak{Z}_2}{N}$$

zu setzen.

Entwickelt man aber die Gleichung 11) gehörig, so erhält man:

$$\begin{aligned} 17)\ 0 = \ & A_1{}^2 - (e^2 + A)(e^2 - A_2^2) \\ & + \{2(e^2 + A)A_2B_2 - (e^2 - A_2^2)B - 2A_1(A_2 - B_1)\}u \\ & + \{e^2 + B_1{}^2 + (e^2 + A)B_2^2 - 2(A_1B_2 + A_2B_1) + 2A_2BB_2\}u^2 \\ & + (BB_2 - 2B_1)B_2u^3. \end{aligned}$$

Die weitere Entwickelung des Vorhergehenden, insbesondere auch der drei übrigen obigen Auflösungen, überlasse ich den Lesern, und bemerke nur noch, dass, wenn auch allerdings im Vorhergehenden, da die gerade Linie, in welcher die Punkte M, M_1, M_2 liegen, als Abscissenaxe angenommen worden ist, die Lage der Punkte S und S_1 gegen diese Linie und die Punkte M, M_1, M_2 bestimmt worden ist, daraus natürlich immer auch leicht eine Bestimmung der Lage der Punkte M, M_1, M_2 und der geraden Linie, in welcher dieselben liegen, gegen die Linie SS_1 und die Punkte S und S_1 abgeleitet werden kann, was hier nicht weiter erläutert zu werden braucht.

Zum Schluss erlaube ich mir endlich noch an diejenigen Leser, welche in der Schifffahrts-Kunde erfahrener und bewanderter als ich sind, die Frage zu richten, ob nicht eben so wie die vorhergehende Aufgabe auch das in der Abhandlung Thl. IV. Nr. XLII. von mir aufgelöste Problem bei der Schifffahrt nützliche Anwendung finden kann. Wenigstens scheint mir diese letztere Aufgabe den besonderen Vortheil darzubieten, dass man bei derselben die Entfernung der Punkte S und S_1 von einander, überhaupt deren Lage, gar nicht zu kennen braucht. Wenn also ein Schiff bei unverändertem Curs in vier Punkten, deren Entfernungen von einander durch die bekannten, auf der See gebräuchlichen Mittel bestimmt worden sind, die Gesichtswinkel zwischen zwei ihrer Lage nach ganz unbekannten Landmarken gemessen hat, so lässt sich aus diesen Datis mit Hülfe der in Rede stehenden Aufgabe immer die gegenseitige Lage dieser beiden Landmarken und der vier Oerter des Schiffs bestimmen.

XXXI.

Ueber einige Integrale, welche goniometrische Functionen involviren.

Von dem

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Durch $(n-1)$malige Differenziation der bekannten Gleichungen

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2} = \frac{\cos\left(\operatorname{Arctan}\frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2} = \frac{\sin\left(\operatorname{Arctan}\frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}$$

nach a als unabhängiger Veränderlichen hat man folgende beiden Integrale gefunden *):

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{1.2.3\ldots.(n-1)\cos\left(n\operatorname{Arctan}\frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}n}},$$

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{1.2.3\ldots.(n-1)\sin\left(n\operatorname{Arctan}\frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}n}};$$

welche auch allgemeiner für jedes gebrochene n gelten, wenn man statt $1.2.3\ldots.(n-1)$ die Gammafunction $\Gamma(n)$ setzt.

Es ist dann für jedes beliebige p:

---

*) M. s. hierüber einen Aufsatz des Herrn Herausgebers in Crelle's Journal. Thl. VIII. S. 146.

$$\int_0^\infty x^{p-1}\, e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{\Gamma(p)\cos\,(p\,\mathrm{Arctan}\,\frac{b}{a})}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}p}} \ldots (1),$$

$$\int_0^\infty x^{p-1}\, e^{-ax} \sin bx\, dx = \frac{\Gamma(p)\sin\,(p\,\mathrm{Arctan}\,\frac{b}{a})}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}p}} \ldots (2).$$

Von diesen Gleichungen lassen sich einige sehr wichtige Anwendungen zur Entdeckung anderweiter Integrale machen, von denen nur einige specielle Fälle bekannt sind.

§. 1.

Wir erinnern zuvörderst an die folgenden beiden bekannten Integrale:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^\mu}\, dx = \frac{\pi}{2\Gamma(\mu)\cos\frac{1}{2}\mu\pi},\ 1>\mu>0 \ldots (3)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\mu}\, dx = \frac{\pi}{2\Gamma(\mu)\sin\frac{1}{2}\mu\pi},\ 2>\mu>0 \ldots (4)$$

welche man leicht aus den ersten Eigenschaften der Gammafunctionen ableitet*). Setzt man $x=kt$, wo t die neue Veränderliche, k eine willkührliche Constante bedeutet, so ergiebt sich leicht:

$$\int_0^\infty \frac{\cos kt}{t^\mu}\, dt = \frac{\pi k^{\mu-1}}{2\Gamma(\mu)\cos\frac{1}{2}\mu\pi},\ 1>\mu>0 \ldots (5)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin kt}{t^\mu}\, dt = \frac{\pi k^{\mu-1}}{2\Gamma(\mu)\sin\frac{1}{2}\mu\pi},\ 2>\mu>0 \ldots (6)$$

von welchen Formeln wir sogleich Gebrauch machen werden.

Wird in der Gleichung (1) t für b gesetzt, beiderseits mit $\frac{dt}{t^q}$ multiplicirt und darauf nach t zwischen den Gränzen $t=0$, $t=\infty$ integrirt, so wird

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^q} \int_0^\infty x^{p-1}\, e^{-ax} \cos tx dx = \Gamma(p) \int_0^\infty \frac{dt}{t^q} \cdot \frac{\cos\,(p\,\mathrm{Arctan}\,\frac{t}{a})}{(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}p}} \ldots (7).$$

Man hat hier auf der linken Seite einen von den glücklichen Fällen, in welchen man beide Integrationen ausführen kann, wenn man die Ordnung derselben umkehrt. Integrirt man nämlich zuerst nach t, so ist das Doppelintegral links gleich dem folgenden:

*) M. s. den dritten Abschnitt meiner „Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale."

$$\int_0^\infty x^{p-1}\, e^{-ax} dx \int_0^\infty \frac{\cos xt}{t^q}\, dt,$$

in welchem sich die Integration nach t mit Hülfe der Gleichung (5) für $k = x$ und $\mu = q$ bewerkstelligen lässt. Es ergiebt sich nämlich

$$\frac{\pi}{2\Gamma(q) \cos \frac{1}{2} q\pi} \int_0^\infty x^{p-1}\, e^{-ax} dx \,.\, x^{q-1}, \; 1 > q > 0 \ldots . (8)$$

Hier kann wieder nach x integrirt werden, wenn man sich an die Formel

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}\, e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu}$$

erinnert und $\mu = p + q - 1$ setzt.

Das Integral (8), d. h. die linke Seite der Gleichung (7), geht jetzt in das folgende über:

$$\frac{\pi}{2\Gamma(q) \cos \frac{1}{2} q\pi} \cdot \frac{\Gamma(p+q-1)}{a^{p+q-1}}, 1 > q > 0$$

und es ist folglich mit Hülfe der Gleichung (7) nach beiderseitiger Division mit $\Gamma(p)$:

$$\left.\begin{array}{c} \displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{t^q} \cdot \frac{\cos (p \operatorname{Arctan} \frac{t}{a})}{(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}p}} = \frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \cdot \frac{\pi}{2a^{p+q-1} \cos \frac{1}{2} q\pi} \\ 1 > q > 0 \end{array}\right\} \ldots . (9).$$

Hier lässt sich nun das Integral links in eine andere, viel bequemere Form bringen, wenn man nämlich

$$\operatorname{Arctan} \frac{t}{a} = x$$

setzt. Es folgt hieraus

$$t = a \tan x, \; dt = \frac{a\,dx}{\cos^2 x}.$$

Man hat aber auch unmittelbar

$$d (\operatorname{Arctan} \frac{t}{a}) = \frac{a\,dt}{a^2+t^2} = dx,$$

mithin

$$\frac{1}{a^2+t^2} = \frac{dx}{a\,dt},$$

oder wenn man für dt den oben gefundenen Werth setzt:

$$\frac{1}{a^2+t^2}=\frac{\cos^2 x}{a^2}.$$

Ferner wird für $t=\infty$, $x=\text{Arctan}\,\infty=\frac{\pi}{2}$ und für $t=0$, $x=\text{Arctan}\,0=0$. Durch Substitution aller dieser Werthe verschwindet die Constante a von selbst und man findet:

$$\left.\begin{array}{c}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos px}{\tan^q x}\cos^{p-2}x\,dx=\frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\cdot\frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}q\pi}\\ 1>q>0\end{array}\right\}\ldots.(10)$$

ein sehr bemerkenswerthes Resultat, dessen Allgemeinheit mancherlei Folgerungen zulässt.

§. 11.

Durch ein ganz gleiches Verfahren kann man aus der Gleichung (2) ein analoges Resultat ziehen. Setzt man auch hier t für b, multiplicirt mit $\frac{dt}{t^q}$ und integrirt für das Intervall $t=0$ bis $t=\infty$, so wird:

$$\int_0^\infty\frac{dt}{t^q}\int_0^\infty x^{p-1}\,e^{-ax}\sin tx\,dx=\Gamma(p)\int_0^\infty\frac{dt}{t^q}\cdot\frac{\sin\left(p\,\text{Arctan}\frac{t}{a}\right)}{(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}p}}\ldots.(11)$$

Durch Umkehrung der Integrationsordnung wird die linke Seite

$$=\int_0^\infty x^{p-1}\,e^{-ax}dx\int_0^\infty\frac{\sin xt}{t^q}dt=\frac{\pi}{2\Gamma(q)\sin\frac{1}{2}q\pi}\int_0^\infty x^{p-1}\,e^{-ax}dx.x^{q-1}$$
$$2>q>0,$$

wobei die Formel (6) für $k=x$, $\mu=q$ in Anwendung gebracht worden ist. Die noch übrige Integration lässt sich wieder wie vorhin ausführen, und man erhält für die linke Seite der Gleichung (11) den Ausdruck

$$\frac{\pi}{2\Gamma(q)\sin\frac{1}{2}q\pi}\cdot\frac{\Gamma(p+q-1)}{a^{p+q-1}},\ 2>q>0,$$

mithin nach beiderseitiger Division mit $\Gamma(p)$ die Gleichung

$$\int_0^\infty\frac{dt}{t^q}\cdot\frac{\sin\left(p\,\text{Arctan}\frac{t}{a}\right)}{(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}p}}=\frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\cdot\frac{\pi}{2a^{p+q-1}\sin\frac{1}{2}q\pi}$$
$$2>q>0.$$

Setzt man hier wieder

$$\text{Arctan}\,\frac{t}{a}=x,$$

so erhält man durch ganz die nämlichen Reductionen wie in §. I., das Resultat

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin px}{\tan^q x}\cos^{p-2}x\,dx=\frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\cdot\frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}q\pi},\ 2>q>0\ldots.(12)$$

welches dem in (10) gefundenen analog ist. Bemerkenswerthe specielle Fälle der beiden Gleichungen (10) und 12) sind folgende.

1) Für $p=2$ steht rechts der Quotient $\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(2)\,\Gamma(q)}$, welcher durch die Bemerkung, dass $\Gamma(q+1)=q\Gamma(q)$ und $\Gamma(2)=1$ ist, sich auf q reducirt. Man hat also:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cot^q x\cos 2x\,dx=\frac{q\pi}{2\cos\frac{1}{2}q\pi},\ 1>q>0\ldots.(13)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cot^q x\sin 2x\,dx=\frac{q\pi}{2\sin\frac{1}{2}q\pi},\ 2>q>0\ldots.(14)$$

2) Nimmt man in (10) und (12) $p=1$, und bemerkt, dass $\Gamma(1)=1$ ist, so reduciren sich beide Formeln auf ein gemeinschaftliches Resultat, nämlich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cot^q x\,dx=\frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}q\pi},\ 1>q>0\ldots.(15)$$

woraus man dadurch, dass man $\frac{\pi}{2}-x$ für x substituirt, auch noch das folgende ableitet:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^q x\,dx=\frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}q\pi},\ 1>q>0\ldots.(16)$$

3) Für $p=2-q$ erhält man rechts den Quotienten

$$\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(2-q)\,\Gamma(q)}=\frac{1}{(1-q)\Gamma(1-q)\Gamma(q)};$$

bekanntlich ist aber $\Gamma(q)\Gamma(1-q)=\frac{\pi}{\sin q\pi}$; führen wir diese Werthe ein und bemerken, dass $\sin q\pi=2\sin\frac{1}{2}q\pi\cos\frac{1}{2}q\pi$ ist, so finden wir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2-q)x}{\sin^q x}\,dx=\frac{\sin\frac{1}{2}q\pi}{1-q},\ 1>q>0\ldots.(17)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2-q)x}{\sin^q x}\,dx=\frac{\cos\frac{1}{2}q\pi}{1-q},\ 2>q>0\ldots.(18)$$

4) Setzt man in Formel (12) $q=1$, was in (10) nicht geschehen darf, so ergiebt sich für jedes von Null verschiedene p:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin px}{\sin x} \cos^{p-1} x dx = \frac{\pi}{2} \ldots . (19)$$

wie auf anderem Wege auch Liouville in Crelle's Journal. Bd. 13. S. 232. gefunden hat.

XXXII.

Ueber eine für den Elementar-Unterricht in der Trigonometrie vorzüglich geeignete Methode zur Erläuterung der Berechnung der Tafeln der Sinus und Cosinus.

Nach einem Aufsatze des Herrn Lionnet, Professeur au Collége royal Louis-le-Grand, in den Nouvelles Annales de Mathématiques. Journal des candidats aux écoles polytechnique et normal, rédigé par Terquem et Gerono. T. II. Paris. 1843. p. 216.

frei bearbeitet

von

dem Herausgeber.

Wir nehmen im Folgenden den Bogen x als positiv und nicht grösser als die Einheit an, was bekanntlich für die Berechnung der Tafeln der Sinus und Cosinus völlig hinreichend ist, da man bei derselben bloss von 0 bis 45° oder vielmehr von $x=0$ bis $x=0,78539816$ zu gehen braucht, und legen unsern Betrachtungen die beiden folgenden Sätze zum Grunde.

Weil unter den gemachten Voraussetzungen

$$\sin x < x < \operatorname{tang} x$$

ist, so ist

$$\frac{\sin x}{\sin x} > \frac{\sin x}{x} > \frac{\sin x}{\operatorname{tang} x},$$

also

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Nähert nun x sich der Null, so nähert $\cos x$ sich der Einheit, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur x der Null nahe genug kommen lässt. Also nähert sich der zwischen 1 und $\cos x$ liegende Bruch $\frac{\sin x}{x}$ um so mehr der Einheit, wenn x sich der Null nähert, und kann der Einheit beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur x nahe genug bei Null annimmt, oder die Einheit ist die Gränze, welcher der in Rede stehende Bruch sich bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn man x sich der Null bis zu jedem beliebigen Grade nähern lässt.

Ferner ist bekanntlich allgemein

$$\sin x = 2 \sin \tfrac{1}{2}x \cos \tfrac{1}{2}x$$

und

$$\cos \tfrac{1}{2}x = 1 - 2 \sin \tfrac{1}{4}x^2,$$

also nach der vorhergehenden Gleichung:

$$1)\quad \sin x = 2 \sin \tfrac{1}{2}x - 4 \sin \tfrac{1}{2}x \sin \tfrac{1}{4}x^2.$$

Weil nun

$$\sin \tfrac{1}{2}x < \tfrac{1}{2}x,\quad \sin \tfrac{1}{4}x < \tfrac{1}{4}x,\quad \sin \tfrac{1}{4}x^2 < \tfrac{1}{16}x^2$$

ist, so ist

$$4 \sin \tfrac{1}{2}x \sin \tfrac{1}{4}x^2 < \tfrac{1}{8}x^3,$$

und folglich nach 1)

$$\sin x > 2 \sin \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^3.$$

Setzt man hierin für x nach und nach

$$x,\ \frac{x}{2},\ \frac{x}{2^2},\ \frac{x}{2^3}, \ldots \frac{x}{2^{n-1}};$$

so erhält man:

$$\sin x > 2 \sin \frac{x}{2} - \tfrac{1}{8}x^3,\quad \sin \frac{x}{2} > 2 \sin \frac{x}{2^2} - \tfrac{1}{8} \cdot \frac{x^3}{2^3},$$

$$\sin \frac{x}{2^2} > 2 \sin \frac{x}{2^3} - \tfrac{1}{8} \cdot \frac{x^3}{2^6},\ \text{u. s. w.}$$

$$\sin\frac{x}{2^{n-1}} > 2\sin\frac{x}{2^n} - \tfrac{1}{8}\cdot\frac{x^3}{2^{3(n-1)}}.$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten der Zeichen nach der Reihe mit

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots .2^{n-1}$$

addirt und hebt auf, was sich aufheben lässt; so erhält man

$$\sin x > 2^n \sin\frac{x}{2^n} - \tfrac{1}{8}\left\{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \ldots + \frac{1}{2^{2(n-1)}}\right\} x^3,$$

also nach der Lehre von den geometrischen Progressionen:

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} - \tfrac{1}{8}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{2n}}}{1-\frac{1}{2^2}}\,x^2.$$

Lässt man jetzt n ins Unendliche wachsen und geht zu den Gränzen über, so erhält man, weil $\frac{x}{2^n}$ sich der Null nähert:

$$\frac{\sin x}{x} > 1 - \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{4}{3}x^2,$$

d. i.

$$2)\quad \sin x > x - \tfrac{1}{6}x^3.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\sin\tfrac{1}{2}x > \frac{x}{2} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{2^4},\quad \sin\tfrac{1}{4}x > \frac{x}{2^2} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{2^7};$$

also

$$\sin\tfrac{1}{4}x^2 > \frac{x^2}{2^4} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{2^8} + \tfrac{1}{9}\cdot\frac{x^6}{2^{14}},$$

und folglich um so mehr

$$\sin\tfrac{1}{4}x^2 > \frac{x^2}{2^4} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{2^8}.$$

Also ist ferner nach dem Obigen, wie man durch Multiplication leicht findet:

$$\sin\tfrac{1}{2}x\sin\tfrac{1}{4}x^2 > \frac{x^3}{2^5} - \frac{x^5}{2^9} + \tfrac{1}{9}\cdot\frac{x^7}{2^{12}},$$

und folglich um so mehr

$$\sin \tfrac{1}{2} x \sin \tfrac{1}{4} x^2 > \frac{x^3}{2^5} - \frac{x^5}{2^9};$$

also

$$4 \sin \tfrac{1}{2} x \sin \tfrac{1}{4} x^2 > \frac{x^3}{2^3} - \frac{x^5}{2^7},$$

und daher nach 1)

$$\sin x < 2 \sin \tfrac{1}{2} x - \frac{x^3}{2^3} + \frac{x^5}{2^7}.$$

Setzt man nun hierin für x nach und nach

$$x, \quad \frac{x}{2}, \quad \frac{x}{2^2}, \quad \frac{x}{2^3}, \ldots \frac{x}{2^{n-1}};$$

so erhält man

$$\sin x < 2 \sin \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3} + \frac{x^5}{2^7}, \qquad \sin \frac{x}{2} < 2 \sin \frac{x}{2^2} - \frac{x^3}{2^6} + \frac{x^5}{2^{12}},$$

$$\sin \frac{x}{2^2} < 2 \sin \frac{x}{2^3} - \frac{x^3}{2^9} + \frac{x^5}{2^{17}}, \text{ u. s. w.}$$

$$\sin \frac{x}{2^{n-1}} < 2 \sin \frac{x}{2^n} - \frac{x^3}{2^{3n}} + \frac{x^5}{2^{5n+2}};$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten der Zeichen nach der Reihe mit

$$1, \ 2, \ 2^2, \ 2^3 \ldots\ldots 2^{n-1}$$

multiplicirt, dann addirt und aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$\sin x < 2^n \sin \frac{x}{2^n} - \frac{1}{2^3} \left\{ 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \ldots + \frac{1}{2^{2(n-1)}} \right\} x^3$$
$$+ \frac{1}{2^7} \left\{ 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{12}} + \ldots + \frac{1}{2^{4(n-1)}} \right\} x^5;$$

also nach der Lehre von den geometrischen Progressionen:

$$\sin x < 2^n \sin \frac{x}{2^n} - \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{2n}}}{1 - \frac{1}{2^2}} x^3 + \frac{1}{2^7} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{4n}}}{1 - \frac{1}{2^4}} x^5,$$

oder

$$\frac{\sin x}{x} < \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} - \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{2n}}}{1 - \frac{1}{2^2}} x^2 + \frac{1}{2^7} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{4n}}}{1 - \frac{1}{2^4}} x^4.$$

Lässt man nun n in's Unendliche wachsen und geht zu den Gränzen über, so erhält man

$$\frac{\sin x}{x} < 1 - \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{120}x^4$$

oder

$$3)\quad \sin x < x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\sin\tfrac{1}{2}x > \frac{x}{2} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{2^4} + \tfrac{1}{15}\cdot\frac{x^5}{2^8},\quad \sin\tfrac{1}{4}x < \frac{x}{2^2} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{2^7} + \tfrac{1}{15}\cdot\frac{x^5}{2^{13}};$$

und folglich

$$\sin\tfrac{1}{4}x^2 < \frac{x^2}{2^4} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{2^8} + \tfrac{1}{45}\cdot\frac{x^6}{2^{11}} - \tfrac{1}{45}\cdot\frac{x^8}{2^{19}} + \tfrac{1}{225}\cdot\frac{x^{10}}{2^{26}},$$

also, weil unter den gemachten Voraussetzungen

$$-\tfrac{1}{45}\cdot\frac{x^8}{2^{19}} + \tfrac{1}{225}\cdot\frac{x^{10}}{2^{26}}$$

offenbar eine negative Grösse ist, um so mehr

$$\sin\tfrac{1}{4}x^2 < \frac{x^2}{2^4} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{2^8} + \tfrac{1}{45}\cdot\frac{x^6}{2^{11}},$$

woraus man ferner mittelst des Vorhergehenden durch gewöhnliche Multiplication leicht erhält:

$$\sin\tfrac{1}{2}x\sin\tfrac{1}{4}x^2 < \frac{x^3}{2^5} - \frac{x^5}{2^9} + \tfrac{1}{5}\cdot\frac{x^7}{2^{12}} - \tfrac{1}{27}\cdot\frac{x^9}{2^{16}} + \tfrac{1}{675}\cdot\frac{x^{11}}{2^{19}},$$

also, weil

$$-\tfrac{1}{27}\cdot\frac{x^9}{2^{16}} + \tfrac{1}{675}\cdot\frac{x^{11}}{2^{19}}$$

offenbar eine negative Grösse ist, um so mehr

$$\sin\tfrac{1}{2}x\sin\tfrac{1}{4}x^2 < \frac{x^3}{2^5} - \frac{x^5}{2^9} + \tfrac{1}{5}\cdot\frac{x^7}{2^{12}},$$

und folglich

$$4\sin\tfrac{1}{2}x\sin\tfrac{1}{4}x^2 < \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{2^7} + \tfrac{1}{5}\cdot\frac{x^7}{2^{10}}.$$

Daher ist nach der Gleichung 1)

$$\sin x > 2\sin\tfrac{1}{2}x - \frac{x^3}{2^3} + \frac{x^5}{2^7} - \tfrac{1}{5}\cdot\frac{x^7}{2^{10}}.$$

Setzt man nun hierin für x nach und nach

$$x,\quad \frac{x}{2},\quad \frac{x}{2^2},\quad \frac{x}{2^3},\ldots\ldots\frac{x}{2^{n-1}};$$

so erhält man

$$\sin x > 2\sin\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3} + \frac{x^5}{2^7} - \tfrac{1}{5}\cdot\frac{x^7}{2^{10}},$$

$$\sin\frac{x}{2} > 2\sin\frac{x}{2^2} - \frac{x^3}{2^6} + \frac{x^5}{2^{12}} - \tfrac{1}{5}\cdot\frac{x^7}{2^{17}},$$

$$\sin\frac{x}{2^2} > 2\sin\frac{x}{2^3} - \frac{x^3}{2^9} + \frac{x^5}{2^{17}} - \tfrac{1}{5}\cdot\frac{x^7}{2^{24}},$$

u. s. w.

$$\sin\frac{x}{2^{n-1}} > 2\sin\frac{x}{2^n} - \frac{x^3}{2^{3n}} + \frac{x^5}{2^{5n+2}} - \tfrac{1}{5}\cdot\frac{x^7}{2^{7n+3}};$$

folglich, wenn man auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen nach der Reihe mit

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3\ldots\ldots 2^{n-1}$$

multiplicirt, dann addirt und aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$\begin{aligned}\sin x > 2^n\sin\frac{x}{2^n} &- \frac{1}{2^3}\left\{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^{2(n-1)}}\right\}x^3\\ &+\frac{1}{2^7}\left\{1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{2^{12}}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^{4(n-1)}}\right\}x^5\\ &-\tfrac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^{10}}\left\{1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{2^{18}}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^{6(n-1)}}\right\}x^7.\end{aligned}$$

Also ist nach der Lehre von den geometrischen Progressionen:

$$\sin x > 2^n\sin\frac{x}{2^n} - \frac{1}{2^3}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{2n}}}{1-\frac{1}{2^2}}x^3 + \frac{1}{2^7}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{4n}}}{1-\frac{1}{2^4}}x^5 - \tfrac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^{10}}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{6n}}}{1-\frac{1}{2^6}}x^7$$

oder

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} - \frac{1}{2^3}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{2n}}}{1-\frac{1}{2^2}}x^2 + \frac{1}{2^7}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{4n}}}{1-\frac{1}{2^4}}x^4 - \tfrac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^{10}}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{6n}}}{1-\frac{1}{2^6}}x^6;$$

und folglich, wenn man n in's Unendliche wachsen lässt und zu den Gränzen übergeht:

$$\frac{\sin x}{x} > 1 - \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{120}x^4 - \tfrac{1}{5040}x^6$$

oder

$$4)\quad \sin x > x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 - \tfrac{1}{5040}x^7.$$

Ueberhaupt haben wir also jetzt die folgenden Gränzwerthe von $\sin x$ gefunden:

$$\sin x < x,$$
$$\sin x > x - \tfrac{1}{6}x^3,$$
$$\sin x < x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5,$$
$$\sin x > x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 - \tfrac{1}{5040}x^7;$$

und es unterliegt keinem Zweifel, wie man auf dem obigen Wege noch weiter fortschreiten könnte, was sich, wie es uns scheint, zu zweckmässigen Uebungen für die Schüler bei'm Unterrichte benutzen lässt. Jedenfalls ist aber schon das Obige mehr als hinreichend, um die Berechnung der Tafel der Sinus zu zeigen. Auch würden sich die obigen Betrachtungen allerdings verallgemeinern lassen, was aber bei'm Elementar-Unterrichte in der Trigonometrie, in dessen Interesse der vorliegende Aufsatz vorzugsweise geschrieben ist, nicht zweckmässig sein würde, und deshalb hier zu zeigen unterlassen wird. Dessungeachtet aber würde ich einem die Verallgemeinerung der obigen Betrachtungen sich zur Aufgabe machenden Aufsatze von einem andern Verfasser gern einen Platz in dem Archive einräumen, und erlaube mir daher, die Leser desselben aufzufordern, diese Verallgemeinerung in möglichst eleganter Form zu geben zu versuchen.

Weil bekanntlich

$$\cos x = 1 - 2\sin\tfrac{1}{2}x^2$$

und

$$\sin\tfrac{1}{2}x < \tfrac{1}{2}x,\quad \sin\tfrac{1}{2}x^2 < \tfrac{1}{4}x^2$$

ist, so ist offenbar

$$5)\quad \cos x > 1 - \tfrac{1}{2}x^2.$$

Weil ferner nach dem Obigen

$$\sin\tfrac{1}{2}x > \frac{x}{2} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{2^4}$$

ist, so ist

$$\sin\tfrac{1}{2}x^2 > \frac{x^2}{2^2} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{2^4} + \tfrac{1}{9}\cdot\frac{x^6}{2^8}$$

und folglich um so mehr

$$\sin\tfrac{1}{2}x^2 > \frac{x^2}{2^2} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{2^4},$$

also

$$2\sin\tfrac{1}{2}x^2 > \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{24}x^4;$$

daher nach dem Obigen

$$6)\quad \cos x < 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4.$$

Auf ähnliche Art ist nach dem Obigen

$$\sin\tfrac{1}{2}x < \frac{x}{2} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{2^4} + \tfrac{1}{15}\cdot\frac{x^5}{2^8},$$

also

$$\sin\tfrac{1}{2}x^2 < \frac{x^2}{2^2} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{2^4} + \tfrac{1}{45}\cdot\frac{x^6}{2^5} - \tfrac{1}{45}\cdot\frac{x^8}{2^{11}} + \tfrac{1}{225}\cdot\frac{x^{10}}{2^{16}},$$

und folglich, weil unter den gemachten Voraussetzungen

$$-\tfrac{1}{45}\cdot\frac{x^8}{2^{11}} + \tfrac{1}{225}\cdot\frac{x^{10}}{2^{16}}$$

offenbar eine negative Grösse ist, um so mehr

$$\sin\tfrac{1}{2}x^2 < \frac{x^2}{2^2} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{2^4} + \tfrac{1}{45}\cdot\frac{x^6}{2^5},$$

also

$$2\sin\tfrac{1}{2}x^2 < \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{24}x^4 + \tfrac{1}{720}x^6.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$7)\quad \cos x > 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 - \tfrac{1}{720}x^6.$$

Auf ganz ähnliche Weise findet man, weil nach dem Obigen

$$\sin\tfrac{1}{2}x > \frac{x}{2} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{2^4} + \tfrac{1}{15}\cdot\frac{x^5}{2^8} - \tfrac{1}{315}\cdot\frac{x^7}{2^{11}}$$

ist:

$$8)\quad \cos x < 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 - \tfrac{1}{720}x^6 + \tfrac{1}{40320}x^8,$$

und hat also für $\cos x$ jetzt überhaupt die folgenden Gränzwerthe:

$$\cos x < 1,$$
$$\cos x > 1 - \tfrac{1}{2}x^2,$$
$$\cos x < 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4,$$
$$\cos x > 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 - \tfrac{1}{720}x^6,$$
$$\cos x < 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 - \tfrac{1}{720}x^6 + \tfrac{1}{40320}x^8.$$

Auch diese Rechnungen sind einer Verallgemeinerung fähig, welche zu geben verdienstlich sein würde, wenn dieselbe auch für den Elementar-Unterricht, den wir, wie schon mehrmals erinnert, bei den obigen Entwickelungen vorzüglich im Auge gehabt haben, von geringerer Bedeutung sein dürfte.

XXXIII.

Ein Paar allgemeine Eigenschaften der Eulerschen Integrale zweiter Art.

Von dem

Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

In meinen „Beiträgen zur Theorie bestimmter Integrale" habe ich einige neue allgemeine Eigenschaften der sogenannten Gammafunktionen mitgetheilt, welche für die Theorie dieser Transcendenten ungefähr das sind, was das Binomialtheorem für die Theorie der Potenz ist. Die fraglichen Sätze erscheinen dort als specielle Fälle weit umfassenderer Theoreme, die durch mehrfache Integrationen gewonnen werden; will man aber die letzteren umgehen, so kann man jene auch aus den ersten Eigenschaften der Eulerschen Integrale, welche in den Gleichungen

$$\Gamma(\mu)=\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}\,dx\ldots(1)$$

$$\Gamma(1)=1,\quad \Gamma(n)=1.2.3\ldots.(n-1)\ldots.(2)$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})=\sqrt{\pi},\quad \Gamma(n+\tfrac{1}{2})=\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}\ldots.(3)$$

$$\int_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}\,dx}{(1+x)^{\alpha+\beta}}=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\ldots.(4)$$

ausgesprochen sind, auf folgende sehr einfache Weise ableiten.

I.

Wir nehmen unseren Auslauf von dem bekannten, für jedes ungerade μ und beliebige u geltenden Theoreme:

$$\sin\mu u = \frac{\mu}{1}\sin u - \frac{\mu(\mu^2-1^2)}{1.2.3}\sin^3 u + \frac{\mu(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\sin^5 u - \ldots.$$

Durch Differenziation desselben nach u ergiebt sich

$$\cos\mu u = \cos u\left[1 - \frac{\mu^2-1^2}{1.2}\sin^2 u + \frac{(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{1.2.3.4}\sin^4 u - \ldots.\right]$$

oder, was das Nämliche ist,

$$\cos\mu u = \cos u\left[1 - \frac{(\mu+1)(\mu-1)}{1.2}\sin^2 u + \frac{(\mu+3)(\mu+1)(\mu-1)(\mu-3)}{1.2.3.4}\sin^4 u - \ldots\right]$$

Setzen wir $\mu = 2m+1$, wo nun m jede ganze positive Zahl bedeuten darf, so wird

$$\cos(2m+1)u$$
$$= \cos u\left[1 - \frac{(m+1)m}{1.2}(2\sin u)^2 + \frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{1.2.3.4}(2\sin u)^4 - \ldots\right]$$

oder wenn der Kürze wegen

$$\left.\begin{array}{l} M_0 = 1,\; M_2 = \frac{(m+1)m}{1.2}, \quad M_4 = \frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{1.2.3.4}, \\ M_6 = \frac{(m+3)(m+2)(m+1)m(m-1)(m-2)}{1.2.3.4.5.6}, \text{ u. s. f.} \end{array}\right\} \ldots (5)$$

genommen wird,

$$\cos(2m+1)u = \cos u\left[M_0 - M_2(2\sin u)^2 + M_4(2\sin u)^4 - \ldots\right] \ldots (6)$$

wobei man auch

$$\cos(2m+1)u = \frac{e^{(2m+1)u\sqrt{-1}} + e^{-(2m+1)u\sqrt{-1}}}{2},$$

$$\cos u = \frac{e^{u\sqrt{-1}} + e^{-u\sqrt{-1}}}{2},$$

$$2\sin u = \frac{e^{u\sqrt{-1}} - e^{-u\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}$$

setzen könnte. Für $u = lx\sqrt{-1}$ erhält man hieraus

$$\cos(2m+1)u = \tfrac{1}{2}\left(x^{2m+1} + \frac{1}{x^{2m+1}}\right),$$

$$\cos u = \tfrac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right), \quad 2\sin u = \frac{1}{\sqrt{-1}}\left(x - \frac{1}{x}\right).$$

Führen wir diese Werthe in die Gleichung (6) unter der Bemerkung ein, dass $(\sqrt{-1})^2 = -1$, $(\sqrt{-1})^4 = +1$, $(\sqrt{-1})^6 = -1$, u. s. f. ist, so ergiebt sich folgendes rein algebraische Theorem:

$$x^{2m+1} + \frac{1}{x^{2m+1}} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left[M_0 + M_2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + M_4\left(x - \frac{1}{x}\right)^4 + \ldots\right]$$

oder nach beiderseitiger Division mit x:

$$\frac{1}{x^{2m+2}} + x^{2m} = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\left[M_0 + M_2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + M_4\left(x - \frac{1}{x}\right)^4 + \ldots.\right].$$

Diese Gleichung wollen wir beiderseits mit dem Ausdrucke

$$\frac{dx}{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^{\mu + \frac{1}{2}}},$$

in welchem μ eine ganz beliebige Grösse bezeichnet, multipliciren und zwischen den Gränzen $x = 1$ und $x = \infty$ integriren. Es wird so

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{2m+2}} \cdot \frac{dx}{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^{\mu + \frac{1}{2}}} + \int_1^\infty \frac{x^{2m}dx}{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^{\mu + \frac{1}{2}}}$$

$$= M_0 \int_1^\infty \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \frac{dx}{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^{\mu + \frac{1}{2}}} + M_2 \int_1^\infty \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \frac{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 dx}{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^{\mu + \frac{1}{2}}}$$

$$+ M_4 \int_1^\infty \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \frac{\left(x - \frac{1}{x}\right)^4 dx}{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^{\mu + \frac{1}{2}}} + M_6 \int_1^\infty \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \frac{\left(x - \frac{1}{x}\right)^6 dx}{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^{\mu + \frac{1}{2}}}$$

u. s. f. ....(7)

Abgesehen von den Coefficienten sind alle Integrale rechts von einer allgemeinen Form, nämlich

$$\int_1^\infty \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \frac{\left(x - \frac{1}{x}\right)^{2n} dx}{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^{\mu + \frac{1}{2}}},$$

und gehen aus derselben hervor, wenn man darin $n = 0, 1, 2, 3,$ etc. setzt. Das vorliegende Integral lässt sich auch in folgender Gestalt darstellen:

$$\int_1^\infty (1+\frac{1}{x^2}) \frac{(x-\frac{1}{x})^{2n} dx}{[2+(x-\frac{1}{x})^2]^{\mu+\frac{1}{2}}},$$

welche zu einer eleganten Transformation Veranlassung giebt. Sei nämlich $x-\frac{1}{x}=z$, so wird $(1+\frac{1}{x^2})\,dx=dz$, und wenn x die Werthe ∞ und 1 angenommen hat, ist $z=\infty$ und $z=1$ geworden.

Diese Substitutionen verwandeln unser Integral in das folgende viel einfachere:

$$\int_0^\infty \frac{z^{2n}\,dz}{(2+z^2)^{\mu+\frac{1}{2}}},$$

welches für $z=(2x)^{\frac{1}{2}}$ in das folgende übergeht:

$$\frac{2^n}{2^{\mu+1}} \int_0^\infty \frac{x^{n-\frac{1}{2}}\,dx}{(1+x)^{\mu+\frac{1}{2}}},$$

dessen Werth nach Formel (4) ermittelt werden kann, wenn man $\alpha-1=n-\frac{1}{2}$ und $\alpha+\beta=\mu+\frac{1}{2}$ setzt, woraus $\alpha=n+\frac{1}{2}$, $\beta=\mu-n$ folgt. Hiernach ist nun

$$\frac{2^n}{2^{\mu+1}} \int_0^\infty \frac{x^{n-\frac{1}{2}}dx}{(1+x)^{\mu+\frac{1}{2}}} = \frac{2^n}{2^{\mu+1}} \cdot \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\,\Gamma(\mu-n)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}.$$

Setzt man hierin $n=0, 1, 2, 3, \ldots$, so erhält man der Reihe nach die Werthe aller der Integrale, welche auf der rechten Seite der Gleichung (7) stehen und es ist nun nach (7)

$$(8)\ldots \int_1^\infty \frac{1}{x^{2m+2}} \cdot \frac{dx}{(x^2+\frac{1}{x^2})^{\mu+\frac{1}{2}}} + \int_1^\infty \frac{x^{2m}\,dx}{(x^2+\frac{1}{x^2})^{\mu+\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2^{\mu+1}\,\Gamma(\mu+\frac{1}{2})} [M_0 \Gamma(\tfrac{1}{2})\Gamma(\mu) + 2M_2\Gamma(\tfrac{3}{2})\Gamma(\mu-1) + 2^2 M_4 \Gamma(\tfrac{5}{2})\Gamma(\mu-2)+\ldots]$$

Hier bleibt noch der Werth der linken Seite zu bestimmen. Setzen wir im ersten Integrale $\frac{1}{x}=z$, im zweiten $x=z$, so ändert sich das letztere nicht wesentlich; dagegen wird im ersten

$$-\frac{dx}{x^2}=dz, \quad \frac{dx}{x^{2m+2}} = \frac{1}{x^{2m}} \cdot \frac{dx}{x^2} = -z^{2m}dz,$$

und wenn $x=\infty$, $x=1$ geworden ist, hat z die Werthe 0 und 1 angenommen. Das erste Integral in (8) wird demnach

$$= -\int_1^0 \frac{z^{2m}dz}{(\frac{1}{z^2}+z_2)^{\mu+\frac{1}{2}}} = +\int_0^1 \frac{z^{2m}dz}{(\frac{1}{z^2}+z^2)^{\mu+\frac{1}{2}}}.$$

Die linke Seite der Gleichung (8) wird demnach

$$=\int_0^1 \frac{z^{2m}\,dz}{(\frac{1}{z^2}+z^2)^{\mu+\frac{1}{2}}}+\int_1^\infty \frac{z^{2m}\,dz}{(z^2+\frac{1}{z^2})^{\mu+\frac{1}{2}}},$$

und da hier unter beiden Integralzeichen die nämliche Differenzialformel steht, so ziehen sich beide Integrale nach dem Satze

$$\int_a^b f(z)\,dz+\int_b^c f(z)\,dz+\int_a^c f(z)\,dz$$

in das eine zusammen:

$$=\int_0^\infty \frac{z^{2m}\,dz}{(\frac{1}{z^2}+z^2)^{\mu+\frac{1}{2}}}=\int_0^\infty \frac{z^{2m+2\mu+1}\,dz}{(1+z^4)^{\mu+\frac{1}{2}}},$$

dessen zweite Form aus der ersten entsteht, wenn man Zähler und Nenner desselben mit $(z^2)^{\mu+\frac{1}{2}}$ multiplizirt. Setzt man endlich noch $z^4=x$ also $z=x^{\frac{1}{4}}$, so erhält man leicht

$$\int_0^\infty \frac{z^{2m+\mu+1}\,dz}{(1+z^4)^{\mu+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{m+\mu-1}{2}}\,dx}{(1+x)^{\mu+\frac{1}{2}}},$$

wobei man rechts die Formel (4) für $\alpha-1=\frac{m+\mu-1}{2}$, $\alpha+\beta=\mu+\frac{1}{2}$ anwenden kann. Man erhält $\alpha=\frac{\mu+m+1}{2}$, $\beta=\frac{\mu-m}{2}$, mithin

$$\frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{x^{\frac{m+\mu-1}{2}}\,dx}{(1+x)^{\mu+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\Gamma(\frac{\mu+m+1}{2})\,\Gamma(\frac{\mu-m}{2})}{\Gamma(\mu+2)\frac{1}{2}},$$

und dies ist der Werth der linken Seite in der Gleichung (8). Substituirt man denselben, so hebt sich beiderseits $\Gamma(\mu+\frac{1}{2})$ und es bleibt

$$(9)\ldots.\frac{1}{4}\Gamma(\frac{\mu+m+1}{2})\,\Gamma(\frac{\mu-m}{2})$$

$$=\frac{1}{2^{\mu+1}}\,[\,M_0\Gamma(\tfrac{1}{2})\Gamma(\mu)+2M_2\Gamma(\tfrac{3}{2})\Gamma(\mu-1)+2^2M_4\Gamma(\tfrac{5}{2})\Gamma(\mu-2)+\ldots.]$$

Dabei ist nun $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$, die übrigen Glieder rechts sind von der Form

$$2^n M_{2n}\Gamma(n+\tfrac{1}{2})\,\Gamma(\mu-n),$$

aus welcher sie für $n=1, 2, 3, \ldots.$ hervorgehen. Setzt man für M_{2n} und $\Gamma(n+\frac{1}{2})$ ihre Werthe, so ist dieser Ausdruck

$$=2^n.\frac{(\mu+n)(\mu+n-1)\dots(\mu-\overline{n-1})}{1.2.3.4.5\dots(2n)}.\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu-n)$$

$$=\frac{(\mu+n)(\mu+n-1)\dots(\mu-\overline{n-1})}{2.4.6\dots(2n)}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu-n),$$

so dass also $\sqrt{\pi}$ als gemeinschaftlicher Faktor aller Glieder auf der rechten Seite in (9) erscheint. Multiplizirt man noch beiderseits mit $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$, so wird jetzt

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2^{\mu-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\mu+m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-m}{2}\right)\\ &=\Gamma(\mu)+\frac{(m+1)m}{2}\Gamma(\mu-1)+\frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{2.4}\Gamma(\mu-2)+\dots\end{aligned}\right\}\dots(10)$$

worin sich eine merkwürdige Relation ausspricht. Es ist dies das erste der von mir gefundenen Theoreme.

II.

Setzt man in dem Anfangs citirten Theoreme $\frac{\pi}{2}-u$ für u, so erhält man

$$(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\cos\mu u$$

$$=\frac{\mu}{1}\cos u-\frac{(\mu+1)\mu(\mu-1)}{1.2.3}\cos^3 u+\frac{(\mu+3)(\mu+1)\mu(\mu-1)(\mu-3)}{1.2.3.4.5}\cos^5 u-\dots$$

oder für $\mu=2m+1$ nach beiderseitiger Division mit μ:

$$\frac{(-1)^m}{2m+1}\cos(2m+1)u$$

$$=\cos u-\frac{(m+1)m}{2.3}2^2\cos^3 u+\frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{2.3.4.5}2^4\cos^5 u-\dots$$

und wenn man $u=lx\sqrt{-1}$ nimmt:

$$\frac{(-1)^m}{2m+1}\left(x^{2m+1}+\frac{1}{x^{2m+1}}\right)$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)-\frac{(m+1)m}{2.3}\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{2.3.4.5}\left(x+\frac{1}{x}\right)^5-\dots$$

wobei wir zur Abkürzung

$$M_1=1,\ M_3=\frac{(m+1)m}{2.3},\quad M_5=\frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{2.3.4.5},\ \text{etc.}$$

setzen wollen, so dass die obige Gleichung die elegantere Form

$$\frac{(-1)^m}{2m+1}\left(x^{2m+1}+\frac{1}{x^{2m+1}}\right)=M_1\left(x+\frac{1}{x}\right)-M_3\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+M_5\left(x+\frac{1}{x}\right)^5-\ldots$$

annimmt.

Multipliziren wir jetzt beiderseits mit

$$\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2\mu+1}}\cdot\frac{dx}{x},$$

worin μ eine beliebige Grösse bezeichnet, und integriren innerhalb der Gränzen $x=0$ und $x=1$, so wird

$$\frac{(-1)^m}{2m+1}\left[\int_0^1\frac{x^{2m}dx}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2\mu+1}}+\int_0^1\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2\mu+1}}\cdot\frac{dx}{x^{2m+2}}\right]$$

$$=M_1\int_0^1\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2\mu}}\cdot\frac{dx}{x}-M_3\int_0^1\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2\mu-2}}\cdot\frac{dx}{x}$$

$$+M_5\int_0^1\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2\mu-4}}\cdot\frac{dx}{x}-M_7\int_0^1\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2\mu-6}}\cdot\frac{dx}{x}$$

u. s. f. ....(11)

Die Integrale rechts stehen unter der gemeinschaftlichen Form

$$\int_0^1\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2\mu-2n}}\cdot\frac{dx}{x},$$

aus der sie hervorgehen, wenn man für n der Reihe nach 0, 1, 2, 3, etc. setzt. Nehmen wir nun erstlich $x=z$, so ist

$$\int_0^1\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2\mu-2n}}\cdot\frac{dx}{x}=\int_0^1\frac{1}{\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2\mu-2n}}\cdot\frac{dz}{z}\ \ldots.(12)$$

nehmen wir aber $x=\frac{1}{z}$, so wird $\frac{dx}{x}=-\frac{dz}{z}$ und $z=\frac{1}{x}$; hat nun x die Werthe 1 und 0 angenommen, so ist $x=1$ und $x=\infty$ geworden, folglich hat man

$$\int_0^1\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2\mu-2n}}\cdot\frac{dx}{x}=-\int_\infty^1\frac{1}{\left(\frac{1}{z}+z\right)^{2\mu-2n}}\cdot\frac{dz}{z}=+\int_1^\infty\frac{1}{\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2\mu-2n}}\cdot\frac{dz}{z}.$$

Addirt man hierzu die Gleichung (12) und bemerkt, dass rechts

das nämliche Integral erst von $z=0$ bis $z=1$, dann von $z=1$ bis $z=\infty$ genommen wird, so ergiebt sich

$$2\int_0^1 \frac{1}{(x+\frac{1}{x})^{2\mu-2n}} \cdot \frac{dx}{x} = \int_0^\infty \frac{1}{(z+\frac{1}{z})^{2\mu-2n}} \cdot \frac{dz}{z},$$

folglich

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+\frac{1}{x})^{2\mu-2n}} \cdot \frac{dx}{x} = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{(z+\frac{1}{z})^{2\mu-2n}} \cdot \frac{dz}{z} = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{z^{2\mu-2n-1}\,dz}{(1+z^2)^{2\mu-2n}}.$$

Setzt man in dem Integrale rechts $z^2=x$, also $z=x^{\frac{1}{2}}$, so geht dasselbe in das folgende über:

$$\tfrac{1}{4}\int_0^\infty \frac{x^{\mu-n-1}\,dx}{(1+x)^{2\mu-2n}},$$

dessen Werth nach Formel (4) gefunden werden kann, wenn man dort $\alpha=\mu-n$, $\alpha+\beta=2\mu-2n$, also $\beta=\mu-n$ nimmt. Man erhält dann

$$\tfrac{1}{4}\int_0^\infty \frac{x^{\mu-n-1}\,dx}{(1+x)^{2\mu-2n}} = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{\Gamma(\mu-n)\Gamma(\mu-n)}{\Gamma(2\mu-2n)} = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{\overline{\Gamma(\mu-n)}^2}{\Gamma(2\mu-2n)}.$$

Führt man die hieraus für $n=0, 1, 2, 3, \ldots$ entspringenden Werthe in die Gleichung (11) ein, so ergiebt sich

$$(13)\ldots\ldots \frac{(-1)^m}{2m+1}\left[\int_0^1 \frac{x^{2m}\,dx}{(x+\frac{1}{x})^{2\mu+1}} + \int_0^1 \frac{1}{(x+\frac{1}{x})^{2\mu+1}} \cdot \frac{dx}{x^{2\mu+2}}\right]$$

$$= \tfrac{1}{4}\left[M_1 \frac{\overline{\Gamma(\mu)}^2}{\Gamma(2\mu)} - M_3 \frac{\overline{\Gamma(\mu-1)}^2}{\Gamma(2\mu-2)} + M_5 \frac{\overline{\Gamma(\mu-2)}^2}{\Gamma(2\mu-4)} - \ldots\right].$$

Es handelt sich nun noch um den Werth der Integrale links. Setzt man in dem ersten Integrale $x=z$, so ändert sich dasselbe nicht wesentlich, nimmt man dagegen im zweiten $x=\frac{1}{z}$, so wird $dx=-\frac{dz}{z^2}$, $\frac{dx}{x^{2m+2}}=\frac{1}{x^{2m}}\cdot\frac{dx}{x^2}=-z^{2m}dz$, und für $x=1$, $x=0$ wird $z=1$ und $z=\infty$, mithin jenes Integral

$$=-\int_\infty^1 \frac{z^{2m}dz}{(\frac{1}{z}+z)^{2\mu+1}} = +\int_1^\infty \frac{z^{2m}dz}{(\frac{1}{z}+z)^{2\mu+1}}.$$

Die in (13) zwischen den Parenthesen links stehende Summe wird hiernach

$$\int_0^1 \frac{z^{2m}dz}{(z+\frac{1}{z})^{2\mu+1}} + \int_1^\infty \frac{z^{2m}dz}{(\frac{1}{z}+z)^{2\mu+1}}$$

$$= \int_0^\infty \frac{z^{2m}dz}{(\frac{1}{z}+z)^{2\mu+1}} = \int_0^\infty \frac{z^{2\mu+2m+1}dz}{(1+z^2)^{2\mu+1}}.$$

Für $z^2 = x$, also $z = x^{\frac{1}{2}}$) geht dieses Integral in das folgende über:

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x^{\mu+m}dx}{(1+x)^{2\mu+1}},$$

dessen Werth nach Formel (4) für $\alpha - 1 = \mu + m$, $\alpha + \beta = 2\mu + 1$, also $\alpha = \mu + m + 1$, $\beta = \mu - m$ gefunden werden kann. Derselbe ist

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\mu+m+1)\,\Gamma(\mu-m)}{\Gamma(2\mu+1)}.$$

Setzt man dies statt der eingeklammerten Summe auf der linken Seite in (13), multiplizirt darauf beiderseits mit 4 und setzt für M_1, M_3, M_5, etc. ihre Werthe, so wird

$$(14) \ldots . \frac{2(-1)^m}{2m+1} \cdot \frac{\Gamma(\mu+m+1)\,\Gamma(\mu-m)}{\Gamma(2\mu+1)}$$

$$= \frac{\overline{\Gamma(\mu)}^2}{\Gamma(2\mu)} - \frac{(m+1)m}{2.3} \cdot \frac{\overline{\Gamma(\mu-1)}^2}{\Gamma(2\mu-2)} + \frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{2.3.4.5} \cdot \frac{\overline{\Gamma(\mu-2)}^2}{\Gamma(2\mu-4)} - \ldots$$

worin sich das zweite der von mir gefundenen Theoreme ausspricht. Am a. O. steht dasselbe unter einer anderen Form, welche aber aus dieser leicht abgeleitet werden kann.

Legendre hat nämlich über die Gammafunktionen folgendes Theorem gefunden, welches nachher auf verschiedene Weise, am elegantesten von Lejeune Dirichlet bewiesen worden ist:

$$\Gamma(a)\Gamma(a+\frac{1}{n})\Gamma(a+\frac{2}{n})\ldots\Gamma(a+\frac{n-1}{n}) = \Gamma(na)(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-na}.$$

Für $n = 2$ ergiebt sich daraus

$$\Gamma(a)\Gamma(a+\tfrac{1}{2}) = \Gamma(2a)\,\frac{2\sqrt{\pi}}{2^{2a}},$$

oder

$$\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(2a)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}} \cdot \frac{1}{\Gamma(a+\frac{1}{2})},$$

und für $a = \mu - n$

$$\frac{\Gamma(\mu-n)}{\Gamma(2\mu-2n)} = \frac{2^{2n}\sqrt{\pi}}{2^{2\mu-1}} \cdot \frac{1}{\Gamma(\mu-n+\frac{1}{2})}.$$

Multiplizirt man noch beiderseits mit $\Gamma(\mu-n)$, so wird

$$\frac{\overline{\Gamma(\mu-n)}^2}{\Gamma(2\mu-2n)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\mu-1}}\cdot\frac{2^{2n}\,\Gamma(\mu-n)}{\Gamma(\mu-n+\frac{1}{2})}.$$

Substituirt man die für $n=0, 1, 2, 3\ldots.$ hieraus resultirenden Gleichungen in Nr. (14), so geht dieselbe über in

$$\frac{2(-1)^m}{2m+1}\cdot\frac{\Gamma(\mu+m+1)\Gamma(\mu-m)}{\Gamma(2\mu+1)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\mu-1}}\left[\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}-\frac{(m+1)m}{2.3}\cdot\frac{2^2\Gamma(\mu-1)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-1)}+\ldots\right]$$

$$(15)\ldots.\frac{(-1)^m 2^{2\mu}}{2m+1}\cdot\frac{\Gamma(\mu+m+1)\Gamma(\mu-m)}{\Gamma(2\mu+1)}$$

$$=\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}-\frac{(m+1)m}{2.3}\cdot\frac{2^2\Gamma(\mu-1)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-1)}+\frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{2.3.4.5}\cdot\frac{2^4\Gamma(\mu-2)}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2}-2)}-\ldots$$

und in dieser Form wurde der genannte Satz zuerst mitgetheilt.

Zu bemerken ist noch, dass in beiden Theoremen $\mu>m$ sein muss, wenn keine der Differenzen $\mu-1$, $\mu-2$, etc. negativ, also ihre Gammafunktion unendlich werden soll.

XXXIV.

Miscellen.

Lehrsatz.

Von Herrn Professor Friedrich Pross zu Stuttgart.

Bewegen sich (Taf. II. Fig. 5.) zwei unveränderliche Punkte D und E einer Geraden BC auf zwei sich schneidenden Geraden XX' und YY', so beschreibt jeder Punkt M der Geraden BC eine Ellipse.

Beweis.

Man ziehe MP und Mp parallel mit XX' und YY', setze $MD=a$ und $ME=b$, nehme XX' zur Abscissenaxe und YY' zur Ordinatenaxe und bezeichne den Axenwinkel YAX mit φ, so ist:

$$Dp^2 + Mp^2 + 2Dp \,.\, Mp \,.\cos\varphi = DM^2\,;$$

allein: $Dp : DM = PM : EM$, oder: $Dp : a = y : b$;

also: $Dp = \frac{ay}{b}$.

Dieses in die obige Gleichung substituirt, giebt:

$$\frac{a^2y^2}{b^2} + x^2 + 2\frac{ay}{b}x \,.\cos\varphi = a^2,$$

oder

$$a^2y^2 + b^2x^2 + 2ab\,xy\cos\varphi = a^2b^2,$$

welches die allgemeine Mittelpunktsgleichung der Ellipse ist.

Zusatz. Für ein rechtwinkliges Coordienatensystem ist $\cos\varphi = 0$; also:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Anmerkung. Auf diesen Satz gründet sich die bekannte Verzeichnungsart einer Ellipse mittelst des Ellipsographen, oder auch vermittelst eines Papierstreifens.

Herr Catalan hat der societé philomatique de Paris die folgenden Sätze von den periodischen Kettenbrüchen ohne Beweis mitgetheilt.

1) Si l'on représente par y_n la valeur que l'on obtient quand on limite la fraction continue x aux n premières périodes, on a généralement:

$$y_n = \frac{Py_{n-1} + N}{P'y_{n-1} + N'},$$

$\frac{P}{P'}$ étant la réduite équivalente à y_1, et $\frac{N}{N'}$ la réduite précédente.

2) Si y_{n-1} est une fraction irréductible, $\frac{R}{R'}$, y_n ou $\frac{PR+NR'}{P'R+N'R'}$ sera aussi une fraction irréductible.

3) Comme on peut supposer y_1 réduit à sa plus simple expression $\frac{P}{P'}$, y_n est une réduite de la fraction continue.

4) Soient $y_{n-1} = \frac{R}{R'}$, $y_n = \frac{S}{S'}$, on aura

$$y_{n-1} - y_n = \frac{RS' - R'S}{R'S'} = \pm \frac{P'}{R'S'};$$

donc la différence entre y_{n-1} et y_n diminue indéfiniment lorsque n augmente.

5) Les dénominateurs R', S' sont divisibles par P'; donc

$$y_{n-1} - y_n = \pm \frac{1}{R''S'}.$$

Arago theilte der Akademie der Wissenschaften zu Paris aus einem Briefe von Requien in Avignon mit, dass in einem ungedruckten Briefe von Linné, welchen d'Hombre-Firmas besitzt, folgende Stelle sich findet: Ego primus fui, qui parare constitui thermometra nostra ubi punctum congelationis 0 et gradus coquentis aquae 100, et hoc pro hybernaculis horti; si his adsuetus esses, certus sum quod arrideret. Mithin würde die Feststellung der hunderttheiligen Scale von Celsius auf Linné überzutragen sein.

Berichtigungen.

Für den fünften Theil.

S. 75. Z. 18. ist zwischen den Worten „deren Mittelpunkt" und „in der Verticale" die Parenthese einzuschalten: (mit einer kleinen Vernachlässigung von höchstens $\frac{t}{300}$).

— 329. — 5. l. u statt n.

— 381. — 28. l. „Resultate convergenter" statt „unrichtigen Werthe der"

— 438. — 17. v. u. l. $\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots \text{ in inf.}\right)\sqrt{\pi}$ statt $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots$ in inf.

— 430. — 5. in der zweiten Gleichung streiche man das Minuszeichen.

XXXV.

Geometrischer Beweis des Satzes, dass jeder allgebraischen Gleichung mit Einer Unbekannten durch einen complexen Werth dieser Unbekannten Genüge geleistet werden kann.

Von

Herrn Doctor T. Wittstein

zu Hannover.

1.

Wie sorgfältig man auch darauf bedacht sein mag, alle Begriffe von Raum und Ausdehnung, als der Geometrie angehörig, aus der abstracten Arithmetik fern zu halten, so kann doch die eine Thatsache nicht hinweg geläugnet werden, dass man den Inbegriff der reellen Zahlen sich stets unter dem Bilde einer geraden nach beiden Seiten unbegrenzten Linie vorstellt. Dieses Bild ist das nothwendige Ergebniss desjenigen psychologischen Vorganges, welcher die Zahlen entstehen lässt, und es bildet, wenn auch mehr oder weniger unbewusst, die Grundlage aller arithmetischen Betrachtungen. Zuerst stellen sich die ganzen Zahlen dar als eine Reihe äquidistanter Punkte; ein beliebiger dieser Punkte wird als Nullpunkt angesehen, und von ihm ausgehend entwickeln sich nach der einen Seite die positiven, nach der anderen die negativen ganzen Zahlen, beide ins Unbegrenzte. Durch äquidistante Interpolirungen zwischen je zwei benachbarten Punkten vermittelst neuer Punkte gelangt man zur Darstellung der Brüche, sowohl der positiven als der negativen; und der Begriff der irrationalen Zahlen führt endlich dahin, die discontinuirliche Punktenreihe in eine continuirliche Linie*) übergehen zu machen.

---

*) Die Arithmetik ist also nichts weniger als eine Wissenschaft, die sich ausschliesslich mit discreten Grössen beschäftigt, welche sachwidrige Ansicht man noch immer von Lehrbuch zu Lehrbuch wandern sieht.

Bei dieser Ansicht der Sache würde man füglich von einer Arithmetik von Einer Dimension — analog der Geometrie von Einer Dimension — reden und darunter die Arithmetik der reellen Zahlen verstehen dürfen*); es bliebe nur noch übrig zu zeigen, dass es auch eine Arithmetik von mehr als Einer Dimension gebe. Dass und wie dies aber geschehen könne, davon soll hier zunächst in der Kürze gehandelt werden**).

2.

Durch diejenige gerade Linie, welche als bildliche Darstellung der reellen Zahlen angesehen werden kann und desshalb die Achse der reellen Zahlen heissen mag, werde eine Ebene hindurch gelegt, und es werde die Aufgabe gestellt, Zahlenformen anzugeben, welche die Lage beliebiger Punkte dieser Ebene in einer solchen Weise ausdrücken, dass darunter die Festlegung von Punkten in der genannten Achse durch reelle Zahlen als ein besonderer Fall begriffen ist.

Es sei A der Nullpunkt in der Achse der reellen Zahlen und B ein beliebiger anderer Punkt der Ebene. Die Lage des Punkts B gegen A allein wird bestimmt sein durch Angabe der geradlinigen Entfernung AB, und diese ist stets, unter Voraussetzung einer gegebenen Längeneinheit, einer positiven Zahl $=\varrho$ gleich, oder vielmehr einer Zahl, der kein Vorzeichen gegeben werden darf. Die Lage der geraden Linie AB aber wird in der Ebene bestimmt durch Angabe desjenigen positiven oder negativen Winkels, welcher durch eine Drehung, die aus der positiven Richtung der Achse der reellen Zahlen in die Richtung AB überführt, beschrieben wird; und dieser Winkel kann immer durch einen positiven oder negativen Kreisbogen $=\varphi$ zur Darstellung gebracht werden, welcher aus dem Mittelpunkte A mit einem der Längeneinheit gleichen Halbmesser beschrieben und von dem Punkte $+1$ der Achse der reellen Zahlen bis dahin gerechnet wird, wo ihn die Linie AB schneidet. — Die beiden Elemente ϱ und φ zusammengenommen müssen mithin das Zahlzeichen, welches die Lage des Punktes B in der Ebene festlegt, bilden. Ausserdem ist bekannt, dass für $\varphi=0$ sich dieses Zahlzeichen unter der Form $+\varrho=\varrho.+1$, und für $\varphi=\pi$ unter der Form $-\varrho=\varrho.-1$ darstellen muss.

Man projicire den Punkt B auf die Achse der reellen Zahlen durch ein Perpendikel BC, welches die letztere in C trifft, und

*) Es verdient beachtet zu werden, dass die Arithmetik von Einer Dimension einen so ausserordentlichen Umfang besitzt, während die Geometrie von Einer Dimension sich mit sehr wenigen Worten erledigen lässt.

**) Man vergleiche hiemit die schätzbare Behandlung desselben Gegenstandes von Herrn Ballauff, Bd. V. S. 280—286 des Archivs, die dem Verf. erst zu Gesicht kam, als das Nachstehende bereits niedergeschrieben war. Es ist zu verwundern, dass nach der so vortrefflichen Darstellung von Gauss in den Göttinger gel. Anz. von 1831, 64 Stück, die billig von keinem Mathematiker ungelesen bleiben sollte, dieses neue Feld nicht schon weiter angebauet worden ist.

betrachte die Linienverbindung ACB als Festlegung des Punktes B. Der Punkt C in der Achse der reellen Zahlen wird sodann festgelegt werden durch die Zahl $\varrho \cos\varphi$, welche positiv oder negativ ist, je nachdem $\cos\varphi$ das Zeichen $+$ oder $-$ hat; der Punkt B in Bezug auf C wird festgelegt werden durch die Zahl $\varrho \sin\varphi$, positiv oder negativ, je nachdem $\sin\varphi$ es ist. Bezeichnet man nun mit $\pm i$ diejenige Einheit, welche, an Grösse gleich der Einheit ± 1 in der Achse der reellen Zahlen, unter rechtem Winkel gegen diese Achse gerichtet ist; und nimmt man zugleich das Additionszeichen in derjenigen erweiterten Bedeutung, dass es auch auf die rechtwinklige Zusammenfügung zweier geraden Linien ausgedehnt wird, so erhält man

$$\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

als allgemeines Zeichen derjenigen Zahlen, welche die Lage aller Punkte der gegebenen Ebene in Bezug auf die gegebene Achse und den gegebenen Anfangspunkt repräsentiren.

3.

Wir nennen jede Zahl von der Form $\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ nach Gauss eine complexe Zahl. In denjenigen besondern Fällen, in welchen $\varphi = 0$ oder gleich einem Vielfachen von $\pm\pi$ ist, reducirt sich die complexe Zahl auf eine reelle Zahl; in allen übrigen Fällen dagegen, in denen φ irgend einen andern Werth hat, heisst sie eine imaginäre Zahl.

Jede reelle Zahl tritt demnach unter der Form $\varrho . \pm 1$ auf, und da man hier gewohnt ist, den Factor ϱ den absoluten Zahlwerth der Zahl zu nennen, so könnte man nach dieser Analogie völlig allgemein den Factor ϱ der complexen Zahl $\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ als den absoluten Zahlwerth der complexen Zahl ansehen; der andere Factor $\cos\varphi + i\sin\varphi$ würde sodann, gleichfalls nach Analogie des Factors ± 1 bei den reellen Zahlen, die Richtung angeben, nach welcher hin der absolute Zahlwerth construirt werden soll. Gebräuchlicher ist es, den Factor ϱ mit dem Namen des Modulus der complexen Zahl zu belegen; für reelle Zahlen fällt der Modulus mit dem absoluten Zahlwerthe zusammen.

Es bedarf kaum der Bemerkung, dass jede complexe Zahl $\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ auch unter der Form $a + ib$ dargestellt werden kann, indem man setzt

$$\varrho\cos\varphi = a, \quad \varrho\sin\varphi = b.$$

Wir werden jedoch hier von dieser letztern Form keinen Gebrauch machen, weil sie uns weniger die Natur der complexen Zahlen auszusprechen scheint, indem sie Zahlwerth und Richtung nicht getrennt hervortreten lässt. Es ist übrigens leicht, von der letztern Form zu der erstern zurückzukehren, indem man hat:

$$\varrho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

wo die Wurzel $\sqrt{a^2 + b^2}$ nur positiv zu nehmen ist.

4.

Ueber die Ausführung der arithmetischen Operationen in der Ebene der complexen Zahlen muss hier Nachstehendes bemerkt werden.

1. Was man unter der Addition complexer Zahlen zu verstehen habe, liegt schon theilweise in der oben entwickelten Definition dieser Zahlen ausgesprochen; man wird nämlich das Zeichen der Addition nicht nur für die Verbindung zweier Zahlen in derselben oder in entgegengesetzter Richtung, sondern überhaupt für ihre Verbindung in jeder beliebigen Richtung in der Ebene der complexen Zahlen zu gebrauchen haben, so dass, von dem der einen Zahl entsprechenden Punkte der Ebene ausgehend, die zweite ebenso in Hinsicht auf Grösse und Richtung construirt wird, wie sie vom Anfangspunkte A aus construirt sein würde. Man kann demnach, wenn z. B. B und B' zwei Punkte der Ebene bezeichnen, deren Lage resp. durch die complexen Zahlen

$$\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \text{ und } \varrho'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$$

repräsentirt wird, zur Auffindung desjenigen Punktes C der Ebene, dem die Summe

$$\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \varrho'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$$

entspricht, dadurch gelangen, dass man durch B eine der AB' gleiche und mit ihr übereinstimmend parallele Linie BC zieht. Wie hieraus der Satz folgt, dass die Ordnung der zu addirenden Zahlen in Hinsicht auf ihre Summe gleichgültig ist, und wie hieran die Addition von mehr als zwei Zahlen sich knüpft, leuchtet von selbst ein.

Um den analytischen Ausdruck der Summe zweier complexen Zahlen zu erhalten, bezeichne man mit

$$P(\cos\Phi + i\sin\Phi)$$

die gesuchte Summe; alsdann ist

$$P = \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2 + 2\varrho\varrho'\cos(\varphi - \varphi')},$$

$$\cos\Phi = \frac{\varrho\cos\varphi + \varrho'\cos\varphi'}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2 + 2\varrho\varrho'\cos(\varphi - \varphi')}},$$

$$\sin\Phi = \frac{\varrho\sin\varphi + \varrho'\sin\varphi'}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2 + 2\varrho\varrho'\cos(\varphi - \varphi')}}.$$

Für $\varphi' = \varphi$ verwandelt sich die Summe in

$$(\varrho + \varrho')(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

für $\varphi' = \varphi + \pi$ in

$$(\varrho - \varrho')(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

2. Von der Subtraction zu reden ist überflüssig, weil dieselbe durch Umkehrung des Vorzeichens vom Subtrahend, d. h. durch Vergrösserung seiner Winkelzahl um $\pm\pi$ oder ein ungerades Vielfaches von $\pm\pi$, sich immer in eine Addition verwandeln lässt.

3. Die Multiplication complexer Zahlen erledigt sich gleichfalls einfach, indem man ihren Begriff dahin bestimmt, dass mit dem einen Factor in der Ebene der complexen Zahlen eben so operirt werden solle, wie der andere Factor aus der positiven reellen Einheit $+1$ hervorging. Sind also

$$\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi) \text{ und } \varrho'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')$$

die gegebenen Factoren, so kann man sich den letztern nach §. 2. dadurch aus der Einheit $+1$ entstanden denken, dass man diese Einheit, welche von dem Anfangspunkte A aus durch einen entsprechenden Abschnitt auf der positiven Seite der Achse der reellen Zahlen dargestellt wird, um den Winkel φ' drehete und zugleich in dem Verhältnisse $1:\varrho'$ grösser werden liess; verfährt man eben so mit dem ersten Factor, so geht der Winkel φ über in $\varphi+\varphi'$, der Modulus ϱ aber in $\varrho\varrho'$. Man erhält mithin als analytischen Ausdruck des Products

$$\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi).\varrho'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')=\varrho\varrho'(\cos\overline{\varphi+\varphi'}+i\sin\overline{\varphi+\varphi'}).$$

Dasselbe Resultat würde auch bei Vertauschung der Factoren erschienen sein.

4. Sollte das Product $=1$ werden, so würde man nur nöthig gehabt haben, $\varrho'=\frac{1}{\varrho}$ und $\varphi'=-\varphi$ zu setzen; daraus folgt aber, dass man jederzeit habe

$$\frac{1}{\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\frac{1}{\varrho}(\cos\overline{-\varphi}+i\sin\overline{-\varphi}).$$

Mit Hülfe dieser Gleichung, die den reciproken Werth von einer gegebenen complexen Zahl finden lehrt, lässt sich stets die Division erledigen, indem durch Multiplication des Dividenden mit dem reciproken Werthe des Divisors der Quotient erhalten wird.

5. Das Potenziren, unter der Voraussetzung, dass der Exponent eine positive oder negative ganze Zahl ist, lässt sich leicht an das Multipliciren knüpfen; denn durch die Annahme mehrerer gleichen Factoren, deren Anzahl $=n$ sei, erhält man

$$\{\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)\}^n=\varrho^n(\cos\overline{n\varphi}+i\sin\overline{n\varphi}),$$

woraus sogleich vermittelst der bekannten Bedeutung eines negativen Exponenten folgt:

$$\{\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)\}^{-n}=\varrho^{-n}(\cos\overline{-n\varphi}+i\sin\overline{-n\varphi}).$$

Verfolgt man die successiven Potenzen, indem man $n=1,2,3\ldots$ setzt, in der Ebene der complexen Zahlen, so ist nicht schwer zu erkennen,

dass die ihnen correspondirenden Punkte einer logarithmischen Spirale angehören, deren Gleichung ist

$$r = k^u,$$

wenn r den Radius vector, u dessen Elongation von der Achse, und k eine Constante bezeichnet. Aber diese Constante, und mit ihr die Curve, ist durch jene Punkte allein noch nicht bestimmt; denn so wie die gegebene complexe Zahl sich nicht ändert, wenn man in ihr den Winkel φ um 2π oder ein Vielfaches von 2π sich ändern lässt, so kann auch die Curve, um von jedem der einzelnen Punkte zu dem nächstfolgenden zu gelangen, zuvor eine oder mehrere volle Umwindungen machen, während noch immer alle die gegebenen Punkte in ihr enthalten sind. Diese Bemerkung ist desshalb von Wichtigkeit, weil daraus die Vielförmigkeit derjenigen Potenzen einer complexen Zahl, deren Exponenten nicht ganze Zahlen sind, hervorgeht; nur für $\varrho = 1$ fällt dieses Bild weg, weil alsdann die logarithmische Spirale zu einem Kreise degenerirt.

Setzt man $\varphi = 0$ oder $= 2\pi$, so verwandelt sich die Spirale in die positive Hälfte der Achse der reellen Zahlen; oder man kann auch die Sache so ansehen, als ob die Punkte der Spirale, die als Spirale bestehen bleibt, um je 2π aus einander liegen. Setzt man aber $\varphi = \pi$, so haben die Punkte der Spirale einen Abstand von je π, und liegen abwechselnd in der positiven und negativen Hälfte der Achse der reellen Zahlen, womit eine Deutung derjenigen Erscheinung gegeben ist, dass die successiven Potenzen einer negativen Zahl abwechselnd positiv und negativ werden.

6. In Bezug auf das Wurzelausziehen ergibt sich durch Umkehrung sogleich

$$\{\{\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\}\}^{\frac{1}{n}} = \varrho^{\frac{1}{n}}(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}),$$

wo (nach Cauchy) durch die doppelten Klammern die Mehrförmigkeit des Ausdrucks angezeigt werden soll. Die gegebene complexe Zahl ändert sich nämlich nicht, wenn man den Winkel φ um 2π oder ein Vielfaches von 2π ändert, während diese Aenderung nicht nur auf $\frac{\varphi}{n}$, sondern im Allgemeinen auch auf $\cos\frac{\varphi}{n}$ und $\sin\frac{\varphi}{n}$ von Einfluss ist. Die Anzahl der Werthe, deren demnach dieser Ausdruck fähig ist, beträgt n, und bezeichnet man mit φ_0 irgend einen derjenigen Werthe, die der Winkel φ annehmen kann (z. B. den kleinsten positiven), so entsprechen den n Wurzeln der Zahl $\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ die Winkel

$$\frac{\varphi_0}{n}, \quad \frac{\varphi_0 + 2\pi}{n}, \quad \frac{\varphi_0 + 4\pi}{n}, \ldots \frac{\varphi_0 + 2(n-1)\pi}{n}.$$

Die n Wurzeln liegen mithin gleichförmig vertheilt auf der Peripherie eines Kreises vom Halbmesser $\varrho^{\frac{1}{n}}$, in Abständen von je $\frac{2\pi}{n}$ von einander. Jede dieser Wurzeln liefert, zur Potenz n erhoben, die gegebene complexe Zahl wieder; aber die logarithmischen Spi-

ralen, welche diesen einzelnen Potenzirungen entsprechen, sind sämmtlich von einander verschieden (ausgenommen wenn $\varrho=1$ ist), obwohl sie einzelne Punkte mit einander gemein haben können.

Wie man hieraus auf beliebige Bruch-Exponenten, deren Zähler nicht Eins ist, weiter schliessen, und wie ferner hierunter die Wurzeln aus reellen Zahlen, und insbesondre die Wurzeln aus der positiven und negativen reellen Einheit mitbegriffen sind, leuchtet von selbst ein. Als ein Fall, der für sich Aufmerksamkeit verdient, möge nur noch erwähnt werden

$$((-1))^{\frac{1}{2}}=\pm i,$$

indem hieraus die Identität des Zeichens i mit $\sqrt{-1}$ hervorgeht, insofern man, wie gewöhnlich, $\sqrt{-1}$ als den positiven Werth von $((-1))^{\frac{1}{2}}$ definirt.

5.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns zur Sache selbst, nämlich zu dem Beweise des Satzes:

Dass jeder algebraischen Gleichung mit Einer Unbekannten durch einen complexen Werth dieser Unbekannten Genüge geleistet werden kann.

Wir werden dabei einen Weg einschlagen, der im Wesentlichen zuerst von Cauchy befolgt worden ist, werden aber, was Cauchy nicht gethan hat, den Beweis sogleich auf die oben construirte Ebene der complexen Zahlen übertragen und daselbst zu Ende bringen.

Es sei

$$x^n+a_1 x^{n-1}+a_2 x^{n-2}+\ldots.+a_{n-1}x+a_n=0$$

die gegebene Gleichung, wofür wir zur Abkürzung schreiben wollen

$$f(x)=0,$$

so soll nachgewiesen werden, dass sich ein complexer Werth für x muss angeben lassen, welcher der Bedingung $f(x)=0$ Genüge leistet. Die Coefficienten $a_1, a_2, \ldots a_n$ dürfen dabei reelle oder auch selbst complexe Zahlen sein. Man setze

$$x=r(\cos t+i\sin t),$$

so wird nach § 4. $f(x)$ unter der Form

$$f(x)=R(\cos T+i\sin T)$$

dargestellt werden können, wo R und T Functionen von r und t sind; und wenn sich nachweisen lässt, dass r und t immer so gewählt werden können, dass man hat

$$R=0$$

(wobei der Werth von T gleichgültig ist), so ist das Verlangte bewiesen, denn diese Gleichung hat unmittelbar die Gleichung $f(x)=0$ zur Folge.

Aber aus der Beschaffenheit der Function $f(x)$ geht hervor, dass man für $r=\infty$ auch habe $R=\infty$, und dass für endliche Werthe von r auch R endlich bleibe, und da ausserdem der Modulus R seiner Natur nach nur positiv sein kann, so folgt, dass derselbe mindestens einen kleinsten Werth besitzen müsse, der zu bestimmten Werthen von r und t gehört. Wenn sich nun beweisen lässt:

> Dass, welchen von Null verschiedenen Werth des Modulus von $f(x)$ man auch für willkührliche Annahmen von r und t erhalten habe, dennoch immer durch entsprechende Aenderungen von r und t ein neuer Modulus von $f(x)$, der *kleiner* ist als der vorige, erhalten werden kann:

so folgt daraus unmittelbar, dass jener nothwendig vorhandene kleinste Werth des Modulus von $f(x)$ nur $=0$ sein kann, dass mithin die ihm zugehörigen Werthe von r und t die Gleichung $R=0$, und folglich auch die Gleichung $f(x)=0$ befriedigen, womit sodann der in Frage stehende Satz bewiesen sein würde.

6.

Zum Beweise desjenigen Hülfssatzes, auf welchen so eben der Beweis des vorgelegten Satzes zurückgeführt worden ist, werde angenommen, man habe durch die Substitution

$$x=r(\cos t+i\sin t)$$

erhalten:

$$f(x)=R(\cos T+i\sin T),$$

wo R nicht $=0$ sei. Ferner durch den Uebergang des x in $x_1=x+h$, wo

$$h=\varrho(\cos\theta+i\sin\theta),$$

erhalte man:

$$f(x_1)=R_1(\cos T_1+i\sin T_1),$$

so ist nachzuweisen, dass ϱ und θ immer so gewählt werden können, dass man hat:

$$R_1 < R.$$

Die Entwickelung von $f(x_1)=f(x+h)$ nach Potenzen von h gibt:

$$f(x_1)=f(x)+b_1h+b_2h^2+\ldots.+h^n,$$

wo die Coefficienten b_1, b_2,.... im Allgemeinen complexe Zahlen sein werden, z. B.

$$b_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$
$$b_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$
$$\cdots\cdots$$

Von diesen Coefficienten können aber auch einzelne $=0$ werden, und wenn man desshalb der Allgemeinheit wegen annimmt, es sei $b_m h^m$ das erste stehen bleibende Glied, so hat man:

$$f(x_1) = f(x) + b_m h^m + b_{m+1} h^{m+1} + \ldots + h^n,$$

und hierin überall die complexen Werthe an die Stelle setzend:

$$\begin{aligned} R_1(\cos T_1 + i\sin T_1) &= R(\cos T + i\sin T) \\ &+ r_m\varrho^m(\cos\overline{\varphi_m + m\theta} + i\sin\overline{\varphi_m + m\theta}) \\ &+ r_{m+1}\varrho^{m+1}(\cos\overline{\varphi_{m+1} + (m+1)\theta} + i\sin\overline{\varphi_{m+1} + (m+1)\theta}) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &+ \varrho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta), \end{aligned}$$

Die Summe, welche durch die rechte Seite dieser Gleichung dargestellt wird, construire man nun in der Ebene der complexen Zahlen nach den früher (§. 4.) entwickelten Regeln der Addition. Man lege zu dem Ende von dem Anfangspunkte A der Achse der reellen Zahlen eine Linie $AB = R$ unter einem Winkel $= T$ gegen die positive Richtung dieser Achse; von B aus eine Linie $BC = r_m\varrho^m$ unter einem Winkel $= \varphi_m + m\theta$ gegen eine durch B gelegte Parallele zu der positiven Richtung der Achse der reellen Zahlen; von C aus eine Linie $CD = r_{m+1}\varrho^{m+1}$ unter einem Winkel $= \varphi_{m+1} + (m+1)\theta$, u. s. w. Gelangt man auf diese Weise zuletzt zu einem Punkte M der Ebene, so ist die gerade Linie $AM = R_1$, und der Winkel, den sie mit der positiven Richtung der Achse einschliesst, $= T_1$.

Damit nun aber, wie verlangt wird, $R_1 < R$ werde, kann man über die Grössen ϱ und θ verfügen wie folgt.

Man nehme θ so, dass $\varphi_m + m\theta = T + \pi$ wird, folglich

$$\theta = \frac{T + \pi - \varphi_m}{m} \ldots. \; (1)$$

so wird dadurch erreicht, dass die Linie BC auf AB fällt, und wählt man ausserdem ϱ so, dass $r_m\varrho^m < R$, folglich

$$\varrho < \sqrt[m]{\frac{R}{r_m}} \ldots. \; (2),$$

so wird ausserdem noch der Punkt C zwischen A und B auf der Linie AB liegen. Knüpft man nun noch ϱ an die Bedingung, dass

$$r_m\varrho^m > r_{m+1}\varrho^{m+1} + r_{m+2}\varrho^{m+2} + \ldots + \varrho^n$$

oder auch, wenn man mit λ eine positive Zahl bezeichnet, die nicht kleiner ist als der grösste der positiven Factoren r_{m+1}, r_{m+2}, ... bis 1:

$$r_m \varrho^m > \lambda (\varrho^{m+1} + \varrho^{m+2} + \dots + \varrho^n)$$
$$> \lambda \varrho^{m+1} \cdot \frac{1-\varrho^{n-m}}{1-\varrho},$$

welche Bedingung erfüllt sein wird, wenn

$$\varrho < \frac{r_m}{r_m + \lambda} \dots (3)$$

so wird die Summe der einzelnen geraden Linien, aus denen der gebrochene Zug CD.... bis M zusammengesetzt ist, kleiner sein als die gerade Linie BC; folglich um so mehr die gerade Linie CM kleiner als die gerade Linie BC; folglich $AM \leqq AC + CM < AC + CB$, d. i. $< AB$, oder

$$R_1 < R,$$

wie verlangt wurde. Die Werthe von ϱ und θ, welche durch (1), (2), (3) bestimmt sind, leisten mithin der gestellten Forderung Genüge.

7.

Die beweisende Kraft des vorstehenden Beweises beruhet schliesslich, wie man sieht, in dem geometrischen Lehrsatze:

Dass zwischen zwei Punkten der geradlinige Zug kürzer ist als jeder aus geraden Linien zusammengesetzte gebrochene Zug;

welchen Lehrsatz vorauszusetzen hier um so weniger Bedenken getragen werden konnte, als durch die vorausgeschickten Entwikkelungen die ganze Frage überhaupt schon auf das Gebiet der Geometrie hinübergeführt worden war. Will man indessen den Beweis mit Umgehung jeder geometrischen Voraussetzung zu Ende führen, so kann man dazu in der That ganz einfach gelangen, indem man einen im Geiste der analytischen Geometrie geführten Beweis jenes geometrischen Lehrsatzes dergestalt in die obige Schlusskette hineinwebt, dass dessen wahre geometrische Bedeutung nicht sichtbar hervortritt.

Die analytische Geometrie nämlich drückt die Längen gerader Linien aus durch die Coordinaten ihrer Endpunkte, und verfährt man demgemäss in Bezug auf die geraden Linien $AB = R$ und $AM = R_1$, die beide im Anfangspunkte der Coordinaten beginnen, so hat man zunächst

$$R \cos T \quad \text{und} \quad R \sin T$$

als rechtwinklige Coordinaten des Endpunkts B, und ebenso

$$R_1 \cos T_1 \quad \text{und} \quad R_1 \sin T_1$$

als rechtwinklige Coordinaten des Endpunkts M. Zerlegt man nun die oben gefundene Entwickelung von $R_1(\cos T_1 + i\sin T_1)$ in ihren reellen und ihren rein imaginären Theil, um die Relation aufzustellen, welche zwischen den so eben genannten Coordinaten obwaltet, so erhält man

$$R_1 \cos T_1 =$$

$$R\cos T + r_m\varrho^m \cos\overline{\varphi_m + m\theta} + r_{m+1}\varrho^{m+1}\cos\overline{\varphi_{m+1} + (m+1)\theta} + \ldots \varrho^n \cos n\theta$$

$$R_1 \sin T_1 =$$

$$R\sin T + r_m\varrho^m \sin\overline{\varphi_m + m\theta} + r_{m+1}\varrho^{m+1}\sin\overline{\varphi_{m+1} + (m+1)\theta} + \ldots \varrho^n \sin n\theta$$

und daraus endlich, indem man quadrirt und addirt:

$$R_1^2 =$$

$$R^2 + 2Rr_m\varrho^m \cos\overline{\varphi_m + m\theta - T} + 2Rr_{m+1}\varrho^{m+1}\cos\overline{\varphi_{m+1} + (m+1)\theta - T} + \ldots$$

$$+ (r_m\varrho^m \cos\overline{\varphi_m + m\theta} + r_{m+1}\varrho^{m+1}\cos\overline{\varphi_{m+1} + (m+1)\theta} + \ldots)^2$$

$$+ (r_m\varrho^m \sin\overline{\varphi_m + m\theta} + r_{m+1}\varrho^{m+1}\sin\overline{\varphi_{m+1} + (m+1)\theta} + \ldots)^2$$

Damit nun $R_1^2 < R^2$ werde, hat man hier ϱ und θ so zu bestimmen, dass das dem R^2 unmittelbar nachfolgende Glied, welches die niedrigste Potenz von ϱ enthält, negativ werde, und zugleich einen Zahlwerth erhalte, der grösser ist als der Zahlwerth der Summe aller nachfolgenden Glieder. Das Erste aber wird erreicht, wenn man setzt

$$\cos\overline{\varphi_m + m\theta - T} = -1, \; \varphi_m + m\theta - T = \pi, \; \theta = \frac{T + \pi - \varphi_m}{m} \ldots (1^*).$$

das Zweite aber, wenn man setzt, indem μ einen Zahlwerth bezeichnet, der nicht kleiner ist als der Zahlwerth des absolut grössten der Coefficienten der nachfolgenden Potenzen von ϱ:

$$2Rr_m\varrho^m > \mu(\varrho^{m+1} + \varrho^{m+2} + \ldots \varrho^{2n})$$
$$> \mu\varrho^{m+1} \cdot \frac{1 - \varrho^{2n-m}}{1 - \varrho},$$

welche Bedingung erfüllt wird, indem man annimmt

$$\varrho < \frac{2Rr_m}{2Rr_m + \mu} \ldots (2^*).$$

Dieser Beweis ist, wenn man seine geometrische Grundlage hinwegnimmt, wesentlich derselbe, welchen Cauchy gegeben hat. Jene Grundlage aber wirft auf seine Entstehung erst das rechte Licht, und sie aufgedeckt zu haben möchte desshalb kein vergebliches Unternehmen gewesen sein.

Nachschrift des Herausgebers.

Mit Bezug auf die von dem Herrn Verfasser des vorhergehenden Aufsatzes auf S. 226. gemachte Bemerkung halte ich es für zweckmässig, die betreffende Stelle aus den Göttingischen gelehrten Anzeigen. 1831. St. 64. S. 634. — S. 638. hier mitzutheilen, um dieses wichtige Actenstück in dem Archiv aufzubewahren.

„Der Verf. hat diesen hochwichtigen Theil der Mathematik*) seit vielen Jahren aus einem verschiedenen Gesichtspunkt betrachtet, wobei den imaginären Grössen eben so gut ein Gegenstand untergelegt werden kann, wie den negativen: es hat aber bisher an einer Veranlassung gefehlt, dieselbe öffentlich bestimmt auszusprechen, wenn gleich aufmerksame Leser die Spuren davon in der 1799 erschienenen Schrift über die Gleichungen, und in der Preisschrift über die Umbildung der Flächen leicht wiederfinden werden. In der gegenwärtigen Abhandlung sind die Grundzüge davon kurz angegeben; sie bestehen in Folgendem.

Positive und negative Zahlen können nur da eine Anwendung finden, wo das gezählte ein Entgegengesetztes hat, was mit ihm vereinigt gedacht der Vernichtung gleich zu stellen ist. Genau besehen findet diese Voraussetzung nur da Statt, wo nicht Substanzen (für sich denkbare Gegenstände), sondern Relationen zwischen je zweien Gegenständen das gezählte sind. Postulirt wird dabei, dass diese Gegenstände auf eine bestimmte Art in eine Reihe geordnet sind z. B. $A, B, C, D \ldots$, und dass die Relation des A zu B als der Relation des B zu C u. s. w. gleich betrachtet werden kann. Hier gehört nun zu dem Begriff der Entgegensetzung nichts weiter als der Umtausch der Glieder der Relation, so dass wenn die Relation (oder der Uebergang) von A zu B als $+1$ gilt, die Relation von B zu A durch -1 dargestellt werden muss. Insofern als eine solche Reihe auf beiden Seiten unbegrenzt ist, repräsentirt jede reelle ganze Zahl die Relation eines beliebig als Anfang gewählten Gliedes zu einem bestimmten Gliede der Reihe.

Sind aber die Gegenstände von solcher Art, dass sie nicht in Eine, wenn gleich unbegrenzte, Reihe geordnet werden können, sondern sich nur in Reihen von Reihen ordnen lassen, oder was dasselbe ist, bilden sie eine Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen; verhält es sich dann mit den Relationen einer Reihe zu einer andern oder den Uebergängen aus einer in die andere auf eine ähnliche Weise wie vorhin mit den Uebergängen von einem Gliede einer Reihe zu einem andern Gliede derselben Reihe, so bedarf es offenbar zur Abmessung des Ueberganges von einem Gliede des Systems zu einem andern ausser den vorigen Einheiten $+1$ und -1 noch zweier andern unter sich auch entgegengesetzten $+i$ und $-i$

*) Nämlich die Lehre von den imaginären Grössen.

Offenbar muss aber dabei noch postulirt werden, dass die Einheit i allemal den Uebergang von einem gegebenen Gliede einer Reihe zu einem bestimmten Gliede der unmittelbar angrenzenden Reihe bezeichne. Auf diese Weise wird also das System auf eine doppelte Art in Reihen von Reihen geordnet werden können.

Der Mathematiker abstrahirt gänzlich von der Beschaffenheit der Gegenstände und dem Inhalt ihrer Relationen; er hat es bloss mit der Abzählung und Vergleichung der Relationen unter sich zu thun: insofern ist er eben so, wie er den durch $+1$ und -1 bezeichneten Relationen, an sich betrachtet, Gleichartigkeit beilegt, solche auf alle vier Elemente $+1$, -1, $+i$ und $-i$ zu erstrecken befugt.

Zur Anschauung lassen sich diese Verhältnisse nur durch eine Darstellung im Raume bringen, und der einfachste Fall ist, wo kein Grund vorhanden ist, die Symbole der Gegenstände anders als quadratisch anzuordnen, indem man nämlich eine unbegrenzte Ebene durch zwei Systeme von Parallellinien, die einander rechtwinklich durchkreuzen, in Quadrate vertheilt, und die Durchschnittspunkte zu den Symbolen wählt. Jeder solche Punkt A hat hier vier Nachbaren, und wenn man die Relation des A zu einem benachbarten Punkte durch $+1$ bezeichnet, so ist die durch -1 zu bezeichnende von selbst bestimmt, während man, welche der beiden andern man will, für $+i$ wählen, oder den sich auf $+i$ beziehenden Punkt nach Gefallen rechts oder links nehmen kann. Dieser Unterschied zwischen rechts und links ist, so bald man vorwärts und rückwärts in der Ebene, und oben und unten in Beziehung auf die beiden Seiten der Ebene einmal (nach Gefallen) festgesetzt hat, in sich völlig bestimmt, wenn wir gleich unsere Anschauung dieses Unterschiedes andern nur durch Nachweisung an wirklich vorhandenen materiellen Dingen mittheilen können*). Wenn man aber auch über letzteres sich entschlossen hat, sieht man, dass es doch von unserer Willkühr abhing, welche von den beiden in Einem Punkte sich durchkreuzenden Reihen wir als Hauptreihe, und welche Richtung in ihr wir als auf positive Zahlen sich beziehend ansehen wollten; man sieht ferner, dass wenn man die vorher als $+i$ behandelte Relation für $+1$ nehmen will, man nothwendig die vorher durch -1 bezeichnete Relation für $+i$ nehmen muss Das heisst aber, in der Sprache der Mathematiker, $+i$ ist mittlere Proportionalgrösse zwischen $+1$ und -1 oder entpricht dem Zeichen $\sqrt{-1}$; wir sagen absichtlich nicht die mittlere Proportionalgrösse, denn $-i$ hat offenbar gleichen Anspruch. Hier ist also die Nachweisbarkeit einer anschaulichen Bedeutung von $\sqrt{-1}$ vollkommen gerechtfertigt, und mehr bedarf es nicht, um diese Grösse in das Gebiet der Gegenstände der Arithmetik zuzulassen.

Wir haben geglaubt, den Freunden der Mathematik durch diese kurze Darstellung der Hauptmomente einer neuen Theorie der soge-

---

*) Beide Bemerkungen hat schon Kant gemacht, aber man begreift nicht, wie dieser scharfsinnige Philosoph in der ersteren einen Beweis für seine Meinung, dass der Raum nur Form unserer äussern Anschauung sei, zu finden glauben konnte, da die zweite so klar das Gegentheil, und dass der Raum unabhängig von unserer Anschauungsart eine reelle Bedeutung haben muss, beweiset.

nannten imaginären Grössen einen Dienst zu erweisen. Hat man diesen Gegenstand bisher aus einem falschen Gesichtspunkt betrachtet und eine geheimnissvolle Dunkelheit dabei gefunden, so ist dies grossentheils den wenig schicklichen Benennungen zuzuschreiben. Hätte man $+1$, -1, $\sqrt{-1}$ nicht positive, negative, imaginäre (oder gar unmögliche) Einheit, sondern etwa directe, inverse, laterale Einheit genannt, so hätte von einer solchen Dunkelheit kaum die Rede sein können. Der Verf. hat sich vorbehalten, den Gegenstand, welcher in der vorliegenden Abhandlung eigentlich nur gelegentlich berührt ist, künftig vollständiger zu bearbeiten, wo dann auch die Frage, warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Grössen liefern können, ihre Beantwortung finden wird."

XXXVI.

Ueber das Princip des kleinsten Zwangs und die damit zusammenhängenden mechanischen Principe.

Von

Herrn Professor Dr. Reuschle

am Gymnasium zu Stuttgart.

Im vierten Bande des Crelle'schen Journals S. 232. stellt Gauss ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik auf, welches unter obigem Namen (Principle of least restraint) in einem englischen Lehrbuch (Earnshaw Dynamics, Cambridge 1839) unter die dynamischen Principe eingereiht worden ist. Soweit ich die Literatur kenne, ist es das einzige, wo es aufgeführt wird, übrigens ohne Beispiele, dergleichen auch Gauss nicht gegeben hat. Der Zweck dieser Abhandlung ist, nach einigen historischen Bemerkungen über die Behandlung des Princips in den beiden genannten Schriften, dasselbe zuerst geradezu an ein paar möglichst einfachen Beispielen zu erproben, es sodann der allgemeinen analytischen Behandlung zu unterwerfen und so in seinem Zusammenhang mit den übrigen Principen der Mechanik nachzuweisen.

§. 1.

Nach dem Ausdruck den ihm sein Urheber gegeben hat, lautet das Princip so:

„Die Bewegung eines Systems materieller, auf was immer für eine Weise mit einander verknüpfter Punkte, deren Bewegungen zugleich an was immer für äussere Beschränkungen gebunden sind, geschieht in jedem Augenblick in möglich grösster Uebereinstimmung mit der freien Bewegung oder unter möglich kleinstem Zwange, indem als Maass des Zwanges, den das ganze System in jedem Zeittheilchen erleidet, die Summe der Producte aus dem Quadrate der Ablenkung jedes Punkts von seiner freien Bewegung in seine Masse betrachtet wird."

Gauss und Earnshaw beweisen diesen Satz auf verschiedene Art durch Zurückführung auf andere mechanische Principe.

I. Ersterer leitet ihn auf folgende Weise aus dem Dalembertischen Princip in Verbindung mit dem der virtuellen Geschwindigkeiten ab. Es sei (Taf. IV. Fig. 1.) für irgend einen Punkt des Systems m die Masse, A sein Ort zur Zeit t, B der Ort, den er nach einem unendlich kleinen Zeitintervall τ in Folge der auf ihn wirkenden Kräfte und der zur Zeit t erlangten Geschwindigkeit einnehmen würde, wenn er vollkommen frei wäre, C der wirkliche Ort, der zufolge des Systemverbandes diesem Zeitintervall entspricht, endlich D irgend ein anderer, dem Systemverband compatibler und, versteht sich, den Punkten A und C unendlich naher Ort, so ist $\Sigma m.\overline{BC}^2$ ein Minimum, wenn

$$\Sigma m.\overline{BD}^2 - \Sigma m.\overline{BC}^2 > 0.$$

Ist aber θ der Winkel zwischen CB und CD, so ist in dem Dreieck BCD

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2\overline{BC}.\overline{CD}.\cos\theta,$$

folglich

$$(a)\ldots \Sigma m.\overline{BD}^2 - \Sigma m.\overline{BC}^2 = \Sigma m.\overline{CD}^2 - 2\Sigma m.\overline{BC}.\overline{CD}.\cos\theta,$$

aber nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, angewandt auf das Gleichgewicht der verlornen Kräfte, welches durch das Dalembertische gefordert wird, ist:

$$(b)\ldots \Sigma m.\overline{BC}.\overline{CD}.\cos\theta = 0,$$

folglich

$$\Sigma m(\overline{BD}^2 - \overline{BC}^2) = \Sigma m.\overline{CD}^2 > 0.$$

Es ist nämlich das Product $m.\overline{BC}.\overline{CD}.\cos\theta$ das dem materiellen Punkt m zugehörige virtuelle Moment, sofern $m.\overline{BC}$ als seine verlorne Kraft betrachtet werden darf. Ueber die Berechtigung hiezu, so wie über die wesentliche Homogeneität der Glei-

chung *(a)* hinsichtlich des Unendlichkleinen erlaube ich mir zu dem Gaussischen Beweise folgende Bemerkungen hinzuzufügen.

Das Product $m.\overline{BC}$ ist zuächst das Product aus der Masse in einen dem unendlichkleinen Zeittheilchen τ entsprechenden Raum oder Weg; man kann denselben aber an die Stelle der der Zeiteinheit entsprechenden Beschleunigung, oder wenn diese p zur Zeit t ist, $\frac{1}{2}p\tau^2$ für p setzen, sofern dann blos $\frac{1}{2}\tau^2$ als gemeinschaftlicher Factor vor das Summenzeichen in *(b)* tritt. Denn obschon die in obigem Ausdruck des Princips vorkommenden, zur Zeit t erlangten Geschwindigkeiten v Räume liefern von der Form $v\tau$, welche also nicht das Quadrat von τ enthalten würden, so sind doch in der That die verlornen Kräfte oder die dafür substituirbaren Räume BC von jenen Geschwindigkeiten v unabhängig, was durch die Nachweisung der verlornen Kraft in BC überhaupt erhellen wird. Sei zu dem Behuf (Taf. IV. Fig. 2.), ausgehend von dem der Zeit t entsprechenden Ort A, AE der im Zeittheilchen τ zufolge der erlangten Geschwindigkeit, AF der in demselben Zeitintervall zufolge der neuhinzutretenden Kraft durchlaufene Raum, während AC, wie oben, den wirklichen Weg bedeutet: so stellt, wenn man AEC zum Parallelogramm ergänzt, $EC=AG$ die wirksame, und wenn man AGF ergänzt, $FG=AH$ die verlorne Composante der beschleunigenden Kraft AF, endlich die Diagonale AB in dem Parallelogramm aus AE und AF den im Zeittheilchen τ frei durchlaufenen Raum vor. Diess ist aber zugleich die Diagonale in dem Parallelogramm aus AC und AH, und daher die Ablenkung BC von der freien Bewegung parallel und gleich der verlornen Kraft AH, woraus bereits erhellt, dass BC wie AF eine Grösse von der Form $\frac{1}{2}p\tau^2$ ist. Noch unmittelbarer aber zeigt sich die Unabhängigkeit der Grösse BC oder AH von der zur Zeit t erlangten Geschwindigkeit so: ist AC' der AC gleich und entgegengesetzt, so ist AH Resultante aus AB und AC'; zerlegt man aber diese beiden in ihre Composanten zurück, welche für jene AE und AF, für diese AE' und AG' sind, d. h. die der AE und AG gleichen und direct entgegengesetzten Grössen, so heben sich somit AE und AE' als Composanten von AH auf. — Da nun $BC=\frac{1}{2}p\tau^2$, so ist allerdings $\Sigma m.\overline{BC}.\overline{CD}.\cos\theta=\frac{1}{2}\tau^2\,\Sigma mp.\overline{CD}\cos\theta$ nach den citirten Principen null; aber da sich BC zugleich als ein Unendlichkleines der zweiten Ordnung herausstellt, so müssen auch BD und CD als solche sich erweisen, damit *(a)* homogen sei, weil sonst das in der Gleichung *(b)* enthaltene Glied als ein Unendlichkleines höherer Ordnung aus *(a)* wegfiele, unabhängig vom Princip der virtuellen Geschwindigkeiten. Es ist aber D ein mit C gleichartiger Punkt und es lässt sich für ihn die vorige Construction wiederholen, indem man überall D an die Stelle von C setzt und, ausgehend von A, die gegebene Anfangsgeschwindigkeit AE eben so bei AD, wie bei AC, concurriren, aber irgend eine andere beschleunigende Kraft, anstatt AF, hinzutreten lässt; hiedurch zeigt sich BD als eine Grösse von der Form $\frac{1}{2}p'\tau^2$, wo p' eine willkührlich andere, nur den Bedingungen des Systems entsprechende Beschleunigung ist, die m von B aus anstatt nach C, in demselben Zeittheilchen τ nach D führen würde, und alsdann ist auch CD, als Resultante aus CB und BD, eine Grösse von derselben Form, nämlich, wenn λ der im Dreieck BCD der CD gegenüberliegende Winkel ist, $\overline{CD}^2=\frac{1}{4}\tau^4\,(p^2+p'^2-2pp'\cos\lambda)$.

II. Eine andere Beweisart versucht Earnshaw, indem er mit dem Dalembertischen Princip die statischen und dynamischen Eigenschaften des Schwerpunkts verbindet, durch eine mechanische Construction, der übrigens ich wenigstens nicht die gehörige Evidenz, Vollziehbarkeit in der Anschauung, zuschreiben kann, welche sich aber auch umgehen lässt. Ausgehend davon, dass in der Richtung BC die Resultante der verlornen, oder wie er sich passend ausdrückt, der Zwangskräfte (forces of restraint, restraining pressures), auf m wirkt, mithin BC der Raum ist, um den die Resultante das Theilchen m in der unendlichkleinen Zeit τ ablenkt: so denke man sich jetzt sämmtliche materiellen Punkte des Systems ihrem Verbande entnommen, in freiem Zustande an irgend einem Punkt β des Raums vereinigt und hier zumal von, den resp. Zwangskräften gleichen, Drucken in deren Richtungen getrieben, so wird sich jedes Theilchen m von β nach einem Punkte γ bewegen, so dass $\beta\gamma$ gleich und parallel BC ist. Da nun die Zwangskräfte von der Art sind, dass sie Gleichgewicht an dem System hervorbringen, gemäss dem Dalembertischen Princip, so können sie keinen Einfluss auf die Bewegung des Schwerpunkts haben, gemäss dem Princip der Erhaltung des Schwerpunkts, es bleibt mithin noch der Schwerpunkt der Theilchen m, wenn sie in den Punkten γ sich befinden. Nach einer bekannten Eigenschaft des Schwerpunkts aber ist $\Sigma m \overline{\beta\gamma}^2$, folglich auch $\Sigma m \overline{BC}^2$ ein Minimum, d. h. der Werth dieser Grösse ist kleiner, als wenn die Zwangskräfte kein Gleichgewicht hervorbrächten, wie sie es nach dem Dalembertischen Princip sollen.

So scharfsinnig und wirklich in der Natur der Sache gegründet nun die Zuziehung dieses Satzes vom Schwerpunkt ist, dass die Summe der Producte aus jeder Masse in das Quadrat ihrer Entfernung vom Schwerpunkt ein Minimum sei: so sehr scheint mir durch die Art, wie der Satz von der Erhaltung des Schwerpunkts in Anwendung gebracht wird, der mechanischen Anschauung Zwang angethan zu werden. Denn so sehr die Forderung an die mathematische Abstraction zuzugestehen ist, sich eine beliebige Masse in einem Punkt, und desgleichen in einer Linie, Fläche, vereinigt, concentrirt zu denken, so unnatürlich, ja wie eine contradictio in adjecto, kommt mir die Forderung vor, mehrere einzelne materielle Punkte (oder in Punkten concentrirt gedachte Massen) in freiem Zustande, unverbunden, so dass jeder für sich sich bewegen kann, als in einem Punkt vereinigt sich zu denken, vielmehr bilden mehrere materielle Punkte dieser Art ein System, und es müsste daher erst bewiesen werden, dass β der Schwerpunkt dieses Systems ist, ehe sich begreifen lässt, dass er es bleibt. Dass nun aber β wirklich der Schwerpunkt der in den Punkten γ befindlichen materiellen Punkte ist, folgt aus einem rein statischen Satze, den Lagrange in der analytischen Mechanik, im 5ten Abschnitt der Statik (T. 1. pag. 107), als von Leibnitz aufgestellt, anführt und aus seinen Formeln herleitet. Der Satz besteht darin, dass, wenn mehrere Kräfte an einem Punkt sich Gleichgewicht halten, und von diesem Punkt aus Linien gezogen werden, die nach Grösse und Richtung jene Kräfte vorstellen, der betreffende Punkt der Schwerpunkt eben so vieler (als Kräfte vorhanden sind), in den Endpunkten jener Linien angebrachter, gleicher Massen sei; und man kann ihn dahin erweitern: wenn man

jede der statischen Kräfte P, die an einem Punkt sich Gleichgewicht halten, durch ein Product mp vorstellt, wovon der eine Factor m als eine Masse, der andere p als eine Beschleunigung, oder als ein in einer gewissen Zeit durchlaufener Weg betrachtet werden kann, so ist jener Punkt der Schwerpunkt der in den Entfernungen p von ihm angebrachten Massen m, jene Entfernungen in Richtung der gegebenen Kräfte genommen; und dann ist nach einem zweiten statischen Satze, dem von Earnshaw citirten, Σmp^2 ein Minimum. Indem ich den Beweis des so gestellten Satzes, so wie des letzt erwähnten, in die Berichtigung des englischen Beweises für unser Princip einflechte, besteht dieser nunmehr aus folgenden Momenten:

1) Dem Princip der Erhaltung des Schwerpunkts zufolge können die Zwangskräfte, die an dem System vermöge des Dalembertischen Princips sich Gleichgewicht halten, keinen Einfluss auf die Bewegung des Schwerpunkts haben, sondern müssen sich an demselben, mithin überhaupt an einem Punkt β des Raums Gleichgewicht halten*). Setzt man daher, wie in Nro. I. $BC=\beta\gamma=\frac{1}{2}p\tau^2$, und sind a, b, c die Winkel der Linie $\beta\gamma$ mit drei rechtwinkligen Axen der x, y, z, so drücken die Gleichungen

$$(\alpha)\quad \Sigma mp\cos a=0,\ \Sigma mp\cos b=0,\ \Sigma mp\cos c=0$$

das Gleichgewicht der Zwangskräfte $m.\overline{BC}$ am Punkte β aus.

2) Sind alsdann ξ, η, ζ die Coordinaten des Punkts β und x, y, z die irgend eines der Punkte γ, so ist

$$\overline{\beta\gamma}^2=\tfrac{1}{4}p^2\tau^4=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2$$

und

$$\cos a=\frac{x-\xi}{\frac{1}{2}p\tau^2},\ \cos b=\frac{y-\eta}{\frac{1}{2}p\tau^2},\ \cos c=\frac{z-\zeta}{\frac{1}{2}p\tau^2};$$

aus den vorhergehenden Gleichungen (α) wird daher:

$$(\beta)\quad \Sigma m(x-\xi)=0,\ \Sigma m(y-\eta)=0,\ \Sigma m(z-\zeta)=0,$$

und diese geben

$$\xi=\frac{\Sigma mx}{\Sigma m},\ \eta=\frac{\Sigma my}{\Sigma m},\ \zeta=\frac{\Sigma mx}{\Sigma m},$$

wonach der Punkt β, dessen Coordinaten ξ, η, ζ sind, der Schwerpunkt der materiellen Punkte m ist, deren Coordinaten x, y, z, d. h. der in den Punkten γ befindlichen Massen m**).

---

*) Oder einfacher: Da die Zwangskräfte nach dem Dalembertischen Princip an dem gegebenen System Gleichgewicht hervorbringen, so müssen sie insbesondere die fortschreitende Bewegung des Schwerpunkts aufheben, mithin an einem Punkt sich Gleichgewicht halten.

**) Da man nun, anstatt $mp=P$, $m'p'=P'$ u. s. w. zu setzen, auch setzen kann: $P=mq$, $P'=mq'$...., d. h. alle diese Massen als gleich annehmen, so erhält man, wenn n die Anzahl derselben (oder der Kräfte P):

$$\xi=\frac{1}{n}\Sigma x,\quad \eta=\frac{1}{n}\Sigma y,\quad \zeta=\frac{1}{n}\Sigma z,$$

in welcher Form Lagrange am citirten Ort diese Resultate herleitet, als Ausdruck des Leibnitzischen Satzes.

3) Da die ersten Theile der Gleichungen (β) die partiellen Ableitungen nach ξ, η, ζ von der Function $\frac{\tau^4}{4}\Sigma mp^2$ sind, mit entgegengesetztem Zeichen genommen, und da die zweiten, nämlich die einen, wo zweimal nach der nämlichen Variable differenzirt wird, sämmtlich auf die wesentlich positive Grösse Σm, die andern, wo nach zwei verschiedenen Variabeln differenzirt wird, sämmtlich auf Null sich reduciren: so sind alle Bedingungen erfüllt, welche jene Function, mithin $\Sigma m.\overline{BC}^2$, zu einem Minimum machen in Beziehung auf ξ, η, ζ, d. h. kleiner, als wenn ξ, η, ζ nicht die dem Schwerpunkt entsprechenden Werthe hätten, mithin kleiner, als wenn die Zwangskräfte $m.\overline{BC}$ nicht an einem Punkt, also auch nicht an dem System sich Gleichgewicht hielten*).

III. Vergleichen wir nun die beiden Beweise, so gehen beide gemeinschaftlich von dem Fundamentalprincip der Dynamik, dem Gleichgewicht der Zwangskräfte aus, unterscheiden sich aber darin, dass der Gaussische dieses Gleichgewicht mittelst der allgemeinsten Bedingung des Gleichwichts in Anwendung bringt, die in dem Verschwinden der virtuellen Momente besteht, der von Earnshaw dagegen mittelst einer partiellen Bedingung, welche bloss die Aufhebung der fortschreitenden Bewegung zur Folge hat. So innig und zierlich nun hier die Beziehung unseres Minimums zu demjenigen, welches der Schwerpunkt darbietet, erscheint, so ist dieser Beweis doch keineswegs allgemein und passt zunächst bloss auf freie Systeme, wo die Zwangskräfte die Bedingung erfüllen müssen, an einem Punkt sich Gleichgewicht zu halten, was nicht mehr der Fall ist, wenn das System einen fixen Punkt oder eine fixe Axe enthält: so dass, sollte sich überhaupt in allen Fällen $\Sigma m.\overline{BC}^2$ auf Σmr_0^2 (wo r_0 die Entfernung der Masse vom Schwerpunkt) zurückführen lassen, diess in den genannten Fällen besonders, oder allgemein, geschehen müsste, dann aber wohl nur mittelst des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten geschehen könnte. Hiernach kann man behaupten, dass der englische Beweis bloss die Nachweisung des Princips an einem, obwohl viele Fälle unter sich begreifenden Beispiele ist, dergleichen wir in §. 2. an einem andern Beispiele all-

---

*) Man kann diesen Satz vom Schwerpunkt, dass, wenn r_0 die Distanz eines der materiellen Punkte m vom Schwerpunkt, Σmr_0^2 ein Minimum sei, auch ohne Differenzialrechnung so zeigen: es seien $x_0=x-\xi$, $y_0=y-\eta$, $z_0=z-\zeta$ die Coordinaten von m in Beziehung auf den Schwerpunkt, also $r_0^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2$, ebenso $r^2=x^2+y^2+z^2$, und $\varrho^2=\xi+\eta^2+\zeta^2$, so ist:

$$\begin{aligned}\Sigma m(r^2-r_0^2)&=\Sigma m\,((x_0+\xi)^2-x_0^2+(y_0+\eta)^2-y_0^2+(z_0+\zeta)^2-z_0^2)\\&=2\xi\Sigma mx_0+2\eta\Sigma my_0+2\zeta\Sigma mz_0+\varrho^2\Sigma m,\end{aligned}$$

folglich, wegen

$$\Sigma mx_0=\Sigma my_0=\Sigma mz_0=0,\quad \Sigma m(r^2-r_0^2)=\varrho^2\Sigma m>0,$$

was auch der Coordinatenursprung sein mag.

gemeinerer Art zeigen werden, dass aber der allgemeine Beweis mit Gauss durch die allgemeine Formel der Dynamik, die Verbindung des Dalembertischen Princips mit dem der virtuellen Geschwindigkeiten, geführt werden muss. Dann nur ist das Princip des kleinsten Zwangs auch hinsichtlich seiner Folgen allgemein aufgestellt, so dass es gleicherweise der Herleitung sämmtlicher Bewegungsgleichungen eines gegebenen Systems zu Grunde gelegt werden kann, wie das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten in seiner Anwendung auf das Gleichgewicht der verlornen Kräfte; denn aus dem Gaussischen Beweise erhellt unmittelbar, dass man umgekehrt vom Princip des kleinsten Zwangs zu jener allgemeinen Formel der Dynamik gelangt.

Wie man vermöge des Dalembertischen Satzes aus jeder dynamischen Formel eine statische ableiten kann und umgekehrt, so ist nach Gauss das Gleichgewicht nur ein besonderer Fall des allgemeinen Gesetzes, indem dann bloss die Punkte A selbst, als der Gleichgewichtslage entsprechend, an die Stelle der Punkte C treten, und $\Sigma m.\overline{BA}^2$ ein Minimum ist. Diess heisst in der That soviel als: in der allgemeinen Formel der Dynamik alles, was sich auf die wirkliche Bewegung zur Zeit t bezieht, Null setzen, im Falle die am System wirkenden Kräfte selbst sich Gleichgewicht halten; übrigens lässt sich auch der Beweis ganz auf dieselbe Weise führen, denn entspricht D einer virtuellen Lage des materiellen Punkts m, so dass AD mit AB in Bezug auf die Grösse gleichartig ist, so liefert das Dreieck BAD, wie zuvor BCD, die der (a) ähnliche Relation

$$(c)\ \Sigma m.(\overline{BD}^2-\overline{BA}^2)=\Sigma m\,\overline{AD}^2-2\Sigma m\,\overline{BA}.\overline{AD}.\cos\varphi,$$

indem φ der Winkel zwischen der Richtung der freien Bewegung AB oder der der Kraft und zwischen dem virtuellen Weg AD, und mit

$$\Sigma m\overline{BA}.\overline{AD}.\cos\varphi=0$$

reducirt sich

$$\Sigma m\overline{BD}^2-\Sigma m\overline{BA}^2$$

auf die wesentlich positive Grösse

$$\Sigma m\overline{AD}^2.$$

Auch hier ist alsdann, was bereits durch die Forderung angedeutet ist, dass AD der Grösse nach gleichartig mit AB sein soll, zu bemerken, dass, da, wenn wiederum p die an m wirksame beschleunigende Kraft ist und τ das unendlich kleine Zeitintervall, $AB=\frac{1}{2}p\tau^2$ ist, auch der virtuelle Weg AD ein Unendlichkleines zweiter Ordnung in Beziehung auf τ sein muss; was sich in der That auch dadurch rechtfertigt, dass die Grössen AD als die im Zeitintervall τ durchlaufenen Wege zu denken sind, wenn andere beschleunigende Kräfte q an die Stelle der in den Punkten A sich Gleichgewicht haltenden Kräfte p treten. Man vergl. übrigens §. 2. III. u. §. 3. I.

§. 2.

Wir prüfen nun das Princip des kleinsten Zwangs direct an einigen der einfachsten Beispiele, sowohl von Bewegung, als von Gleichgewicht.

I. Um für die Bewegung eines Systems den möglichst einfachen Fall zu nehmen, so wird dazu namentlich erfordert, dass sämmtliche Punkte A, B, C, D, E für jeden der materiellen Punkte in die nämliche Gerade fallen; wir nehmen daher zwei ungleiche Massen m, m' an den Enden eines um eine gewichtlose Rolle gehenden, gewichtlosen, absolut biegsamen und unausdehnbaren Fadens an und legen die Anordnung der Punkte $ABCDE$ für die Masse m und der entsprechenden $A'B'C'D'E'$ für die Masse m' nach (Taf. IV. Fig. 3.) zu Grunde: so sind nach der Natur des Systems alle Abstände der übrigen Punkte von E auf der einen, denen von E' auf der andern Seite gleich und haben entgegengesetzten Sinn, ausgenommen EB und $E'B'$, die beide dem Sinn der Schwere entsprechen. Nun ist hiernach:

$$\overline{BC}=\overline{EB}-\overline{EC}, \qquad \overline{B'C'}=\overline{EB}+\overline{EC},$$

$$\overline{BD}=\overline{EB}-\overline{EC}-\overline{CD}, \qquad \overline{B'D'}=\overline{EB}+\overline{EC}+\overline{CD},$$

$$\overline{BD}^2-\overline{BC}^2=\overline{CD}^2-2.\overline{CD}.(\overline{EB}-\overline{EC}),$$

$$\overline{B'D'}^2-\overline{B'C'}^2=\overline{CD}^2+2.\overline{CD}.(\overline{EB}+\overline{EC}),$$

folglich die Grösse

$$\Sigma m.(\overline{BD}^2-\overline{BC}^2)=(m+m').\overline{CD}^2+2(m+m').\overline{CD}.\overline{EC}-2(m-m')\overline{CD}.\overline{EB}$$

$$=(m+m')\left\{\overline{CD}^2+2.\overline{CD}.(\overline{EC}-\frac{m-m'}{m+m'}\cdot\overline{EB})\right\}.$$

Ist aber, wie gewöhnlich, g die Beschleunigung der Schwere und τ ein Zeitintervall, das in unserm Fall, mit allen vorhergehenden Linien, eine beliebige endliche Grösse haben darf, so ist

$$\overline{EB}=\tfrac{1}{2}g\tau^2, \quad \overline{EC}=\tfrac{1}{2}\frac{m-m'}{m+m'}g\tau^2,$$

mithin

$$\overline{EC}-\frac{m-m'}{m+m'}\cdot\overline{EB}=0,$$

und folglich

$$\Sigma m.\overline{BD}^2-\Sigma m.\overline{BC}^2=(m+m')\,\overline{CD}^2=\Sigma m.\overline{CD}^2>0,$$

was auch die willkührliche Linie CD sein mag, wofern sie nur in Richtung des Fadens genommen wird, und somit

$$m\overline{BC}^2 + m'\overline{B'C'}^2$$

ein Minimum.

Führt man die Werthe von EB, EC in den Ausdruck ein, welcher ein Minimum sein soll, so hat man, indem man $\frac{m-m'}{m+m'} = \mu$ macht

$$\overline{BC} = \tfrac{1}{2}(1-\mu)g\tau^2, \quad \overline{B'C'} = \tfrac{1}{2}(1+\mu)g\tau^2,$$

folglich

$$\Sigma m.\overline{BC}^2 = (m(1-\mu)^2 + m'(1+\mu)^2)\frac{g^2\tau^4}{4},$$

und man geht hiervon offenbar zu $\Sigma m.\overline{BD}^2$ über, indem man für μg eine andere Beschleunigung $(\mu+\alpha)g$ substituirt, die ebenfalls dem Faden entlang wirkt, wo α eine willkührliche, positive oder negative, Grösse ist, woraus man

$$\Sigma m.\overline{BD}^2 - \Sigma m\overline{BC}^2 = (m+m')\frac{\alpha^2 g^2\tau^4}{4},$$

d. h. $\Sigma m.\overline{CD}^2$ erhält, indem eben $CD = \frac{1}{2}\alpha g\tau^2$. Hieraus erhellet aber auch, dass man, Behufs der Nachweisung des Minimum's durch Differenzialrechnung, in Beziehung auf μ zu differenziren hat, und da die zwei ersten Ableitungen obiger Grösse nach μ

$$(-m(1-\mu) + m'(1+\mu))\frac{g^2\tau^4}{4} \text{ und } (m+m')\frac{g^2\tau^4}{4}$$

sind, wovon die erste vermöge des Werths von μ identisch null, die zweite wesentlich positiv ist, so ist auch von dieser Seite das Minimum bestätigt.

Will man endlich das Princip dazu anwenden, die Beschleunigung an dem System erst zu finden, so seien z, z' die Abstände der Punkte A, A', zur Zeit t, vom horizontalen Durchmesser der Rolle, also, weil überhaupt die Bedingung des Systems $\Delta z' = -\Delta z$ ist, entsprechend dem Zeitintervall τ,

$$EC = -E'C' = \frac{d^2z}{dt^2}\cdot\frac{\tau^2}{2} + \ldots,$$

folglich

$$BC = (g - \frac{d^2z}{dt^2})\frac{\tau^2}{2} - \ldots, \quad B'C' = (g + \frac{d^2z}{dt^2})\frac{\tau^2}{2} + \ldots,$$

mithin die Grösse, die ein Minimum sein soll:

$$\left\{m(g - \frac{d^2z}{dt^2})^2 + m'(g + \frac{d^2z}{dt^2})^2\right\}\frac{\tau^4}{4} + \ldots$$

Ihre erste Ableitung nach der wirklichen Beschleunigung $\frac{d^2z}{dt^2}$ genommen, wie zuvor, giebt zunächst:

$$\left\{-m(g-\frac{d^2z}{dt^2})+m'(g+\frac{d^2z}{dt^2})\right\}\frac{\tau^4}{4}+\ldots=0,$$

woraus, da diese Gleichung unabhängig von der Grösse des Zeitintervalls τ gelten muss:

$$-m(g-\frac{d^2z}{dt^2})+m'(g+\frac{d^2z}{dt^2})=0$$

folgt, mithin

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{m-m'}{m+m'}g.$$

Da sofort $\frac{d^3z}{dt^3}=0$, und desgleichen alle folgenden Zeitableitungen, so reduciren sich obige Ausdrücke auf ihre ersten Glieder und die zweite Ableitung $(m+m')\frac{\tau^4}{4}$ zeigt, als wesentlich positiv, ein Minimum an.

II. Das Princip findet übrigens auch seine Anwendung auf einen einzigen materiellen Punkt; auch hier ist $m.\overline{BC}^2$, mithin, abgesehen vom Zeichen, BC selbst ein Minimum. Diess erhellt bei der freien Bewegung von selbst, wo $BC=0$, bei der gezwungenen aber weist es sich allgemein auf eine sehr einfache Weise nach; bei der Bewegung eines Punkts auf einer schiefen Ebene unter dem Einfluss der Schwere z. B. ist, nach der unmittelbaren geometrischen Construction (Taf. IV. Fig. 4.) BC normal zur schiefen Ebene, mithin die kürzeste Linie von B nach derselben, und zwar für beliebige endliche Wege oder ein endliches Zeitintervall τ. Diess gilt aber offenbar von jeder Bewegung dieser Art, was auch die Fläche oder Curve sein mag, an welche die Bewegung des Punkts gebunden ist und was für Kräfte dabei im Spiel sein mögen, wofern im Allgemeinen das Zeitintervall unendlich klein genommen wird; denn die verlorne Kraft ist hier immer ein Normaldruck auf jene Curve oder Fläche, also BC normal, mithin die kürzeste Linie von B aus zu derselben, auf der ja auch die compatibeln Punkte D liegen müssen.

Um auch hier in dem einfachsten Beispiel dieser Art, wo nämlich der vorgeschriebene Weg geradlinig ist, die Differenzialgleichung des Minimums zur Auffindung der Beschleunigung anzuwenden, so seien x,y die Coordinaten des Punkts in Beziehung auf zwei rechtwinklige Axen, die der positiven y im Sinne der Schwere genommen, und s der auf der schiefen Ebene zur Zeit t durchlaufene Weg, also wenn α der Winkel der schiefen Ebene mit der Richtung der Schwere ist, $x=s\sin\alpha$, $y=s\cos\alpha$,

$$\overline{BC}^2=(\frac{d^2x}{dt^2}\;\frac{\tau^2}{2}+\ldots)^2+((g-\frac{d^2y}{dt^2})\frac{\tau^2}{2}-\ldots)^2$$

$$=\left\{\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2\sin^2\alpha+(g-\frac{d^2s}{dt^2}\cos\alpha)^2\right\}\frac{\tau^4}{4}+\ldots,$$

woraus durch Differenziation nach $\frac{d^2s}{dt^2}$, weil die Ableitung unabhängig von τ verschwinden muss,

$$\frac{d^2s}{dt^2}\sin^2\alpha-(g-\frac{d^2s}{dt^2}\cos\alpha)\cos\alpha=0,$$

d. h.

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g\cos\alpha$$

folgt, und die zweite Ableitung reducirt sich, weil die höhern Ableitungen von s, mithin auch von x, y nach t verschwinden, auf die positive Grösse

$$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\frac{\tau^4}{4}.$$

III. Was nun das Gleichgewicht betrifft, für welches das Princip des kleinsten Zwangs $\Sigma m.\overline{AB}^2$ als Minimum, mithin

$$\Sigma m(\overline{BD}^2-\overline{AB}^2)>0$$

festsetzt, so hat man im ersten unserer Beispiele (Taf. IV. Fig. 3.), indem man, um die Figur nicht ändern zu müssen, E, E' anstatt A, A' als die Gleichgewichtsplätze betrachtet,

$$\overline{BE}=\overline{B'E'},\quad \overline{ED}=\overline{E'D'},$$

$$\overline{BD}=\overline{BE}-\overline{ED},\quad \overline{B'D'}=\overline{BE}+\overline{ED},$$

folglich

$$\Sigma m.(\overline{BD}^2-\overline{BE}^2)=m((\overline{BE}-\overline{ED})^2-\overline{BE}^2)+m'((\overline{BE}+\overline{ED})^2-\overline{BE}^2)$$

$$=(m+m').\overline{ED}^2-2(m-m').\overline{ED}.\overline{EB};$$

aber beim Gleichgewicht ist $m=m'$, folglich

$$\Sigma m.(\overline{BD}^2-\overline{BE}^2)=2m.\overline{ED}^2>0.$$

Zu einem zweiten Beispiel diene ein Hebel (Fig. IV. Taf. 5.), wo in den Lagen A, A' zwei Massen m, m' an den Armen a, a' sich Gleichgewicht halten, wofür die Bedingung $ma=m'a'$ ist. Nun ist wiederum $\overline{AB}=\overline{A'B'}$, ferner, wenn θ der Drehungswinkel des Hebels aus der Lage AA' in die Lage DD' ist,

$$AD=2a\sin\tfrac{1}{2}\theta,\quad A'D'=2a'\sin\tfrac{1}{2}\theta,$$

mithin, da in den Dreiecken BAD, $B'A'D'$ die Winkel an A und A' resp. $\frac{1}{2}\theta$ und $180^\circ - \frac{1}{2}\theta$ sind,

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + 4a^2 \sin^2\tfrac{1}{2}\theta - 2a.\overline{AB}.\sin\theta,$$

$$\overline{B'D'}^2 = \overline{AB}^2 + 4a'^2 \sin^2\tfrac{1}{2}\theta + 2a'.\overline{AB}.\sin\theta;$$

folglich

$$\Sigma m(\overline{BD}^2 - \overline{BA}^2) = \Sigma m.\overline{AD}^2 - 2(ma - m'a').\overline{AB}.\sin\theta,$$

wo das zweite Glied zufolge der Gleichgewichtsbedingung verschwindet, das erste aber, indem man die Länge des ganzen Hebels mit l, das gemeinschaftliche Drehungsmoment mit μ bezeichnet,

$$\Sigma m.\overline{AD}^2 = 4(ma^2 + m'a'^2)\sin^2\tfrac{1}{2}\theta = 4\mu l \sin^2\tfrac{1}{2}\theta$$

wird, mithin

$$\Sigma m(\overline{BD}^2 - \overline{BA}^2) = 4\mu l \sin^2\tfrac{1}{2}\theta > 0.$$

In beiden Beispielen ist $AB = A'B' = \frac{1}{2}g\tau^2$, also die Minimumsgrösse

$$\Sigma m \overline{AB}^2 = (m + m')\frac{g^2\tau^4}{4},$$

wo sich zunächst nicht absehen lässt, wie und nach was sie differenzirt werden sollte, um auf diesem Wege, bei vorausgesetzter Gleichgewichtsbedingung, das Minimum zu constatiren, oder, bei vorausgesetztem Minimum, die Gleichgewichtsbedingung herzuleiten; allein da diese Differenziation dem Uebergang von BA zu BD entspricht, wobei sich bloss der Punkt A ändert, während B derselbe bleibt, so sind erst die Coordinaten des Punkts A einzuführen, um die Differenziation vollziehen zu können. Seien daher im ersten Beispiele z_0, z'_0 die vertikalen Ordinaten der Gleichgewichtsplätze E, E', und z, z' die der Punkte B, B', so ist

$$BE = z - z_0,\quad B'E' = z' - z'_0,$$

folglich

$$\Sigma m.\overline{BE}^2 = m(z - z_0)^2 + m'(z' - z'_0)^2;$$

und wenn man nach z_0 differenzirt, so sind die zwei ersten Ableitungen

$$-2m(z - z_0) - 2m'(z' - z'_0)\frac{dz'_0}{dz_0},$$

$$2m + 2m'\left(\frac{dz'_0}{dz_0}\right)^2 - 2m'(z' - z'_0)\frac{d^2z'_0}{dz_0^2};$$

aber vermöge der Bedingung des Systems ist $z_0 + z'_0 = \text{Const.}$, folglich

$$\frac{dz'_0}{dz_0} = -1, \quad \frac{d^2 z'_0}{dz_0^2} = 0,$$

wie alle folgenden; mithin reduzirt sich die erste, indem man nun $BE = B'E' = \frac{1}{2} g\tau^2$ berücksichtigt, auf $-(m-m')g\tau^2$, d. h. auf Null, wenn $m - m' = 0$, alsdann die zweite auf die positive Grösse $4m$.

Bezieht man im zweiten Beispiel die Punkte A, A', B, B' auf zwei rechtwinklige Axen, der x und y, so dass der Ursprung im Umdrehungspunkt des Hebels liegt, und die Axe der positiven x mit dem Hebelarm a in der Gleichgewichtslage den Winkel α, also mit dem andern a' den Winkel $180^\circ + \alpha$ macht, gemäss der Bedingung des Systems: so ist, wenn x_0, y_0 und x, y die Coordinaten von m in den Lagen A, B, ebenso x'_0, y'_0 und x', y' die von m' in den Lagen A', B' sind, indem sowohl AB als $A'B'$ die Winkel $90^\circ + \alpha$ und α mit den Axen der positiven x und y machen,

$$\overline{AB} . \sin\alpha = -(x - x_0), \quad \overline{A'B'} . \sin\alpha = -(x' - x'_0);$$

$$\overline{AB} . \cos\alpha = y - y_0, \quad \overline{A'B'} . \cos\alpha = y' - y'_0;$$

und

$$\Sigma m \overline{AB}^2 = m((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) + m'((x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2);$$

folglich hat man, wenn man in Beziehung auf α differenzirt, aber bloss die auf die Punkte A, A' sich beziehenden Coordinaten variiren lässt, in

$$-2m((x - x_0)\frac{dx_0}{d\alpha} + (y - y_0)\frac{dy_0}{d\alpha}) - 2m'((x' - x'_0)\frac{dx'_0}{d\alpha} + (y' - y'_0)\frac{dy'_0}{d\alpha}),$$

und

$$2m\left(\left(\frac{dx_0}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy_0}{d\alpha}\right)^2\right) + 2m'\left(\left(\frac{dx'_0}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy'_0}{d\alpha}\right)^2\right)$$

$$-2m((x - x_0)\frac{d^2x_0}{d\alpha^2} + (y - y_0\frac{d^2y_0}{d\alpha^2}) - 2m'((x' - x'_0(\frac{d^2x'_0}{d\alpha^2} + (y' - y'_0)\frac{d^2y'_0}{d\alpha^2})$$

die beiden ersten Ableitungen. Nun ist

$$x_0 = a\cos\alpha, \quad \frac{dx_0}{d\alpha} = -a\sin\alpha, \quad \frac{d^2x_0}{d\alpha^2} = -a\cos\alpha;$$

$$y_0 = a\sin\alpha, \quad \frac{dy_0}{d\alpha} = a\cos\alpha, \quad \frac{d^2y_0}{d\alpha^2} = -a\sin\alpha;$$

$$x'_0 = -a'\cos\alpha, \quad \frac{dx'_0}{d\alpha} = a'\sin\alpha, \quad \frac{d^2x'_0}{d\alpha^2} = a'\cos\alpha;$$

$$y'_0 = -a'\sin\alpha, \quad \frac{dy'_0}{d\alpha} = -a'\cos\alpha, \quad \frac{d^2y'_0}{d\alpha^2} = a'\sin\alpha;$$

wodurch die vorhergehenden Ausdrücke werden

$$-2ma((y-y_0)\cos\alpha-(x-x_0)\sin\alpha)+2m'a'((y'-y'_0)\cos\alpha-(x'-x'_0)\sin\alpha),$$

und

$$2(ma^2+m'a'^2)+2ma((y-y_0)\sin\alpha+(x-x_0)\cos\alpha)$$
$$-2m'a'((y'-y'_0)\sin\alpha+(x'-x'_0)\cos\alpha);$$

aber

$$(y-y_0)\cos\alpha-(x-x_0)\sin\alpha=AB,$$
$$(y'-y'_0)\cos\alpha-(x'-x'_0)\sin\alpha=A'B';$$
$$(y-y_0)\sin\alpha+(x-x_0)\cos\alpha=AB\sin2\alpha,$$
$$(y'-y'_0)\sin\alpha+(x'-x'_0)\cos\alpha=A'B'\sin2\alpha;$$

mithin, wenn man nunmehr, nach vollzogener Differenziation, auf $AB=A'B'=\frac{1}{2}g\tau^2$ Rücksicht nimmt, so reducirt sich die erste Ableitung auf $-(ma-m'a')g\tau^2$, mithin auf Null, wenn $ma-m'a'=0$, die zweite auf

$$2(ma^2+m'a'^2)+(ma-m'a')g\tau^2\sin2\alpha,$$

mithin unter derselben Bedingung auf die positive Grösse $2\mu l$, indem wiederum $ma=m'a'=\mu$, $a+a'=l$ gesetzt wird.

Auch in diesem Beispiel des Hebels durften die Räume AB, AD oder das Zeitintervall τ in beliebiger endlicher Grösse vorausgesetzt werden, wie in den vorhergehenden Fällen der Rolle und der schiefen Ebene; übrigens findet zwischen diesem und jenen der Unterschied statt, dass, während dort bei der Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten, die auf die Richtung der Kräfte zu projicirenden Wege, welche die Punkte des Systems bei einer Verrückung desselben aus der Gleichgewichtslage durchlaufen, endlich sein dürfen, diess beim Hebel nicht gilt, wohl aber gehört dieser zu den Fällen, wo statt ihrer Projectionen die virtuellen Wege selbst, und diese dann in endlicher Grösse, genommen werden dürfen.

§. 3.

Da, den Bemerkungen in §. 1. III. zufolge, um das Gaussische Princip aus dem Dalembertischen in gehöriger Allgemeinheit herzuleiten, das von letzterem festgesetzte Gleichgewicht der verlornen Kräfte auf die allgemeinste Art, d. h. mittelst des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten in Anwendung zu bringen ist, so soll nun gezeigt werden, wie der allgemeine analytische Ausdruck des Gaussischen Satzes durch die allgemeine Formel der Dynamik sich bestätigt, welche das Verschwinden der Summe der virtuellen Momente sämmtlicher verlorner Kräfte aussagt. Sie bedarf übrigens zuvor einiger Erörterungen, die wir in diesem Paragraphen vornehmen.

I. Bekanntlich wird sie, indem man alle Punkte des Systems auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezieht, und alle an den-

selben wirkenden Kräfte auf ihre Axenprojectionen zurückführt, so dargestellt:

$$\Sigma m \left\{ (X - \frac{d^2x}{dt^2}) \delta x + (Y - \frac{d^2y}{dt^2}) \delta y + (Z - \frac{d^2z}{dt^2}) \delta z \right\} = 0,$$

wofür wir

$$(1) \; \Sigma m [(X - \frac{d^2x}{dt^2}) \delta x] = 0$$

schreiben, indem wir sofort überhaupt zur Abkürzung jeden aus drei Gliedern bestehenden Ausdruck, welche der Reihe nach den drei Coordinaten, oder auch ihren drei Paaren, entsprechen, durch ein einziges dieser Glieder vorstellen, das wir in eckige Klammern einschliessen. In dieser Formel sind für die Zeit t und irgend einen der materiellen Punkte, dessen Masse m ist, x, y, z seine Coordinaten, also $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ seine wirklichen dem Systemverbande entsprechenden Beschleunigungen nach den drei Axen, X, Y, Z die Axenprojectionen der an ihm unabhängig vom Systemverbande wirkenden beschleunigenden Kräfte, also $X - \frac{d^2x}{dt^2}, Y - \frac{d^2y}{dt^2}, Z - \frac{d^2z}{dt^2}$ seine verlornen Kräfte, endlich $\delta x, \delta y, \delta z$ seine sogenannten virtuellen Geschwindigkeiten, projicirt auf die drei Axen, und ebendamit auf die Richtungen der Kräfte, die sich Gleichgewicht halten sollen. Es handelt sich nun zunächst um die genauere Feststellung der Bedeutung dieser Grössen im Geiste der Functionsrechnung, da sie gewöhnlich im Sinne der Infinitesimalmethode als Unendlichkleine betrachtet werden. Gehen wir zu dem Behuf auf die Aussage des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten zurück, so verlangt dasselbe dem System eine, im Allgemeinen unendlichkleine, seiner Natur compatible, Verrückung aus der Gleichgewichtslage zu ertheilen, die Wege, welche dabei die einzelnen Punkte des Systems durchlaufen, auf die Richtungen der Kräfte, welche an ihnen sich Gleichgewicht halten sollen, oder beide auf eine gemeinschaftliche Richtung zu projiciren, alsdann soll die Summe der Producte aus diesen beiderlei Projectionen und den Massen, d. h. die Summe der virtuellen Momente, verschwinden. Die Axenprojectionen der unendlich kleinen Wege oder die der Verrückung entsprechenden unendlich kleinen Variationen der Coordinaten werden nun gewöhnlich mit δx u. s. w. bezeichnet und als die virtuellen Geschwindigkeiten betrachtet; wir müssen aber virtuelle Wege und virtuelle Geschwindigkeit unterscheiden, und, wenn desshalb Dx einen, zunächst endlichen oder unendlichkleinen, Zuwachs von x (da es auch Fälle giebt, wo die virtuellen Wege endlich sein dürfen) bezeichnet, als nächsten Ausdruck der obigen Aussage des Princips aufstellen:

$$(2) \; \Sigma m [(X - \frac{d^2x}{dt^2}) Dx] = 0,$$

wo nun Dx eine Grösse ist nach Art von Δx, nur dass Δx der wirklichen Bewegung des sich selbst überlassenen Systems wäh-

rend des Zeitintervalls $\varDelta t$ entspricht, Dx aber einer willkührlichen, nur compatibeln Verrückung, einer virtuellen Bewegung. Man verwandelt aber

$$\varDelta x=\frac{dx}{dt}\varDelta t+\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\varDelta t^2}{2}+\ldots.$$

in Dx, wenn man an die Stelle der durch die wirkliche Bewegung bestimmten Zeitableitungen $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}$, u. s. w. willkührliche Functionen der Zeit setzt, nur mit der Einschränkung, dass sie an die Bedingungsgleichungen des Systems gebunden sind, so dass also, wenn man diese willkührlichen Grössen nach dem Gebrauche der Variationsrechnung mit δx, $\delta^2 x$ u. s. w. bezeichnet,

$$Dx=\delta x \,.\, \varDelta t+\delta^2 x \,.\, \frac{\varDelta t^2}{2}+\ldots..$$

gesetzt werden kann, wo $\varDelta t$ bloss als ganz willkührliche Fortschreitungsgrösse dient, die nach Umständen endlich oder unendlich klein zu nehmen ist, und so den Grössenrang von Dx bestimmt. Diess ist dem Geiste der Variationsrechnung ganz gemäss, wonach man von einer gegebenen Function $x=ft$ von t zu der variirten übergeht, indem man, wenn ε eine neue, absolut independente Variable ist, und φ eine willkührliche Function, $x+Dx=\varphi(t,\varepsilon)$ setzt, wobei nur $\varphi(t,0)=ft$ sein muss und woraus, durch Entwick lung nach ε,

$$x+Dx=\varphi_0+\left(\frac{d\varphi}{d\varepsilon}\right)_0\varepsilon+\left(\frac{d^2\varphi}{d\varepsilon^2}\right)_0\frac{\varepsilon^2}{2}+\ldots.=x+\varepsilon\delta x+\frac{\varepsilon^2}{2}\delta^2 x+\ldots;$$

hier aber kann man ε mit $\varDelta t$ vertauschen, da ε nichts anders sein soll als eine völlig unabhängige, jedes Grades von Kleinheit fähige, Grösse, ebenso wie das Zeitincrement $\varDelta t$ es ist: so dass man, während $x+\varDelta x=f(t+\varDelta t)$ ist, $x+Dx=\varphi(t,\varDelta t)$ hat, und man kann beifügen, dass, wie diese variirte Function immer der Bedin gung $x=\varphi(t,0)$ zu unterwerfen ist, nach Umständen auch die weiteren Bedingungen $\frac{dx}{dt}=\delta x, \frac{d^2x}{dt^2}=\delta^2 x$, u. s. w. gemacht werden können, bis zu einem beliebigen Gliede, bis zu welchem $\varDelta x$ und Dx übereinstimmen sollen.

Entwickelt man aber vermöge des aufgestellten Werthes von Dx die Formel (2) nach $\varDelta t$, so erhält man, nach Weglassung des gemeinschaftlichen Factors $\varDelta t$,

$$\Sigma m\left[\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x\right]+\tfrac{1}{2}\varDelta t.\Sigma m\left[\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta^2 x\right]+\ldots.=0,$$

und nun sind die beiden Fälle zu unterscheiden, wo die Verrükkung des Systems unendlich klein sein **muss** und wo sie endlich sein **darf**. Im ersten ist $\varDelta t$ unendlichklein zu nehmen und die vorhergehende Gleichung reducirt sich auf ihr erstes Glied, d. h. auf die Gleichung (1); im zweiten, wo $\varDelta t$ nur den Grad von Kleinheit

haben muss, dass die Reihe convergent sei, zerfällt sie, weil sie unabhängig von dieser willkührlichen Grösse bestehen muss, in eine unendliche Menge von Gleichungen, wovon (1) die erste ist und welche die allgemeine Form haben

$$(3)\quad \Sigma m\left[\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta^n x\right]=0,$$

wo n jede ganze positive Zahl von der Einheit an sein kann; und die Uebereinstimmung dieser sämmtlichen Gleichungen wird eben das analytische Zeichen davon sein, dass bei einem System, wo diess statt findet, die virtuellen Wege eine endliche Grösse haben dürfen.

II. Die besonderen Gleichungen der Bewegung des Systems, in welche die Formel (1) zerfällt, lassen sich entweder dadurch darstellen, dass man sämmtliche Bedingungsgleichungen des Systems mit unbestimmten Factoren in die Formel (1) einführt und sofort sämmtliche Coordinaten als eben so viele independente behandelt; oder dass man die Coordinaten auf die kleinste Anzahl independenter Variabeln zurückgeführt voraussetzt, mittelst jener Bedingungsgleichungen, wo es nöthig ist, auch nach Umständen unter Zuziehung der Formeln der Coordinatentransformation. Seien im ersten Fall $L=0$, $L'=0$ u. s. w. jene Bedingungsgleichungen, d. h. Relationen zwischen den Coordinaten der einzelnen Punkte des Systems, an welche dieselben während der ganzen Bewegung gebunden sind, so dass $\frac{dL}{dt}=0$ u. s. w. und eben so $\delta L=0$ u. s. w., und welche im Allgemeinen entweder bloss mittelbar, implicit, oder auch explicit die Zeit enthalten können, so dass, mit Ausschliessung des letztern Falls, die Gleichungen $\frac{dL}{dt}=0, \delta L=0$ soviel sind als

$$\left[\frac{dL}{dx_1}\frac{dx_1}{dt}\right]+\left[\frac{dL}{dx_2}\frac{dx_2}{dt}\right]+\ldots=0 \quad \text{oder} \quad \Sigma\left[\frac{dL}{dx}\frac{dx}{dt}\right]=0,$$

und

$$\left[\frac{dL}{dx_1}\delta x_1\right]+\left[\frac{dL}{dx_2}\delta x_2\right]+\ldots=0 \quad \text{oder} \quad \Sigma\left[\frac{dL}{dx}\delta x\right]=0$$

Alsdann zerfällt, wenn λ, λ', λ''.... die sogenannten Eliminationsfactoren sind, die Gleichung

$$(4)\quad \Sigma m\left[\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x\right]+\lambda\delta L+\lambda'\delta L'+\ldots=0,$$

die nun an die Stelle von (1) tritt, in ebensoviel mal, als Punkte m vorhanden sind, drei Gleichungen von der Form

$$(5)\ \begin{cases} m\left(X-\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)+\lambda\dfrac{dL}{dx}+\lambda'\dfrac{dL'}{dx}+\ldots=0, \\ m\left(Y-\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)+\lambda\dfrac{dL}{dy}+\lambda'\dfrac{dL'}{dy}+\ldots=0, \\ m\left(Z-\dfrac{d^2z}{dt^2}\right)+\lambda\dfrac{dL}{dz}+\lambda'\dfrac{dL'}{dz}+\ldots=0; \end{cases}$$

und die Bewegungsgleichungen des Systems sind das Resultat der Elimination sämmtlicher Grössen λ zwischen diesen Systemen von der Form (5).

Es seien im zweiten Falle ω, ψ, χ u. s. w. die letzten geometrischen independenten Variabeln, oder eben so viele von einander unabhängige Functionen der Zeit, worauf sich zuletzt, nach Berücksichtigung aller Bedingungen des Systems, die Coordinaten seiner Punkte zurückführen lassen. Diese Coordinaten sind alsdann wiederum im Allgemeinen entweder rein geometrische Functionen jener independenten, oder durch Relationen damit verknüpft, worin überdiess die Zeit explicit vorkommt, so dass man, mit Ausschliessung des letztern Falls, hat $x=f(\omega,\psi,\chi\ldots.)$ und folglich

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{d\omega}\frac{d\omega}{dt}+\frac{dx}{d\psi}\frac{d\psi}{dt}+\ldots.,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx}{d\omega}\frac{d^2\omega}{dt^2}+\frac{d^2x}{d\omega^2}\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2+2\frac{d^2x}{d\omega d\psi}\frac{d\omega}{dt}\frac{d\psi}{dt}+\frac{dx}{d\psi}\frac{d^2\psi}{dt^2}+\frac{d^2x}{d\psi^2}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2+\ldots.$$

$$\frac{d^3x}{dt^3}=\frac{dx}{d\omega}\frac{d^3\omega}{dt^3}+\frac{d^3x}{d\omega^3}\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^3+3\frac{d^2x}{d\omega^2}\frac{d\omega}{dt}\frac{d^2\omega}{dt^2}$$

$$+3\frac{d^2x}{d\omega d\psi}\left(\frac{d\psi}{dt}\frac{d^2\omega}{dt^2}+\frac{d\omega}{dt}\frac{d^2\psi}{dt^2}\right)+3\frac{d^3x}{d\omega^2 d\psi}\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2\frac{d\psi}{dt}+3\frac{d^3x}{d\omega d\psi^2}\frac{d\omega}{dt}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$$

$$+\frac{dx}{d\psi}\frac{d^3\psi}{dt^3}+\frac{d^3x}{d\psi^3}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^3+3\frac{d^2x}{d\psi^2}\frac{d\psi}{dt}\frac{d^2\psi}{dt^2}+\ldots.,$$

u. s. w., ebenso

$$\delta x=\frac{dx}{d\omega}\delta\omega+\frac{dx}{d\psi}\delta\psi+\ldots.,$$

$$\delta^2x=\frac{dx}{d\omega}\delta^2\omega+\frac{d^2x}{d\omega^2}\delta\omega^2+2\frac{d^2x}{d\omega d\psi}\delta\omega\delta\psi+\frac{dx}{d\psi}\delta^2\psi+\frac{d^2x}{d\psi^2}\delta\psi^2+\ldots.,$$

u. s. w., ferner

$$\varDelta x=\frac{dx}{d\omega}\varDelta\omega+\frac{dx}{d\psi}\varDelta\psi+\ldots+\frac{d^2x}{d\omega^2}\frac{\varDelta\omega^2}{2}+\frac{d^2x}{d\omega d\psi}\varDelta\omega\varDelta\psi+\frac{d^2x}{d\psi^2}\frac{\varDelta\psi^2}{2}+\ldots.,$$

$$Dx=\frac{dx}{d\omega}D\omega+\frac{dx}{d\psi}D\psi+\ldots+\frac{d^2x}{d\omega^2}\frac{D\omega^2}{2}+\frac{d^2x}{d\omega d\psi}D\omega D\psi+\frac{d^2x}{d\psi^2}\frac{D\psi^2}{2}+\ldots.,$$

wobei

$$\Delta\omega=\frac{d\omega}{dt}\Delta t+\ldots\ldots,\quad D\omega=\delta\omega\,\Delta t+\ldots\ldots,\ \text{u. s. w.}$$

Wie nun in den Bedingungsgleichungen $L=0$ bald die Coordinaten sämmtlicher Punkte, bald die einiger, bald selbst bloss die eines einzigen vorkommen können, so können in den Relationen $x=f(\omega,\psi..)$ bald alle, bald einige, bald sämmtliche independente vorkommen; wenn ferner eine solche independente ω mehreren Punkten des Systems gemeinschaftlich zukommen soll, so heisst das zunächst, dass für alle diese Punkte von jedem beliebigen Zeitpunkt t aus, ihre Aenderung $\Delta\omega$ oder $D\omega$ den nämlichen Werth habe, während der dem Zeitpunkt t entsprechende Werth die Form $\alpha+\omega$ hat, wo α eine Constante ist, die für die verschiedenen von ω abhängenden Punkte des Systems verschiedene, durch den Systemverband gegebene, Werthe hat; man kann aber, theils um die Veriable ω vor der Hand ohne Unterschied auf alle Punkte des Systems zu beziehen, theils um insbesondere auch den Fall mitzubegreifen, wo, wenn z. B. ω ein Winkel ist, je nach der Zählung desselben, $\Delta\omega$ für die einen Punkte positiv, für die andern negativ ausfallen würde, noch allgemeiner festsetzen, dass für irgend einen Punkt des Systems der Werth von ω zur Zeit t die Form $\alpha+a\omega$ habe, wo a eine ähnliche Constante wie α, beide namentlich auch des Nullwerths fähig: so dass die Relation zwischen einer Coordinate x und den independenten allgemein durch

$$x=f(\alpha+a\omega,\ \beta+b\psi,\ldots\ldots)$$

vorzustellen ist, anstatt durch $x=f(\omega,\psi,\ldots)$. Da nun die Variationen $\delta\omega$, $\delta^2\omega\ldots.$ einer geometrischen independenten ω als völlig willkührliche, von einander durchaus unabhängige Functionen der Zeit zu betrachten sind, so zerfällt die Gleichung (1) durch Einführung des Werths von δx in eben so viele Gleichungen

$$(6)\quad \Sigma m[(X-\frac{d^2x}{dt^2})\frac{dx}{d\omega}]=0,\quad \Sigma m[(X-\frac{d^2x}{dt^2})\frac{dx}{d\psi}]=0,\ \text{u. s. w.},$$

als independente Variabeln ω, $\psi\ldots.$ vorhanden sind; Gleichungen, die sämmtlich von der zweiten Ordnung hinsichtlich der Zeitableitungen der independenten sind, vermöge des Werths von $\frac{d^2x}{dt^2}$, und daher zur Bestimmung der Bewegung des Systems hinreichen.

III. Von den beiden Formen (5. u. 6.), die man den Bewegungsgleichungen eines Systems geben kann, ist für unsern nächsten Zweck die letztere geeigneter. Eben so wie diese aus (1) hervorgegangen sind, zerfällt nämlich die Formel (3) durch Einführung der independenten, in Gleichungen, deren allgemeine Form

$$(7)\quad \Sigma m[(X-\frac{d^2x}{dt^2})\frac{d^nx}{d\omega^{n'}d\psi^{n''}\ldots}]=0,$$

wo $n', n''\ldots$ ebenfalls ganze positive Zahlen sind, aber aller Werthe von Null an fähig und an die Bedingung $n'+n''+\ldots.=n$ gebun-

den. Da nun aber die Gleichungen (6) die Bewegung bereits vollständig bestimmen, so müssen sämmtliche in der Formel (7), ausser jenen, enthaltenen Gleichungen mit denselben identisch werden, was somit erfordert, dass alle höhere Ableitungen der Coordinaten nach $\omega, \psi\ldots$ verschwinden oder die ersten reproduciren, d. h. im Allgemeinen, dass die Coordinaten entweder lineäre Functionen der independenten,

$$\Delta = A + a\omega + b\psi + c\chi + \ldots\ldots,$$

oder Exponentialfunctionen von der Form

$$\Delta = Kk^{\alpha\omega + \beta\psi + \gamma\chi + \ldots\ldots}$$

mit der beliebigen Basis k seien, wo $K, A, a, b, c\ldots.$ Constanten hinsichtlich der Zeit sind, die von einem Punkt des Systems zum andern variiren, $\alpha, \beta, \ldots$ aber Constanten, die, wie k, unabhängig vom Systemverbande sind. Diess wären also die analytischen Bedingungen dafür, dass die virtuellen Räume endlich sein dürfen; man erhält aber diessfalls noch mehr coexistirende Gleichungen durch successive Differenziation von (7) nach t; eine erste giebt

$$\Sigma m \left\{ \begin{array}{l} (X - \frac{d^2x}{dt^2})(\frac{d^{n+1}x}{d\omega^{n'+1}\,d\psi^{n''}\ldots}\frac{d\omega}{dt} + \frac{d^{n+1}x}{d\omega^{n'}\,d\psi^{n''+1}\ldots}\frac{d\psi}{dt} + \ldots) \\ + \frac{d}{dt}(X - \frac{d^2x}{dt^2}) \cdot \frac{d^nx}{d\omega^{n'}\,d\psi^{n''}\ldots.} \end{array} \right\} = 0,$$

woraus, da der erste Bestandtheil dieses Ausdrucks vermöge (7) für sich verschwindet, indem die Ausdrücke $\frac{d\omega}{dt}, \frac{d\psi}{dt}\ldots.$ vor das Summenzeichen treten,

$$(8) \quad \Sigma m \left[\frac{d}{dt}\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) \cdot \frac{d^nx}{d\omega^{n'}\,d\psi^{n''}\ldots.}\right] = 0;$$

eine zweite, d. h. die Differenziation des letztern Ausdrucks führt ebenso zu

$$\Sigma m \left[\frac{d^2}{dt^2}(X - \frac{d^2x}{dt^2}) \cdot \frac{d^nx}{d\omega^{n'}\,d\psi^{n''}\ldots.}\right] = 0,$$

und so fortfahrend gelangt man zu der allgemeinen Formel

$$(9) \quad \Sigma m \left[\frac{d^i}{dt^i}(X - \frac{d^2x}{dt^2}) \cdot \frac{d^nx}{d\omega^{n'}\,d\psi^{n''}\ldots.}\right] = 0,$$

worin die vorhergehenden nebst (7) für die Werthe $i = 0, = 1, = 2$ enthalten sind, und wo i aller ganzen positiven Werthe von Null an fähig ist .Wenn die virtuellen Wege nicht endlich sein dürfen, also (7) nicht gilt, so gelten zwar die vollständigen Zeitableitungen der Gleichungen (6), zerfallen aber nicht in Gleichungen von der Form (8) und (9).

Wir ziehen hieraus noch schliesslich folgende Resultate.

1) Addirt man die Gleichungen (6) nach resp. Multiplication mit $\frac{d\omega}{dt}, \frac{d\psi}{dt} \ldots$, so erhält man, da wir uns auf den Fall beschränkt haben, dass x bloss mittelst der independenten $\omega, \psi \ldots$ von t abhängt, in

$$(10) \quad \Sigma m \left[\left(X - \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \frac{dx}{dt} \right] = 0,$$

die der Form nach mit (6) und (1) ganz analoge Gleichung, deren Integral bekanntlich das Princip der lebendigen Kräfte enthält. Man erhält sie gleicherweise durch Vertauschung der Variationen oder virtuellen Geschwindigkeiten δx in (1) mit den Zeitableitungen oder wirklichen Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}$; wir können auch sagen, durch Vertauschung des virtuellen Wegs Dx in (2) mit dem wirklichen Weg Δx, welche Vertauschungen gestattet sind, so wie die Relationen zwischen den Coordinaten und independenten oder die Bedingungsgleichungen des Systems die Zeit nicht explicit enthalten, wie sich Lagrange in der analytischen Mechanik ausdrückt. In den Fällen nun, wo Dx endlich sein darf, muss dasselbe auch von Δx gelten, und man hat alsdann als Folge von

$$(11) \quad \Sigma m \left[\left(X - \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \Delta x \right] = 0$$

neben (10) eine Reihe Gleichungen von der allgemeinen Form

$$(12) \quad \Sigma m \left[\left(X - \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \frac{d^n x}{dt^n} \right) = 0,$$

welche sich in der That, wenn man den Ausdruck von $\frac{d^n x}{dt^n}$ durch die independenten einführt, mittelst (7) rechtfertigt.

2) Da in dem Zeitintervall Δt die Grössen X und x die Incremente ΔX, Δx erhalten, so wird aus der Formel (1)

$$(13) \quad \Sigma m \left[\left(X + \Delta X - \frac{d^2(x + \Delta x)}{dt^2} \right) \delta(x + \Delta x) \right] = 0,$$

(wo man auch D für δ schreiben kann, analog der Formel (3)), d. h. die Gleichgewichtsformel der verlornen Kräfte zur Zeit $t + \Delta t$, und da

$$\Delta X = \frac{dX}{dt} \Delta t + \frac{d^2 X}{dt^2} \frac{\Delta t^2}{2} + \ldots,$$

$$\Delta x = \frac{dx}{dt} \Delta t + \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{\Delta t^2}{2} + \ldots,$$

folglich

$$\frac{d^2\varDelta x}{dt^2}=\varDelta\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^3x}{dt^3}\varDelta t+\frac{d^4x}{dt^4}\frac{\varDelta t^2}{2}+\ldots,$$

$$\varDelta\delta x=\varDelta\delta x=\frac{d\delta x}{dt}\varDelta t+\frac{d^2\delta x}{dt^2}\frac{\varDelta t^2}{2}+\ldots,$$

$$X+\varDelta X-\frac{d^2(x+\varDelta x)}{dt^2}=X-\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d}{dt}(X-\frac{d^2x}{dt^2})\varDelta t+\ldots,$$

so bildet der erste Theil von (13) eine Entwickelung nach $\varDelta t$, deren einzelne Glieder wegen der willkührlichen Grösse des Zeitintervalls verschwinden müssen, wodurch man eine Folge von Gleichungen erhält:

$$\Sigma m[(X-\frac{d^2x}{dt^2})\frac{d\delta x}{dt}+\frac{d}{dt}(X-\frac{d^2x}{dt^2}).\delta x]=0,$$

$$\Sigma m[(X-\frac{d^2x}{dt^2})\frac{d^2\delta x}{dt^2}+2\frac{d}{dt}(X-\frac{d^2x}{dt^2}).\frac{d\delta x}{dt}+\frac{d^2}{dt^2}(X-\frac{d^2x}{dt^2}).\delta x]=0,$$

u. s. w.

die, wie natürlich, nichts anders sind als die vollständigen Ableitungsgleichungen von (1) nach t. Aber in dem Fall, wo die Gleichung (7) und folglich (9) gilt, zerfallen sie wiederum in Gleichungen von der allgemeinen Form

$$(14)\quad \Sigma m\left[\frac{d^i}{dt^i}(X-\frac{d^2x}{dt^2}).\frac{d^{i'}\delta x}{dt^{i'}}\right]=0,$$

wo i und i' positive ganze Zahlen sind, aller Werthe von Null an fähig, so dass für $i+i'=0$ die Gleichung (1) darin enthalten ist, für $i+i'=1$ die beiden

$$\Sigma m[(X-\frac{d^2x}{dt^2})\frac{d\delta x}{dt}]=0;\quad \Sigma m[\frac{d}{dt}(X-\frac{d^2x}{dt^2}).\delta x]=0,$$

die man in der That unmittelbar mittelst (9) rechtfertigt, indem man den Werth von δx und von $\frac{d\delta x}{dt}$ d. h.

$$\frac{d\delta x}{dt}=\frac{dx}{d\omega}\frac{d\delta\omega}{dt}+(\frac{d^2x}{d\omega^2}\frac{d\omega}{dt}+\frac{d^2x}{d\omega d\psi}\frac{d\psi}{dt}+\ldots)\delta\omega+\ldots.$$

einführt. Endlich, da dann auch die in (4) enthaltenen Gleichungen bestehen, so folgt daraus ebenso, wie (14) aus (1),

$$(15)\quad \Sigma m\left[\frac{d^i}{dt^i}(X-\frac{d^2x}{dt^2}).\frac{d^{i'}\delta^n x}{dt^{i'}}\right]=0,$$

die sich ebenso wie (14) durch (9) rechtfertigt.

§. 4.

Nun lässt sich zeigen, dass das Princip des kleinsten Zwangs zu denselben Gleichungen führt, wie die Gleichgewichtsformel der Zwangskräfte, und zwar in der Art, dass in den Fällen, wo das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten bei endlichen Verrükkungen des Systems gilt, auch unser Princip für ein endliches Zeitintervall statt findet, während im Allgemeinen, d. h. wenn dort die virtuellen Wege unendlich klein sein müssen, auch hier das Zeitintervall, für welches die freien Bewegungen der Punkte des Systems mit den wirklichen verglichen werden, unendlich klein zu nehmen ist.

I. Es seien für irgend einen der materiellen Punkte m des Systems seine rechtwinkligen Coordinaten in der der Zeit t entsprechenden Lage A (um die Benennungen aus § 1. beizubehalten) $x, y, z,$ und in den beiden der Zeit $t+\Delta t$ entsprechenden Lagen, in C $x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z,$ in B $x+\xi,\ y+\eta,\ z+\zeta,$ wo also $\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z$ und ebenso $\xi,\ \eta,\ \zeta$ Functionen von Δt sind. Setzt man daher

$$BC=u, \text{ und } \Sigma m u^2=U,$$

so ist

$$u^2=(\xi-\Delta x)^2+(\eta-\Delta y)^2+(\zeta-\Delta z)^2,$$

und die Grösse U, die ein Minimum sein soll:

$$(a)\quad U=\Sigma m[(\xi-\Delta x)^2].$$

Um nun U nach Δt zu entwickeln, so ist als Function von Δt

$$\xi=\xi_0+\left(\frac{d\xi}{d\Delta t}\right)_0\Delta t+\left(\frac{d^2\xi}{d\Delta t^2}\right)_0\frac{\Delta t^2}{2}+\left(\frac{d^3\xi}{d\Delta t^3}\right)_0\frac{\Delta t^3}{2.3}+\ldots,$$

aber für $\Delta t=0$, oder für die Zeit t hat man

$$\xi_0=0,\quad \left(\frac{d\xi}{d\Delta t}\right)_0=\frac{dx}{dt},\quad \left(\frac{d^2\xi}{d\Delta t^2}\right)_0=X,$$

indem, wie in §. 3., $X,\ Y,\ Z$ die Axencomposanten der zur Zeit t auf den materiellen Punkt m unabhängig vom Systemverbande wirkenden beschleunigenden Kräfte sind; es ist ferner zu Ende des Zeitintervalls Δt

$$\frac{d^2\xi}{d\Delta t^2}=X+\Delta X=X+\frac{dX}{dt}\Delta t+\frac{d^2X}{dt^2}\frac{\Delta t^2}{2}+\ldots,$$

aber auch vermöge des vorhergehenden Ausdrucks von ξ

$$\frac{d^2\xi}{d\Delta t^2}=\left(\frac{d^2\xi}{d\Delta t^2}\right)_0+\left(\frac{d^3\xi}{d\Delta t^3}\right)_0\Delta t+\left(\frac{d^4\xi}{d\Delta t^4}\right)_0\frac{\Delta t^2}{2}+\ldots,$$

folglich durch Vergleichung dieser beiden identischen Entwickelungen:

$$\left(\frac{d^3\xi}{d\Delta t^3}\right)_0=\frac{dX}{dt},\quad \left(\frac{d^4\xi}{d\Delta t^4}\right)_0=\frac{d^2X}{dt^2},\ \text{u. s. w.}$$

Man hat mithin

$$\xi=\frac{dx}{dt}\Delta t+X\frac{\Delta t^2}{2}+\frac{dX}{dt}\frac{\Delta t^3}{2.3}+\ldots,$$

und

$$\Delta x=\frac{dx}{dt}\Delta t+\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\Delta t^2}{2}+\frac{d^3x}{dt^3}\frac{\Delta t^3}{2.3}+\ldots,$$

folglich

$$\xi-\Delta x=(X-\frac{d^2x}{dt^2})\frac{\Delta t^2}{2}+\frac{d}{dt}(X-\frac{d^2x}{dt^2}).\frac{\Delta t^3}{2.3}+\ldots,$$

also

$$(b)\quad U=\frac{\Delta t^4}{4}\Sigma m[(X-\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\Delta t}{3}\frac{d}{dt}(X-\frac{d^2x}{dt^2})+\ldots)^2].$$

Auch ist vermöge der Entwickelungen in §. 3. III.

$$\frac{d^2(\xi-\Delta x)}{d\Delta t^2}=X+\Delta X-\frac{d^2(x+\Delta x)}{dt^2},$$

mithin kann die dortige Formel (13), indem man zugleich die virtuellen Räume statt der virtuellen Geschwindigkeiten setzt, so dargestellt werden:

$$(16)\quad \Sigma m[\frac{d^2(\xi-\Delta x)}{d\Delta t^2}.D(x+\Delta x)]=0.$$

II. Um nun direct, nach Analogie des Gaussischen Beweises, zu zeigen, dass U kleiner ist, als wenn willkührlich von A aus, statt des wirklichen Orts C zur Zeit $t+\Delta t$, ein compatibler Punkt D, d. h. ein anderer Punkt der Trajectorie von m, genommen wird, so seien $x+Dx$, $y+Dy$, $z+Dz$ die Coordinaten von m in der Lage D, wo Dx, Dy, Dz willkührliche, aber dem Zustande des Systems zur Zeit t compatible Aenderungen der Coordinaten sind, um von A zu D überzugehen, also Grössen nach Art der in §. 3. auf diese Weise bezeichneten virtuellen Wege,

$$Dx=\delta x.\Delta t+\delta^2x.\frac{\Delta t^2}{2}+\ldots,$$

doch mit dem Unterschied, dass, gemäss den Erörterungen in Betreff des Gaussischen Beweises in §. 1., die zur Zeit t erlangten

Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}$ ebenso in Dx, wie in $\varDelta x$ und ξ stecken, d. h. dass $\delta x = \frac{dx}{dt}$ und desgleichen $\delta\omega = \frac{d\omega}{dt}$ u. s. w. zu nehmen ist. Alsdann ist aber

$$Dx - \varDelta x = \left(\delta^2 x - \frac{d^2 x}{dt^2}\right)\frac{\varDelta t^2}{2} + \left(\delta^3 x - \frac{d^3 x}{dt^3}\right)\frac{\varDelta t^3}{2.3} + \ldots,$$

und gemäss den Ausdrücken von $\frac{d^2 x}{dt^2}$, $\delta^2 x$, u. s. w. mittelst der independenten, indem man darin $\delta\omega = \frac{d\omega}{dt}$, $\delta\psi = \frac{d\psi}{dt}$, u. s. w. macht:

$$\delta^2 x - \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dx}{d\omega}\left(\delta^2\omega - \frac{d^2\omega}{dt^2}\right) + \frac{dx}{d\psi}\left(\delta^2\psi - \frac{d^2\psi}{dt^2}\right) + \ldots,$$

$$\delta^3 x - \frac{d^3 x}{dt^3} = \frac{dx}{d\omega}\left(\delta^3\omega - \frac{d^3\omega}{dt^3}\right) + \frac{dx}{d\psi}\left(\delta^3\psi - \frac{d^3\psi}{dt^3}\right) + \ldots$$

$$+ 3\left(\frac{d^2 x}{d\omega^2}\frac{d\omega}{dt} + \frac{d^2 x}{d\omega d\psi}\frac{d\psi}{dt} + \ldots\right)\left(\delta^2\omega - \frac{d^2\omega}{dt^2}\right) + \ldots,$$

u. s. w.

Nun sei

$$BD = u', \quad \Sigma m u'^2 = U',$$

so ist zu beweisen, dass

$$U' - U = \Sigma m (u'^2 - u^2) > 0.$$

Aber

$$u'^2 = (\xi - Dx)^2 + (\eta - Dy)^2 + (\zeta - Dz)^2$$
$$= [(\xi - \varDelta x - (Dx - \varDelta x))^2]$$
$$= u^2 + [(Dx - \varDelta x)^2] - 2[(\xi - \varDelta x)(Dx - \varDelta x)],$$

folglich

$$(c) \quad U' - U = \Sigma m[(Dx - \varDelta x)^2] - 2\Sigma m[(\xi - \varDelta x)(Dx - \varDelta x)];$$

und es ist $U' - U > 0$, mithin U ein Minimum, wenn das zweite Glied dieses Ausdrucks verschwindet, oder wenn

$$(17) \quad \Sigma m[(\xi - \varDelta x)(Dx - \varDelta x)] = 0;$$

denn alsdann kommt $U' - U$ auf den wesentlich positiven Ausdruck

$$\Sigma m[(Dx - \varDelta x)^2] \text{ oder } \Sigma m . \overline{CD}^2$$

zurück. Entwickelt man aber den ersten Theil der zu beweisenden Gleichung (17) mittelst der Ausdrücke von $\xi - \Delta x$, $Dx - \Delta x$ nach Δt und setzt man alle Variationen und Zeitableitungen vor die Summenzeichen, so findet sich jedes Glied mit einer Summe behaftet von der Form derjenigen, welche die eine Seite der Gleichung (9) bilden. Wenn daher das System von der Art ist, dass die virtuellen Wege endliche Grösse haben dürfen, so verschwinden, vermöge der dann giltigen Gleichung (9), alle einzelnen Glieder der Gleichung (17), was auch Δt sein mag, wofern nur die den ersten Theil derselben bildende Reihe convergirt; d. h. das Princip des kleinsten Zwangs gilt für endlich Zeitintervalle Δt, welche überdiess jede beliebige Grösse haben dürfen in dem Falle, wo die Coordinaten lineäre Functionen der independenten sind, weil dann mit den Ableitungen $\frac{d^n x}{d\omega^{n'} d\psi^{n''} ..}$ von $n=2$ an alle Glieder der Reihe ausser dem ersten verschwinden, mithin Δt keine Convergenzbedingung mehr erfüllen darf. Gestattet aber das System, was im Allgemeinen der Fall ist, bloss unendlich kleine virtuelle Wege, so gilt die Gleichung (9) bloss für $i=0$, $n=1$, oder reducirt sich auf die Gleichungen (6), vermöge deren alsdann bloss das erste Glied in der Entwickelung der Gleichung (17) nach Δt verschwindet, Δt muss also unendlich klein genommen werden, damit diese Entwickelung auf das erste Glied zurückkomme, oder (c) auf

$$(d) \quad U' - U = \frac{\Delta t^4}{4} \left\{ \Sigma m \left[\left(\frac{dx}{d\omega} (\delta^2 \omega - \frac{d^2\omega}{dt^2}) + \frac{dx}{d\psi} (\delta^2 \psi - \frac{d^2\psi}{dt^2}) + \ldots \right)^2 \right] \right.$$
$$\left. - 2 \left((\delta^2 \omega - \frac{d^2\omega}{dt^2}) \Sigma m (X - \frac{d^2\omega}{dt^2}) \frac{dx}{d\omega} + \ldots \right) \right\},$$

wobei sich zugleich die Homogeneität dieses Ausdrucks zeigt.

Die obige Entwickelung von $Dx - \Delta x$ lässt sich auch dadurch machen, dass man diese Grösse und entsprechend $D\omega - \Delta\omega = h$, $D\psi - \Delta\psi = i$, u. s. w. als Incremente von Δx und $\Delta\omega$, $\Delta\psi \ldots$ betrachtet, beim Uebergang vom Punkt C zum Punkt D; man hat alsdann

$$Dx - \Delta x = \frac{d\Delta x}{d\Delta\omega} h + \frac{d\Delta x}{d\Delta\psi} i + .. + \frac{d^2 x}{d\Delta\omega^2} \frac{h^2}{2} + \frac{d^2 \Delta x}{d\Delta\omega d\Delta\psi} hi + \frac{d^2 \Delta x}{d\Delta\psi^2} \frac{i^2}{2} + \ldots,$$

wo

$$h = D\omega - \Delta\omega = (\delta^2 \omega - \frac{d^2\omega}{dt^2}) \frac{\Delta t^2}{2} + \ldots,$$

$$i = D\psi - \Delta\psi = (\delta^2 \psi - \frac{d^2\psi}{dt^2}) \frac{\Delta t^2}{2} + \ldots;$$

u. s. w.

und, vermöge der in §. 3. angegebenen Ausdrücke von Δx mittelst $\Delta\omega$, $\Delta\psi$ ...

$$\frac{d\Delta x}{d\Delta\omega}=\frac{dx}{d\omega}+\frac{d^2x}{d\omega^2}\Delta\omega+\frac{d^2x}{d\omega d\psi}\Delta\psi+\ldots=\frac{dx}{d\omega}+(\frac{d^2x}{d\omega^2}\frac{d\omega}{dt}+\frac{d^2x}{d\omega d\psi}\frac{d\psi}{dt}+\ldots)\Delta t+\ldots$$

$$\frac{d^2\Delta x}{d\Delta\omega^2}=\frac{d^2x}{d\omega^2}+(\frac{d^3x}{d\omega^3}\frac{d\omega}{dt}+\frac{d^3x}{d\omega^2 d\psi}\frac{d\psi}{dt}+\ldots)\Delta t+\ldots,$$

$$\frac{d^2\Delta x}{d\Delta\omega\, d\Delta\psi}=\frac{d^2x}{d\omega d\psi}+(\frac{d^3x}{d\omega^2 d\psi}\frac{d\omega}{dt}+\frac{d^3x}{d\omega d\psi^2}\frac{d\psi}{dt}+\ldots)\Delta t+\ldots,$$

Formeln, die auch noch später gebraucht werden. — Man kann endlich den Uebergang vom Punkt C zu D durch Incremente $D(x+\Delta x)$ der Coordinaten $x+\Delta x$ von C andeuten, so dass dann die von D die Form haben $x+\Delta x+D(x+\Delta x)$, wo zunächst, wie in der Formel (16),

$$D(x+\Delta x)=Dx+\Delta Dx=Dx+\frac{dDx}{dt}+3\frac{d^2Dx}{dt^2}\frac{\Delta t^2}{2}+\ldots.$$

und

$$Dx=\Delta t\,\delta x+\frac{\Delta t^2}{2}\delta^2x+\ldots,$$

mithin

$$D(x+\Delta x)=\delta x.\Delta t+(\delta^2x+2\frac{d\delta x}{dt})\frac{\Delta t^2}{2}+(\delta^3x+3\frac{d\delta^2x}{dt}+3\frac{d^2\delta x}{dt^2})\frac{\Delta t^3}{2.3}+\ldots;$$

allein da in Δx bereits die Anfangsgeschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ enthalten ist, so ist, gemäss der obigen Erörterung, in Dx zu setzen $\delta x=0$, wodurch Dx und $D(x+\Delta x)$ zurückkommen auf:

$$Dx=\delta^2x\frac{\Delta t^2}{2}+\delta^3x.\frac{\Delta t^3}{2.3}+\ldots.$$

und

$$D(x+\Delta x)=\delta^2x.\frac{\Delta t^2}{2}+(\delta^3x+3\frac{d\delta^2x}{dt})\frac{\Delta t^3}{2.3}+\ldots.$$

so dass diess Grössen vom Range des Quadrats von Δt werden, und, da nun auch gleicherweise $\delta\omega=0$, $\delta\psi=0$, u. s. w. zu nehmen ist,

$$\delta^2x=\frac{dx}{d\omega}\delta^2\omega+\frac{dx}{d\psi}\delta^2\psi+\ldots,$$

$$\delta^3x=\frac{dx}{d\omega}\delta^3\omega+\frac{d^2x}{d\omega^2}\delta^2\omega^2+2\frac{d^2x}{d\omega d\psi}\delta^2\omega\delta^2\psi+\ldots,$$

u. s. w.

ist. Wenn man hiernach die Gleichung, die nun an die Stelle von (17) tritt,

$$(18)\ \Sigma m[(\xi - \varDelta x)\, D(x+\varDelta x)] = 0$$

entwickelt, so ist leicht zu sehen, dass sie, wie die Entwickelung von (15), lauter Glieder liefert, die durch die Gleichung (9), wenn diese statt findet, verschwinden; während für ein unendlichkleines $\varDelta t$ an die Stelle von (d) tritt

$$(d')\ U' - U = \frac{\varDelta t^4}{4} \left\{ \Sigma m[(\frac{dx}{d\omega}\delta^2\omega + \frac{dx}{d\psi}\delta^2\omega + \ldots)^2] \right. \left. - 2(\delta^2\omega \Sigma m[(X - \frac{d^2x}{dt^2})\frac{dx}{d\omega}] + \ldots) \right\}$$

eine homogene Formel, deren zweiter Theil vermöge der Gleichungen (6), mithin vermöge (1), verschwindet*).

III. Um nun das Minimum auch unmittelbar durch Differenzialrechnung zu behandeln, so könnten wir, ausgehend von der nach $\varDelta t$ entwickelten Form (b) der Function U, (wie in §. 2., wozu wir daselbst durch die Natur der Sache geführt wurden), nach den wirklichen Beschleunigungen differenziren und so durch Nullsetzung ihrer ersten Ableitungen nach jeder der independenten Beschleunigungen, d. h. nach den zweiten Zeitableitungen der independenten Variabeln, ebensoviele Gleichungen erhalten, als solche independente vorhanden sind. Diese sind, wenn man, wie im Allgemeinen erfordert wird, die Entwickelung nach $\varDelta t$ auf ihr erstes, mit $\varDelta t^4$ behaftetes, Glied zurückführt und

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = \omega'', \quad \frac{d^2\psi}{dt^2} = \psi'', \text{u. s. w.}$$

setzt,

$$(19)\ \Sigma m[(X - \frac{d^2x}{dt^2})\frac{d}{d\omega''}\frac{d^2x}{dt^2}] = 0,\ \Sigma m[(X - \frac{d^2x}{dt^2})\frac{d}{d\psi''}\frac{d^2x}{dt^2}] = 0, \text{u. s. w.},$$

*) Natürlich haben hier die dem Uebergang von C zu D entsprechenden Variationen nicht dieselbe Bedeutung, wie die in der Formel (d), welche den Uebergang von A zu D andeuten; unterscheidet man der Vergleichung wegen die jetzigen durch Accentuirung des δ, so ist

$$\delta'^2\omega = \delta^2\omega - \frac{d^2\omega}{dt^3}, \text{ u. s. w.}$$

und entsprechend:

$$\delta'^2x = \delta x - \frac{d^2x}{dt^2};$$

überhaupt muss, wenn man die Formeln (17) und (18) vergleicht,

$$D'(x+\varDelta x) = Dx - \varDelta x$$

identisch sein, und die gliederweise Vergleichung der Entwickelung dieser beiden Ausdrücke nach $\varDelta t$ giebt die vorhergehende und alle übrigen Relationen zwischen den Variationen δ und δ'.

d. h. die Gleichungen (6); denn, vermöge des Ausdrucks von $\frac{d^2x}{dt^2}$ mittelst der independenten, ist:

$$\frac{d}{d\omega''}\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx}{d\omega}, \quad \frac{d}{d\psi''}\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx}{d\psi}, \text{ u. s. w.}$$

Wir verfolgen aber von dieser Seite die Sache nicht weiter; denn da, wenn ω', ω''', u. s. w. ebenso die erste, dritte, u. s. w. Zeitableitung von ω vorstellt, überhaupt

$$\frac{d}{d\omega'}\frac{dx}{dt}=\frac{d}{d\omega''}\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{d\omega'''}\frac{d^3x}{dt^3}=\ldots=\frac{dx}{d\omega},$$

d. h. gleich dem ersten Gliede von $\frac{d\Delta x}{d\Delta\omega}$ ist, so weist diess auf eine allgemeinere, bereits im Vorhergehenden angedeutete Art hin, die Differenziationen anzustellen, nämlich nach den dem Zeitincrement Δt entsprechenden Incrementen $\Delta\omega$, $\Delta\psi$... der independenten Variabeln; denn diese Differenziation entspricht allgemein dem Uebergang vom Punkt C zu D, von dem in Nro. II. die Rede war, wobei wir auf die Function U in ihrer ersten, unentwickelten Gestalt (a) zurückgehen müssen.

Da bei diesem Uebergang die Punkte B, mithin die Grössen ξ ungeändert bleiben, so sind die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von der Function U nach $\Delta\omega$, $\Delta\psi$....

$$\frac{dU}{d\Delta\omega}=-2\Sigma m\left[(\xi-\Delta x)\frac{d\Delta x}{d\Delta\omega}\right], \quad \frac{dU}{d\Delta\psi}=-2\Sigma m\left[(\xi-\Delta x)\frac{d\Delta x}{d\Delta\psi}\right],$$

u. s. w.,

$$\frac{d^2U}{d\Delta\omega^2}=2\Sigma m\left[\left(\frac{d\Delta x}{d\Delta\omega}\right)^2\right]-2\Sigma m\left[(\xi-\Delta x)\frac{d^2\Delta x}{d\Delta\omega^2}\right],$$

$$\frac{d^2U}{d\Delta\psi^2}=2\Sigma m\left[\left(\frac{d\Delta x}{d\Delta\psi}\right)^2\right]-2\Sigma m\left[(\xi-\Delta x)\frac{d^2\Delta x}{d\Delta\psi^2}\right],$$

$$\frac{d^2U}{d\Delta\omega d\Delta\psi}=2\Sigma m\left[\frac{d\Delta x}{d\Delta\omega}\frac{d\Delta x}{d\Delta\psi}\right]-2\Sigma m\left[(\xi-\Delta x)\frac{d^2\Delta x}{d\Delta\omega d\Delta\psi}\right]$$

u. s. w.,

und die Bedingungen des Minimum's sind von dreierlei Art, nämlich

$$(\alpha) \quad \frac{dU}{d\Delta\omega}=0, \quad \frac{dU}{d\Delta\psi}=0, \text{ u. s. w.}$$

$$(\beta) \quad \frac{d^2U}{d\Delta\omega^2}>0, \quad \frac{d^2U}{d\Delta\psi^2}>0, \text{ u. s. w.}$$

$$(\gamma) \quad \frac{d^2U}{d\Delta\omega^2}\cdot\frac{d^2U}{d\Delta\psi^2}<\left(\frac{d^2U}{d\Delta\omega d\Delta\psi}\right)^2, \text{ u. s. w.}$$

Sie sind erfüllt, wenn

$$(20)\quad \Sigma m[(\xi-\Delta x)\frac{d\Delta x}{d\Delta\omega}]=0,\quad \Sigma m[(\xi-\Delta x)\frac{d\Delta x}{d\Delta\psi}]=0, \text{ u. s. w.}$$

$$(21)\quad \Sigma m[(\xi-\Delta x)\frac{d^2\Delta x}{d\Delta\omega^2}]=0,\quad \Sigma m[(\xi-\Delta x)\frac{d^2\Delta x}{d\Delta\omega d\Delta\psi}]=0, \text{ u. s. w.;}$$

denn alsdann kommen die zweiten Ableitungen von U auf ihre ersten Glieder zurück, die bei allen von der Form $\frac{d^2 U}{d\Delta\omega^2}$ wesentlich positiv sind, wie es die Bedingungen (β) erfordern, und das Stattfinden der Bedingungen von der Form (γ) erhellt unmittelbar durch Entwickelung ihrer Bestandtheile, indem

$$\frac{d^2 U}{d\Delta\omega^2}\cdot\frac{d^2 U}{d\Delta\psi^2}=4\,\Sigma m\Big[\Big(\frac{d\Delta x}{d\Delta\omega}\frac{d\Delta x}{d\Delta\psi}\Big)^2\Big]$$
$$+4\,\Sigma m\Big[\Big(\frac{d\Delta x}{d\Delta\omega}\frac{d\Delta y}{d\Delta\psi}\Big)^2+\Big(\frac{d\Delta x}{d\Delta\psi}\frac{d\Delta y}{d\Delta\omega}\Big)^2\Big]$$

$$\Big(\frac{d^2 U}{d\Delta\omega d\Delta\psi}\Big)^2=4\,\Sigma m\Big[\Big(\frac{d\Delta x}{d\Delta\omega}\frac{d\Delta x}{d\Delta\psi}\Big)^2\Big]$$
$$+8\,\Sigma m\Big[\frac{d\Delta x}{d\Delta\omega}\frac{d\Delta y}{d\Delta\psi}\frac{d\Delta x}{d\Delta\psi}\frac{d\Delta y}{d\Delta\omega}\Big],$$

wonach die Sache auf den Satz $a^2+b^2>2ab$ hinausläuft. Entwikkelt man aber die ersten Theile der nun noch zu erweisenden Gleichungen (20), (21) nach Δt vermöge obiger (Nro. II.) Entwickelungen der Ableitungen $\frac{d\Delta x}{d\Delta\omega}$ u. s. w. und der Grössen $\xi-\Delta x$, so befinden sich wiederum in allen Gliedern, (nach gehöriger Absonderung der von den Summationen unabhängigen Factoren) Summen, deren allgemeine Form in der Gleichung (9) enthalten ist; die Gleichungen (20), (21) gelten mithin unabhängig von der Grösse des Zeitintervalls Δt, wenn alle diese Summen vermöge der Gleichung (9) verschwinden. Wenn aber diese bloss für $i=0$, $n=1$ gilt, so ist das Zeitintervall unendlich klein zu nehmen, wie die virtuellen Wege, und die, desshalb auf ihre ersten Glieder zurückgeführten, Gleichungen (20) sind einerlei mit den Gleichungen (6); die Gleichungen (21) dagegen, deren erste Glieder die Summen

$$\Sigma m[(X-\frac{d^2x}{dt^2})\frac{d^2x}{d\omega^2}],\ \Sigma m[(X-\frac{d^2x}{dt^2})\frac{d^2x}{d\psi^2}], \text{ u. s. w.}$$

enthalten, gelten zwar dann nicht mehr, weil hier $n=2$ in der Formel (9) zu nehmen wäre, sind aber diessfalls zur Erfüllung der Bedingungen (β), (γ) auch nicht mehr nöthig, weil die zweiten Theile in den Ausdrücken der zweiten Ableitungen von U wegen des Unendlichkleinen von selbst wegfallen; denn es kommt alsdann z. B. $\frac{d^2 U}{d\Delta\omega^2}$ auf

$$\frac{d^2 U}{d\Delta\omega^2}=2\,\Sigma m\Big[\Big(\frac{dx}{d\omega}\Big)^2\Big]-\Delta t^2\,\Sigma m\Big[\Big(X-\frac{d^2x}{dt^2}\Big)\frac{d^2x}{d\psi^2}\Big]$$

zurück, mithin, wegen $\Delta t = \frac{1}{\infty}$, auf $2\Sigma m\left[\left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2\right]$, und ebenso die übrigen.

§. 5.

Hier betrachten wir noch das Princip des kleinsten Zwangs im Falle des Gleichgewichts.

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten liefert, wenn die Kräfte, deren Axenprojectionen X, Y, Z sind, selbst an dem System sich Gleichgewicht halten sollen, die Gleichung

$$(\alpha)\quad \Sigma m[XDx] = 0,$$

woraus man, wenn Dx endlicher Werthe fähig ist, die Formeln

$$(\beta)\ \Sigma m[X\delta^n x] = 0,\ \Sigma m\left[X\frac{d^n x}{d\omega^{n'}d\psi^{n''}\ldots}\right] = 0,\ \Sigma m\left[\frac{d^i x}{dt^i}\frac{d^n x}{d\omega^{n'}d\psi^{n''}\ldots}\right] = 0$$

zieht, wovon man die letztere aus der vorhergehenden erhält durch Differenziation nach einer Variabeln t, wovon alle andern als Functionen betrachtet werden, oder auch, was auf dasselbe hinausläuft, durch Differenziation nach der Characteristik δ (nur dass dann $\delta^i X$ für $\frac{d^i X}{dt^i}$ zu setzen ist), und die im Allgemeinen auf

$$(\gamma)\ \Sigma m[X\delta x] = 0;\ \Sigma m\left[X\frac{dx}{d\omega}\right] = 0,\ \Sigma m\left[X\frac{dx}{d\psi}\right],\ \text{u. s. w.}$$

zurückkommen, wovon letztere in der Anzahl der geometrischen independenten vorhanden sind, mithin die Gleichgewichtslage vollkommen bestimmen. Es ist nun zu zeigen, wiefern diese Gleichungen auch diessfalls ein Minimum des Zwangs ausdrücken, was auf ganz ähnliche Weise, wie in §. 4. geschehen kann.

Seien x, y, z die Coordinaten von m in der Gleichgewichtslage A, $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ oder x', y', z' in der Lage B, wohin M von A aus gelangt, wenn es sich, wie alle andere Punkte des Systems, aus der Gleichgewichtslage frei unter dem Einfluss der an ihm wirkenden Kräfte X, Y, Z bewegt; endlich $x+Dx$, $y+Dy$, $z+Dz$ in der Lage D, in die es von A aus gelangt bei einer willkührlichen, dem Systemverbande compatibeln, Verrückung sämmtlicher Punkte des Systems, oder vielmehr in die es von A aus, wenn das Gleichgewicht gestört wird, während des Zeitintervalls Δt, in welchem es frei nach B käme, bei seiner Verbindung mit den übrigen Punkten des Systems wirklich sich bewegt, (so dass man auch Δx, Δy, Δz für Dx, Dy, Dz setzen könnte) Setzt man wieder

$$AB = u,\ \Sigma mu^2 = U,$$

so dass U die Function ist, die ein Minimum sein soll, wenn die Gleichungen (β) oder (γ) gelten; ebenso, wenn der Punkt D an die Stelle von A tritt,

$$BD = u',\ \Sigma mu'^2 = U',$$

so ist

$$u^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

$$u'^2 = [(\xi - Dx)^2] = u^2 + [Dx^2] - 2[\xi Dx]:$$

mithin

$$(a)\quad U = \Sigma m[\xi^2], \text{ oder } U = \Sigma m[(x' - x)^2],$$

und

$$(b)\quad \begin{cases} U' - U = \Sigma m[Dx^2] - 2\Sigma m[\xi Dx] > 0, \\ \text{d. h. } \Sigma m[\xi Dx] = 0 \end{cases}$$

die Bedingung des Minimums von U. Oder wenn man U n der zweiten Form nach den independenten $\omega, \psi \ldots.$ differenzirt, wobei bloss die Coordinaten x des Punkts A sich ändern, während die Coordinaten x' des Punkts B ungeändert bleiben (wie in dem Beispiel §. 2. III.), so hat man in

$$(c)\quad \begin{cases} \frac{dU}{d\omega} = -2\,\Sigma m[\xi\frac{dx}{d\omega}] = 0, \frac{dU}{d\psi} = -2\,\Sigma m[\xi\frac{dx}{d\psi}] = 0, \text{ u. s. w.} \\ \frac{d^2U}{d\omega^2} = 2\Sigma m\,[(\frac{dx}{d\omega})^2] - 2\Sigma m\,[\xi\frac{d^2x}{d\omega^2}] > 0, \text{u. s. w.} \\ \frac{d^2U}{d\omega^2}\cdot\frac{d^2U}{d\psi^2} > (\frac{d^2U}{d\omega d\psi})^2, \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

das System der Minimumsbedingungen. Da nun $\frac{dx}{dt} = 0$, mithin auch $\delta x = 0$, so hat man zur Entwickelung dieser Ausdrücke die Werthe

$$\xi = X.\frac{\Delta t^2}{2} + \frac{dX}{dt}.\frac{\Delta t^3}{2.3} + \ldots.,$$

$$Dx = \delta^2 x.\frac{\Delta t^2}{2} + \delta^3 x.\frac{\Delta t^3}{2.3} + \ldots.,$$

wo $\delta^2 x$, $\delta^3 x$, u. s. w., weil auch $\delta\omega = \delta\psi = \ldots = 0$, dieselben Werthe haben, wie in der letzten Entwickelung in §. 4. II., nämlich

$$\delta^2 x = \frac{dx}{d\omega}\delta^2\omega + \frac{dx}{d\psi}\delta^2\psi + \ldots.,$$

$$\delta^3 x = \frac{dx}{d\omega}\delta^3\omega + \frac{d^2x}{d\omega^2}\delta^2\omega^2 + 2\,\frac{d^2x}{d\omega d\psi}\,\delta^2\omega\delta^2\psi + \ldots.$$

u. s. w. Vermöge dieser Ausdrücke erhellt aber, dass, mag Δt endlich oder unendlich klein zu nehmen sein, die Minimumsbedingungen in der einen (b), wie in der andern Form (c) durch die Gleichgewichtsbedingungen (β) oder (γ) sich rechtfertigen.

Schlussbemerkung.

Mit Vorstehendem glaube ich das Princip des kleinsten Zwangs nach allen Seiten erörtert zu haben; ich musste mich dabei zugleich in eine Erörterung über das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten einlassen, die darin hauptsächlich von den gebräuchlichen Darstellungen abweicht, dass ich bei den virtuellen Bewegungen immer zwischen den virtuellen Räumen und Geschwindigkeiten (man kann beifügen: Beschleunigungen) unterschieden und gezeigt habe, dass von diesem Gesichtspunkt aus ein wesentlicher Unterschied in der Entwickelung der Bewegungsgleichungen eintritt für die beiden Fälle, einmal denjenigen, wo die virtuellen Räume endlich sein dürfen, alsdann den, wo sie unendlich klein sein müssen. Man pflegt die virtuellen Bewegungen, die man einem System ertheilt, ins Gebiet der Variationsrechnung zu ziehen; ich glaube behaupten zu dürfen, dass nur bei obiger Darstellung die strengen, dem Geiste der Functionentheorie angepassten Begriffe der Variationsrechnung in Anwendung kommen, wie sie namentlich Ohm in seinen Schriften auseinandersetzt. Diese Methode besteht übrigens nicht im Verbannen des Unendlichkleinen, sondern in der strengen und folgerichtigen analytischen Behandlung desselben.

XXXVII.

Untersuchungen über den sogenannten berganlaufenden Doppelkegel.

Von dem

Herrn Professor Dr. F. Stegmann

an der Universität zu Marburg.

Die bekannte, in jedem Cursus über Experimentalphysik erwähnte und öfters als mechanisches Paradoxon aufgeführte Erscheinung, dass ein Doppelkegel auf zwei divergirenden Stützen durch selbstständige Rotation in die Höhe läuft, bietet sowohl in geometrischer als mechanischer Hinsicht mehrere interessante Fragen dar, und es existiren darüber auch bereits zwei Abhandlungen in den Schriften der Petersburger Akademie, die eine von Kraft (Novi Comment. Acad. Petropol. Tom. VI. p. 389.), die andere von Kononoff (Nova Acta Acad. Petrop. Tom. VII. p. 229.). Allein

die erste erklärt eben nur, mit nicht geringer Weitläuftigkeit, warum die gedachte Bewegung vor sich gehen müsse, und dass das Aufsteigen nur ein scheinbares sei, und ist selbst in diesem Wenigen nicht frei von Irrthümern; die zweite genannte Arbeit dagegen, welche hauptsächlich in mechanischer Hinsicht die nöthigen Formeln zu entwickeln bestimmt war, ist durch einen fundamentalen Fehler, wie sich später (§. 16.) zeigen wird, so sehr missrathen, dass man nicht anstehen darf, sie als ganz unbrauchbar zu bezeichnen. Unter diesen Umständen möchten die nachstehenden Untersuchungen, welche vorzugsweise über die bei dieser Bewegung sich darbietenden geometrischen Fragen Aufschluss geben sollen, manches neue und vielleicht überraschende Resultat liefern.

§. 1.

Es mögen in Fig. 1. die beiden congruenten Trapeze $AEGB$ und $AEHC$ die Unterlage vorstellen, von welcher der Doppelkegel während seiner Bewegung getragen wird, und zwar sollen die Geraden AB und AC die beiden scharfen Kannten sein, mit deren einzelnen Punkten die Kegelflächen successiv in Berührung treten. Die drei Kanten AE, BG, CH denken wir uns vertikal, die beiden unteren EG und EH horizontal; und was die Länge dieser Kanten anbelangt, so wollen wir $EG = EH$ so gross denken, dass GH gleich der Axe des Doppelkegels wird. Nach der Voraussetzung werden die Kanten AB und AC von A an in die Höhe laufend unter einem gewissen Winkel gegen die Horizontalebene geneigt sein, und als Maass dieser Neigung soll uns im Folgenden der Winkel dienen, welchen eine dieser Kanten mit einer durch A aufwärts gezogenen Vertikallinie bildet, nämlich W. $JAB = ABG = r$. Im Uebrigen ergiebt sich aus diesen Bestimmungen von selbst, dass die Verbindungslinie der Punkte B und C horizontal liegen und ebenfalls der Axe des Doppelkegels gleich sein wird.

Auf diese Unterlage soll nun der aus zwei congruenten, gemeinen und von gleichartiger Materie erfüllten Kegeln zusammengesetzte Doppelkegel gelegt werden, entweder so, dass er mit einem in der Peripherie der gemeinschaftlichen Basis gelegenen Punkte sich auf den Vereinigungspunkt der Kanten AB und AC stützt, oder auch so wie ihn die Fig. 1. darstellt, nämlich dass jede Hälfte für sich in einem Punkte T resp. U auf den genannten Kanten ruht. Mag man aber die eine oder andere Lage als die anfängliche wählen, in jedem Falle haben wir als fundamentale Voraussetzung dieser Untersuchung anzunehmen, dass der gemeinschaftliche Grundkreis in diejenige vertikale Ebene falle, welche durch die Halbirungslinie des W. BAC hindurchgeht und welche wir in Zukunft der Kürze wegen die mittlere Vertikalebene nennen wollen. Und aus dieser Annahme in Verbindung mit dem, was über die Stellung der Unterlage festgesetzt worden ist, folgt sogleich, dass die Axe des Doppelkegels horizontal liegt und dass überhaupt auf beiden Seiten der mittleren Vertikalebene vollkommene Symmetrie Statt finden muss.

§. 2.

Man verbinde jetzt die beiden Berührungspunkte T und U durch eine Gerade, welche in W durch die Ebene des Grundkreises hindurchgeht; und ziehe von W eine Gerade WM nach dem Mittelpunkte des Grundkreises, so kommt es zunächst darauf an ob diese Gerade etwa vertikal steht, oder rückwärts geneigt ist, so dass sie gegen die durch A aufwärts gezogene Vertikallinie AJ convergirt, oder ob sie vorwärts geneigt ist, nämlich von AJ divergirt. In dem letzteren Falle wird die sogenannte berganlaufende Bewegung des Doppelkegels vor sich gehen, und zwar so, dass die im vorhergehenden §. für die ursprügliche Stellung angenommene Symmetrie auf beiden Seiten der mittleren Vertikalebene sich fortwährend erhält. Denn wegen der vorausgesetzten Homogeneität der beiden Hälften des Doppelkegels wird sein Schwerpunkt in den Mittelpunkt seines Grundkreises fallen, und sobald man daher in Gedanken die Berührungspunkte T und U mit M verbindet und sich die ganze Masse des Doppelkegels in M vereinigt vorstellt, so sind die Umstände in statischer Hinsicht dieselben, als wenn ein gleichschenkliges Dreieck TMU ohne eigene Schwere, jedoch in seiner Spitze M durch ein Gewicht beschwert, um seine horizontal gestellte Grundlinie TU als Umdrehungsaxe zu rotiren anfängt, und bei einer solchen Rotation muss die Linie MW offenbar in der mittleren Vertikalebene bleiben.

Die eben aufgestellte Bedingung für das Aufwärtsrollen des Doppelkegels kann aber noch auf eine andere und sich unmittelbar auf die gegebenen Grössenverhältnisse beziehende Art ausgedrückt werden. Da nämlich sowohl TU als auch die Axe PQ beide senkrecht auf der mittleren Vertikalebene stehen, so lässt sich durch diese beiden Geraden eine Ebene legen, welche die Peripherie des Grundkreises in irgend einem Punkt S durchschneiden wird, so dass MWS ein Halbmesser des Grundkreises ist. Die gedachte Ebene enthält nun zugleich die zwei mit der Unterlage in Berührung stehenden Kegelseiten PTS und QUS, und soll deshalb der Berührungs-Axenschnitt heissen. Da aber die Kante AT der Natur der Sache nach eine im Punkt T an die Kegelfläche gezogene Tangente ist, so wird die Ebene des $\Delta\, AST$ die der Kegelseite PS entsprechende tangirende Ebene sein und demgemäss auf dem Berührungs-Axenschnitt senkrecht stehen. Und da die mittlere Vertikalebene ASM gleichfalls auf dem Berührungs-Axenschnitt senkrecht steht, so folgt, dass AS im Punkte S senkrecht auf der Ebene des Berührungs-Axenschnitts stehen, dass also auch W. ASM ein Rechter sein muss, d. h. dass AS zugleich die Peripherie des Grundkreises in S tangirt. Die Bedingung, dass MW vorwärts geneigt sei, bringt demnach als nothwendige Folge mit sich, dass die Gerade AS von A an in Beziehung auf den Horizont abwärts laufe.

Dieses Verhältniss ist anschaulich gemacht bei der projektivischen Zeichnung in Fig. 2., in welcher die Punkte A, E, M, W, S die nämlichen sind wie in Fig. 1., während die Geraden Eg und AN die Projektionen der Kanten EG und AB auf die mittlere Vertikalebene und AD eine in derselben Ebene gezogene Horizon-

tallinie vorstellen. Wenn nämlich hier die Richtung des Halbmessers SM von der Vertikallinie AJ divergiren, der W. ASM aber ein Rechter sein soll, so muss augenscheinlich AS von A an **abwärts** laufen, nämlich W. $NAS > NAD$ sein. Und umgekehrt, so oft dies der Fall ist, wird die sogenannte berganlaufende Bewegung des Doppelkegels vor sich gehen.

§. 3.

Bevor wir jedoch den analytischen Ausdruck für diese Bedingung zu entwickeln suchen, scheint es nöthig erst die Behauptung festzustellen, dass, wo sich auch immer der Doppelkegel während seiner fortrollenden Bewegung befinden mag, d. h. wie gross auch die Entfernungen $AT = AU$ sein mögen, stets die Richtung der Linie AS dieselbe bleibt, nämlich dass alle Punkte, wie S und S', in einer einzigen Geraden gelegen sind. **Kraft** (in der oben angeführten Abhandlung §. 8. S. 396. Z. 6.) nimmt zwar ohne Weiteres an, der Weg, welchen der Schwerpunkt M während der Bewegung des Doppelkegels beschreibt, sei eine gerade Linie, was mit unserer gegenwärtigen Behauptung ziemlich zusammenfällt, allein die Annahmen dieses Akademikers bei der vorliegenden Untersuchung waren etwas voreilig und, wie wir demnächst sehen werden, zum Theil irrig, und im gegenwärtigen Fall könnte man füglich fragen, warum denn nicht etwa der geometrische Ort der Schwerpunkte M, M' u. s. f. irgend eine in der mittleren Vertikalebene liegende Curve sein könnte. Dieser mögliche Zweifel scheint vielmehr erst durch folgende Betrachtung seine Erledigung zu finden. Wenn zwei congruente Kegelflächen P und P', deren Axen PM und $P'M'$ parallel laufen, von einer Geraden TT' berührt werden, und zwar so, dass die Berührungspunkte T, T' auf der nämlichen Seite einer durch die Axen gelegten Ebene liegen*), so müssen, wie man leicht einsehen wird, **die Berührungs-Axenschnitte so wie die berührten Kegelseiten** PT **und** $P'T'$ **einander parallel sein.** Hieraus folgt nun, dass während der rollenden Bewegung des Doppelkegels sämmtliche berührte Kegelseiten auf jeder Seite der mittleren Vertikalebene in einer Ebene ATS beziehungsweise AUS gelegen sind, und dass also der geometrische Ort der Punkte S, S' u. s. f. nichts Anderes ist, als **die Durchschnittslinie dieser beiden**

---

*) Wenn die gemeinschaftliche Tangente TT' zwischen beiden Kegeln hindurchgeht, so dass die Berührungspunkte sich auf verschiedenen Seiten einer durch die Axen hindurchgelegten Ebene befinden, so gilt dieser Satz nicht. Im andern Falle aber überzeugt man sich von seiner Richtigkeit, sobald man durch T eine Gerade TW parallel zur Axe und ausserdem die auf der tangirenden Ebene ATS senkrecht stehende und die Axe schneidende (in der Fig. 1. jedoch nicht gezeichnete) Normallinie Tx zieht, und ganz dieselben Constructionen am Punkte T' vornimmt. Mit Hülfe der Voraussetzungen ergiebt sich dann sogleich, dass an der von den Geraden TA, TW, Tx gebildeten dreiseitigen Ecke die drei ebenen Winkel gleich sind denen an der entsprechenden, aus $T'A, T'W'$, $T'x'$ gebildeten Ecke, und dass also, weil ATW und $AT'W'$ in einer Ebene liegen, die Ebenen $WTxP$ und $W'T'x'P'$ parallel sein müssen.

tangirenden Ebenen. — Und da sämmtliche Halbmesser SM, $S'M'$ u. s. f. auf dieser Geraden AS senkrecht stehen, so muss der Weg des Schwerpunkts allerdings eine mit AS parallele Gerade sein. Diese Gerade MM' muss übrigens verlängert in den Halbirungspunkt N der Linie BC auslaufen, denn weil wir in §. 1. BC gleich der Axe PQ gemacht haben, so ist die äusserste Grenze, bei welcher der Doppelkegel von den Kanten AB und AC unterstützt zu werden aufhört, dann erreicht, wenn die Scheitel P und Q sich in B resp. C befinden, und bei dieser Lage müsste der Schwerpunkt M in N anlangen. Freilich werden wir demnächst sehen, dass der Doppelkegel durch seine rollende Bewegung diese Grenze streng genommen niemals erreichen kann.

§. 4.

Es sei nun die Axe des Doppelkegels $PQ = 2h$, der Durchmesser des Grundkreises $= 2a$, der Winkel $PSQ = 2\vartheta$, so dass $\frac{h}{a} = \operatorname{tang}\vartheta$ ist.

Ferner sei der Winkel zwischen den Kanten AB und AC gleich 2η und der Winkel, welchen eine durch A gezogene Vertikallinie AJ mit einer dieser Kanten bildet, nämlich $JAB = JAC = \Gamma$.

Mittelst der vier von einander unabhängigen, gegebenen Grössen h, a, η, Γ werden sich nun alle übrigen constanten Grössen bestimmen lassen.

Um zuvörderst den Neigungswinkel zwischen den Ebenen $ABGE$ und $ACHE$ zu bestimmen, welchen wir durch $2E$ bezeichnen wollen, und welcher zugleich die Horizontalprojection des W. BAC angiebt, hat man aus dem Dreieck GEH

$$2h = 2EG \,.\, \sin E;$$

aber aus dem Dreieck BAC ergiebt sich

$$2h = 2AB \,.\, \sin\eta;$$

folglich ist $\sin E = \frac{AB}{EG} \cdot \sin\eta$, d. h.

$$(1) \quad \sin E = \frac{\sin\eta}{\sin\Gamma}.$$

Um ferner die Richtung der Geraden ASZ zu finden, wobei wir in Betreff des Endpunkts Z annehmen wollen, dass $NZ \parallel MS$ ein von N auf AS gefälltes Perpendikel sei, so liefert uns das $\Delta\, ABN$ den Werth $AN = h \operatorname{cotg}\eta$, also erhalten wir aus dem $\Delta\, ANZ$, welches sich in seiner wahren Gestalt in Fig. 2. zeigt,

$$(2) \quad \sin NAZ = \frac{a}{h \operatorname{cotg}\eta} = \frac{\operatorname{tang}\eta}{\operatorname{tang}\vartheta}.$$

Die Winkel 2η und 2ϑ können zwar jeden beliebigen Werth zwischen den Grenzen 0 und π erhalten, so dass η und ϑ belie-

bige, jedoch spitze Winkel sind, und höchstens kann $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ sein, in so fern man die Untersuchung auf einen rollenden Cylinder auszudehnen beabsichtigt; in jedem Falle aber erfordert die Natur unserer Aufgabe, dass $\vartheta > \eta$ sei. Denn wenn wir unserer vorigen Bezeichnung gemäss unter $2E$ die Horizontalprojection des W. 2η verstehen, und uns auch den Doppelkegel auf eine durch A gelegte Horizontalebene projicirt denken, so leuchtet sogleich ein, dass $2\vartheta > 2E$ sein muss, denn sonst könnte der Doppelkegel gar nicht von den Kanten AB und AC getragen werden, er würde vielmehr, wenn man ihn so auf die Unterlage legen wollte, dass er mit der Peripherie seines Grundkreises durch A hindurchginge, sich um diesen Punkt A herumdrehen, so dass sein Schwerpunkt in der Ebene des mittleren Vertikalschnitts einen Kreisbogen um den Mittelpunkt A beschriebe, und würde auf diese Art zwischen den Kanten AB und AC geradezu hindurchfallen. Nun ist aber, wie man aus (1) ersieht, die Projection $2E$ grösser als der projicirte Winkel 2η und nur im Falle, wenn $\Gamma = \frac{1}{2}\pi$ ist, sind beide gleich, folglich muss jedenfalls $2\vartheta > 2\eta$ sein. Demnach ist in allen Fällen der Quotient $\frac{\tang \eta}{\tang \vartheta} < 1$ und wegen (2) W. $NAZ < \frac{1}{2}\pi$. Dass übrigens dieser Winkel gar nicht von Γ abhängt, ist sehr begreiflich, weil die Figur 1., nämlich die Unterlage sammt dem darauf gelegten Doppelkegel, bei A festgehalten und in den Punkten B und C erhoben oder herabgesenkt werden könnte, ohne dass sich der W. NAZ ändern würde.

§. 5.

Zunächst kommt es jetzt auf den Winkel NAD (Fig. 2.) an, welchen die Gerade AN mit der durch A in der mittleren Vertikalebene gezogenen Horizontallinie AD macht.

Durch Vergleichung der Fig. 2. mit Fig. 1. ersieht man aber, dass ND nichts Anderes ist, als die vertikale Erhebung des Punkts B über den Punkt A, folglich

$$ND = AB . \cos \Gamma;$$

ferner ist

$$AN = AB . \cos \eta,$$

folglich

$$(3) \quad \sin NAD = \frac{\cos \Gamma}{\cos \eta}.$$

Dieser Winkel ist natürlich unabhängig von ϑ. Am Schluss des §. 2. hatten wir aber gefunden, dass die vorwärts rollende Bewegung dann Statt finden müsse, und auch nur dann Statt finden könne, wenn W. $NAZ > NAD$ ist. Es kommt daher, den Formeln (2) und (3) zu Folge, darauf an, ob

$$\frac{\tang \eta}{\tang \vartheta} \gtreqless \frac{\cos \Gamma}{\cos \eta},$$

d. h.

$$(4) \quad \sin\eta \gtreqless \tang\vartheta\cos\Gamma$$

ist. Je nachdem nämlich die gegebenen Winkel ϑ, η, Γ in einem solchen Verhältniss zu einander stehen, dass hier entweder das obere Zeichen, oder das mittlere oder das untere Realität hat, wird beziehungsweise der Doppelkegel sich vorwärts von A gegen N bewegen, oder im Gleichgewicht liegen bleiben, oder rückwärts gegen A hin rollen.

Da $\sin\eta$ übrigens, wie bereits im vorigen §. bemerkt worden, der Natur der Sache nach kleiner als $\sin\vartheta$, also $1 > \frac{\sin\eta}{\sin\vartheta}$ sein muss, so kann man wegen (4) auch sagen: Sobald der Doppelkegel von selbst vorwärts rollt, muss

$$(5) \quad 1 > \frac{\cos\Gamma}{\cos\vartheta},$$

d. h. ϑ kleiner als Γ sein, — welcher Satz jedoch nun nicht mehr umgekehrt werden kann. Den W. Γ setzen wir natürlich bei dieser Untersuchung als spitz, höchstens $= R$, voraus, weil, wenn Γ ein stumpfer Winkel wäre, von einer berganlaufenden Bewegung gar nicht mehr die Rede sein könnte.

Endlich bemerke man noch, dass je nachdem in (4) das obere, mittlere oder untere Verbindungszeichen gilt, auch

$$\frac{BN}{AB} \gtreqless \frac{h}{a}\cos\Gamma,$$

d. h.

$$a \gtreqless AB \,.\, \cos\Gamma$$

ist. Und weil $AB \,.\, \cos\Gamma$ die vertikale Erhöhung des Punkts B über dem Punkte A angiebt, so lässt sich die vorige Bedingung auch so aussprechen: Der Doppelkegel wird vorwärts oder rückwärts rollen oder stillstehen, je nachdem die vertikale Erhebung des Punkts B über den Punkt A, nämlich die Linie ND in Fig. 2., kleiner oder grösser oder gleich ist dem Halbmesser des Grundkreises. Noch bequemer freilich ersieht man dies Ergebniss aus der Beschaffenheit der rechtwinkligen Dreiecke ANZ und AND, welche die Hypotenuse gemeinschaftlich haben, und in denen also W. $NAZ \gtreqless NAD$ sein wird, je nachdem $\left.\begin{matrix} NZ \\ a \end{matrix}\right\} \gtreqless ND$ ist.

§. 6.

Wenn $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ wäre, nämlich wenn anstatt eines Doppelkegels ein Cylinder vom Durchmesser $2a$ auf die beiden Kanten der Unterlage gelegt würde, so hätte man $\sin\eta\cotg\vartheta = 0$, und es könnte also gar nicht, wie der Bedingung (4) zu Folge für eine aufsteigende Bewegung verlangt wird, $\sin\eta\cotg\vartheta > \cos\Gamma$ sein, sondern

es ist, wenn dabei Γ von $\frac{1}{2}\pi$ verschieden angenommen wird, $\sin\eta \operatorname{cotg}\vartheta < \cos\Gamma$, d. h. ein Cylinder wird auf der Unterlage abwärts gegen A hin rollen, und nur für $\Gamma = \frac{1}{2}\pi$ ist $\sin\eta \operatorname{cotg}\vartheta = \cos\Gamma = 0$, nämlich wenn die Kanten der Unterlage horizontal gestellt sind, so bleibt der Cylinder im Gleichgewicht auf denselben liegen.

Wenn man dagegen einen wirklichen Doppelkegel vor sich hat, wobei also $\vartheta < \frac{1}{2}\pi$ ist, so ersieht man aus (4), dass bei ungeändertem η durch Verkleinerung von Γ, d. h. durch steilere Erhebung der Kanten AB und AC, leicht die Möglichkeit der aufwärts rollenden Bewegung aufgehoben und der Zustand des Gleichgewichts herbeigeführt werden könne, weil nämlich, wie bereits in §. 4. bemerkt worden, $\frac{\sin\eta}{\operatorname{tang}\vartheta}$ jedenfalls $\overline{<}1$ ist. Und ferner, sobald dieser Zustand des Gleichgewichts eingetreten ist, so wird bei unverändertem Γ und ϑ bloss durch Vergrösserung des W. 2η wieder die aufwärts rollende Bewegung veranlasst werden, welche Folgerungen man bekanntlich durch das Experiment leicht bestätigt.

Im Uebrigen könnte man für jede beliebige Grösse der gegebenen W. ϑ, Γ, η die Winkel NAZ und NAD nach (2) und (3) berechnen, und wenn dabei $NAZ > NAD$ ausfällt, so würde dem §. 3. zu Folge eine mit AZ im Abstande $MS = M'S' = a$ parallel gezogene Gerade MN den abwärts geneigten Weg darstellen, in welchem während der aufwärts rollenden Bewegung des Doppelkegels sein Schwerpunkt allmählig herabsinkt.

§. 7.

Auch lässt sich jetzt schon das statische Moment bestimmen, durch welches bei einer beliebigen Position des Doppelkegels seine vorwärts rotirende Bewegung verursacht wird. Ziehen wir nämlich (Fig. 2.) durch W und M die Vertikallinien Wr und $M\sigma$ und durch M die Horizontallinie $M\alpha$ und setzen W. $DAZ = NAZ - NAD = \omega$ und die Masse des Doppelkegels $= 2P$, so ist auch W. $MWr = \omega$, also das statische Moment $= 2P . MW . \sin\omega$.

Hierbei kann man die veränderliche Grösse MW leicht durch die Variable AT (Fig. 1.) ausdrücken. Denn die ähnlichen Dreiecke WMN und NZA in Fig. 2. liefern sogleich die Proportion

$$\frac{MW}{NZ} = \frac{WN}{AN} = \frac{AN - AW}{AN},$$

und anstatt dieser kann man, wie aus Fig. 1. erkannt wird, setzen

$$\frac{MW}{a} = \frac{AB - AT}{AB};$$

also ist, wenn man für a und AB die Werthe $h \operatorname{cotg}\vartheta$ und $\frac{h}{\sin\eta}$ benutzt,

$$6)\quad MW = (AB - AT)\frac{\sin\eta}{\operatorname{tang}\vartheta}.$$

Um aber den W. ω durch die gegebenen Grössen auszudrücken, könnte man zuvörderst aus (2) und (3) $\cos NAZ$ und $\cos NAD$ suchen und dann

$$\sin(NAZ-NAD) \text{ und } \cos(NAZ-NAD)$$

entwickeln. Es ist jedoch für die Folge bequemer, statt des Winkels η seine Projection E einzuführen, dann wird nämlich wegen (1), (2), (3)

$$\sin\eta = \sin E \sin\Gamma,$$

$$\cos\eta = \sqrt{1-\sin E^2 \sin\Gamma^2},$$

$$(7)\quad \sin NAZ = \frac{\sin E \sin\Gamma \operatorname{cotg}\vartheta}{\sqrt{1-\sin E^2 \sin\Gamma^2}}, \cos NAZ = \frac{\sqrt{\sin\vartheta^2 - \sin E^2 \sin\Gamma^2}}{\sin\vartheta\sqrt{1-\sin E^2 \sin\Gamma^2}}.$$

$$(8)\quad \sin NAD = \frac{\cos\Gamma}{\sqrt{1-\sin E^2 \sin\Gamma^2}}, \cos NAD = \frac{\cos E \sin\Gamma}{\sqrt{1-\sin E^2 \sin\Gamma^2}}$$

und deshalb

$$(9)\quad \sin\omega = \frac{\frac{1}{2}\sin 2E \cos\vartheta \sin\Gamma^2 - \cos\Gamma\sqrt{\sin\vartheta^2 - \sin E^2 \sin\Gamma^2}}{\sin\vartheta(1-\sin E^2 \sin\Gamma^2)},$$

$$\cos\omega = \frac{\sin\Gamma[\sin E \cos\Gamma \cos\vartheta + \cos E\sqrt{\sin\vartheta^2 - \sin E^2 \sin\Gamma^2}]}{\sin\vartheta(1-\sin E^2 \sin\Gamma^2)}$$

oder auch, wenn man Zähler und Nenner dieser Ausdrücke durch $\sin\Gamma^2 \sin\vartheta$ dividirt, und die Quotienten $\frac{1}{\sin\Gamma^2}$ und $\frac{1}{\sin\vartheta^2}$ durch Cotangenten ausdrückt,

$$(10)\quad \sin\omega = \frac{\sin E \cos E \operatorname{cotg}\vartheta - \operatorname{cotg}\Gamma\sqrt{\cos E^2 + \operatorname{cotg}\Gamma^2 - \sin E^2 \operatorname{cotg}\vartheta^2}}{\cos E^2 + \operatorname{cotg}\Gamma^2}$$

$$\cos\omega = \frac{\sin E \operatorname{cotg}\Gamma \operatorname{cotg}\vartheta + \cos E\sqrt{\cos E^2 + \operatorname{cotg}\Gamma^2 - \sin E^2 \operatorname{cotg}\vartheta^2}}{\cos E^2 + \operatorname{cotg}\Gamma^2}$$

§. 8.

Wir haben im Vorhergehenden diejenige Stellung des Doppelkegels, wenn er gerade über den Vereinigungspunkt der beiden Kanten AB und AC gelegt wird, absichtlich noch nicht als die ursprüngliche bezeichnet, weil diese Stellung in der That eine etwas genauere Besprechung verdient. Bei dem ersten Anblick mag es nämlich scheinen, als wenn in dieser anfänglichen Stellung der Schwerpunkt des Doppelkegels sich vertikal über dem gedachten Vereinigungspunkte der Kanten befinden müsse und dass man nur, weil alsdann theoretisch betrachtet Gleichgewicht Statt finden würde, durch einen kleinen Druck u. dgl. ein wenig nachzuhelfen

brauchte, um sogleich die fortrollende Bewegung zur Erscheinung zu bringen. Diese Ansicht finden wir denn auch ausgesprochen in der angeführten Abhandlung von Kraft*) durch die Worte: Huic puncto concursus immineat verticaliter centrum gravitatis rotae aut centrum basium circularium conjunctarum quod sit D, — in Verbindung mit der schon früher angeführten Stelle**): Durante igitur hoc motu centrum gravitatis descripsit lineam DO. Bei einer sorgfältigeren Ueberlegung aber drängt sich die Frage auf, ob es nicht unter gewissen Umständen möglich sei, dass anfangs der Doppelkegel sich um den Punkt A herumdrehe, ohne mit der Peripherie seines Grundkreises diesen Vereinigungspunkt der Kanten und mit dem, aus der vertikalen Stellung in eine schräge Lage übergehenden Halbmesser JA die Ebene des mittleren Vertikalschnitts zu verlassen, und dass erst später, sobald diese Umdrehung wegen des Widerstands der Kanten AB und AC unmöglich gemacht würde, die fortrollende Bewegung einträte. Der Unterschied zwischen dieser fortrollenden Bewegung und derjenigen, welche ich so eben Umdrehung genannt habe, würde offenbar in der Anzahl der Berührungspunkte zwischen der Gesammtoberfläche des Doppelkegels und seiner Unterlage begründet sein. Denn während der blossen Umdrehung, wenn eine solche Statt findet, wird sich der Halbmesser AK (Fig. 2.) von der Vertikallinie AJ abwärts drehen, ohne dass der Doppelkegel von der Unterlage in irgend einem andern Punkt ausser A berührt würde; sobald dagegen der Winkel JAK sein Maximum erreicht hat, weil einer weiteren Umdrehung sich der Widerstand der Kanten AB und AC entgegenstellt, so wird in diesem Augenblick der Doppelkegel mit der Peripherie seines Grundkreises den Vereinigungspunkt beider Kanten verlassen und wird sofort, indem sich der Berührungspunkt A gewissermassen in zwei aus einander tretende Punkte zerspaltet, in diesen zwei Berührungspunkten auf den Kanten AB und AC gestützt sein.

§. 9.

Um diese etwas delikate Frage zu entscheiden, sei der Schwerpunkt des Doppelkegels der Ursprung rechtwinkliger Coordinaten, die Ordinaten Z mögen in der Richtung der horizontalliegenden Axe des Kegels, die Axen der X und Y aber beide in der Ebene des mittleren Vertikalschnitts, die erstere horizontal und positiv nach der Seite hin, nach welcher die Kanten der Unterlage in die Höhe laufen, die andere vertikal aufwärts angenommen werden.

Alsdann entspricht der Oberfläche des auf der positiven Seite der Z liegenden und jetzt allein zu betrachtenden einfachen Kegels P die Gleichung

$$x^2+y^2=\frac{(h-z)^2}{h^2}a^2.$$

---

*) l. c. §. 7. Der Punkt D hat daselbst die nämliche Bedeutung wie in unserer Fig. 1. der Punkt J.

**) l. c. §. 8. Dass die Kanten AB und AC daselbst horizontal vorausgesetzt werden, macht keinen Unterschied in der Sache.

Verlegen wir dagegen den Anfangspunkt der Coordinaten, ohne jedoch an ihrer Richtung etwas zu ändern, nach A, und bezeichnen die Coordinaten des Schwerpunkts nach den Richtungen der neuen X und Y durch ξ und v, so ist

$$(11)\quad h^2(x-\xi)^2+h^2(y-v)^2=a^2(h-z)^2.$$

Die durch den Vereinigungspunkt A gehende, auf der Seite der positiven Z gelegene Kante AB aber lässt sich als Durchschnitt zweier Ebenen betrachten, von denen die eine durch die Axe der Y geht, also vertikal steht und mit der Ebene der XY den Winkel E bildet, während die andere durch gegenwärtige Axe der Z geht und gegen die Coordinatenebene XZ unter dem Winkel NAD geneigt ist, dessen Sinus und Cosinus in §. 7. gleich $\frac{\cos\Gamma}{\sqrt{1-\sin E^2\sin\Gamma^2}}$ beziehungsweise $\frac{\cos E\sin\Gamma}{\sqrt{1-\sin E^2\sin\Gamma^2}}$ gefunden worden ist. Diese Kante wird also durch das System folgender beiden Gleichungen repräsentirt:

$$x\sin E-z\cos E=0,\quad x\cos\Gamma-y\cos E\sin\Gamma=0,$$

welche den beiden eben bezeichneten Ebenen entsprechen. Substituirt man die Werthe, welche sich hieraus für x und y ergeben, nämlich

$$(12)\quad x=z\operatorname{cotg}E,\quad y=\frac{z\operatorname{cotg}\Gamma}{\sin E},$$

in die Gleichung (11), so erhält man eine Gleichung, welche nur z enthält und in Beziehung auf diese Variable vom zweiten Grade ist, und durch deren Auflösung die Werthe dieser Coordinate für diejenigen beiden Punkte sich ergeben müssen, in denen die Kantenlinie AB im Allgemeinen, so lange die Richtung des von A nach dem Schwerpunkt des Doppelkegels gezogenen Halbmessers noch nicht näher bestimmt worden ist, durch die Kegelfläche P hindurchdringt. Bezeichnen wir aber zu gleicher Zeit denjenigen spitzen Winkel, auf dessen mögliche Existenz es ankommt, welchen nämlich der eben erwähnte Halbmesser mit dem in A vertikal stehenden Radius AJ bildet (etwa den Winkel JAK in Fig. 2.) mit ψ, so dass $\xi=a\sin\psi$ und $v=a\cos\psi$ ist; so erhält die gedachte Gleichung die Form

$$h^2(z\operatorname{cotg}E-a\sin\psi)^2+h^2\left(\frac{z\operatorname{cotg}\Gamma}{\sin E}-a\cos\psi\right)^2=a^2(h-z)^2,$$

d. h.

$$(h^2\cos E^2+h^2\operatorname{cotg}\Gamma^2-a^2\sin E^2)z^2$$
$$-2ha(h\sin E\cos E\sin\psi+h\operatorname{cotg}\Gamma\sin E\cos\psi-a\sin E^2)z=0.$$

Die eine Wurzel hiervon ist $z=0$, und dazu gehört wegen (12) auch $x=0$, $y=0$, durch welche Coordinatenwerthe nur, wie es die Natur der Sache verlangt, angegeben wird, dass die Kantenlinie mit der Kegelfläche den Punkt A gemeinschaftlich habe.

Nach Absonderung dieser ersten Wurzel wird aber die andere, wenn man zugleich alle Glieder der Gleichung durch h^2 dividirt und für $\frac{a}{h}$ den Werth $\operatorname{cotg} \vartheta$ einführt,

$$(13) \quad z = \frac{2a \sin E (\cos E \sin \psi + \operatorname{cotg} \Gamma \cos \psi - \operatorname{cotg} \vartheta \sin E)}{\cos E^2 + \operatorname{cotg} \Gamma^2 - \operatorname{cotg} \vartheta^2 \sin E^2}.$$

Nun muss aber, wie bereits in §. 4. bemerkt worden, allemal $\operatorname{tang} \vartheta > \operatorname{tang} E$ sein, also

$$(14) \quad \cos E > \operatorname{cotg} \vartheta \sin E,$$

und deshalb ist der Nenner des für z gefundenen Ausdrucks (13), wie gross auch sonst die spitzen Winkel E, Γ, ϑ angenommen werden mögen, eine positive Grösse, woraus folgt, dass das Vorzeichen von z sich lediglich nach dem in Klammern eingeschlossenen Factor des Zählers richtet. Setzen wir daher

$$(15) \quad \cos E \sin \psi + \operatorname{cotg} \Gamma \cos \psi = \operatorname{cotg} \vartheta \sin E + \delta,$$

wo δ eine noch unbestimmte Grösse bezeichnen soll, so wird z zugleich mit dieser Grösse δ positiv oder negativ oder Null. Aus dieser letzten Gleichung erhalten wir aber, wenn wir anstatt $\operatorname{cotg} \vartheta \sin E + \delta$ der Kürze wegen μ schreiben und quadriren,

$$\operatorname{cotg} \Gamma^2 \cos \psi^2 - 2\mu \operatorname{cotg} \Gamma \cos \psi + \mu^2 = \cos E^2 (1 - \cos \psi^2),$$

also

$$\cos \psi = \frac{\mu \operatorname{cotg} \Gamma \pm \cos E \sqrt{\cos E^2 + \operatorname{cotg} \Gamma^2 - \mu^2}}{\cos E^2 + \operatorname{cotg} \Gamma^2}.$$

Nun bemerke man, dass zwar die von dem Winkel ψ abhängige Lage des Doppelkegels so beschaffen sein kann, dass wenn man sich seine auf der Seite der positiven z gelegene Hälfte, nämlich die Kegelfläche P, welche wir hier allein in Betrachtung gezogen haben, über die gemeinschaftliche Basis beider Kegel hinaus erweitert und die gleichfalls auf die positive Seite der z fallende Kantenlinie AB über A hinaus verlängert denkt, diese Verlängerung in jene Fortsetzung der Kegelfläche eindringe und irgendwo auf der Seite der negativen z noch einen zweiten Durchschnittspunkt mit ihr gemein habe, dass es aber den Bedingungen unserer Aufgabe, nämlich der Undurchdringlichkeit der Kante AB widerstreiten würde, auf der Seite der positiven z einen solchen zweiten Durchschnittspunkt zu denken. Da also der in (13) für z erhaltene Werth entweder negativ ausfallen muss (in welchem Falle den Formeln (12) zu Folge auch die zugehörigen Coordinaten x und y negativ sind), oder auch sich auf Null reduciren kann, wodurch angezeigt sein würde, dass die Kantenlinie AB keine Sekante der Kegelfläche sei, sondern dieselbe im Punkte A tangire, und da das Vorzeichen von z, wie oben bemerkt, mit dem Vorzeichen von δ übereinstimmt; so darf auch in dem für $\cos \psi$ gefundenen Ausdruck δ nur als eine negative Zahl oder als Null be-

trachtet werden. Aus der Gleichung (15) aber ist ersichtlich, da die in dem linken Theil dieser Gleichung erscheinenden Winkel ψ, E, Γ alle als spitz und positiv angenommen sind, dass $\mu = \operatorname{cotg}\vartheta \sin E + \delta$ eine positive Grösse, nämlich dass der numerische Werth von δ kleiner als $\operatorname{cotg}\vartheta \sin E$ sein müsse, und hieraus folgt weiter, dass in dem für $\cos\psi$ gefundenen Werthe die Wurzelgrösse positiv zu nehmen sei. Denn nach (14) ist $\cos E > \operatorname{cotg}\vartheta \sin E$, also auch, weil δ keine positive Grösse sein kann, $\cos E > \mu$. Demgemäss ist dann auch weiter

$$\sqrt{\operatorname{cotg}\Gamma^2 + \cos E^2 - \mu^2} > \operatorname{cotg}\Gamma;$$

also, wenn man diese beiden letzten Ungleichungen mit einander multiplicirt, um so mehr

$$\cos E \sqrt{\operatorname{cotg}\Gamma^2 + \cos E^2 - \mu^2} > \mu \operatorname{cotg}\Gamma.$$

Wollte man daher die Wurzelgrösse negativ nehmen, so würde $\cos\psi$ negativ ausfallen, also auf einen stumpfen Winkel ψ hinweisen, welches der hier in Frage stehende nicht sein kann.

Aus der Gleichung (15) erhält man nun weiter

$$\sin\psi = \frac{\mu - \operatorname{cotg}\Gamma \cos\psi}{\cos E},$$

also durch Substitution des für $\cos\psi$ gefundenen Ausdrucks:

$$(16)\quad \sin\psi = \frac{\mu \cos E - \operatorname{cotg}\Gamma . \sqrt{\operatorname{cotg}\Gamma^2 + \cos E^2 - \mu^2}}{\cos E^2 + \operatorname{cotg}\Gamma^2}.$$

Diese Formel lehrt, wenn $\psi = 0$ angenommen werden soll, für welche Annahme man den Zähler nur gleich Null zu setzen braucht, dass dann $\mu^2 = \operatorname{cotg}\Gamma^2$, also weil μ nach dem oben Bemerkten eine positive Grösse sein muss, $\mu = \operatorname{cotg}\Gamma$, folglich $\delta = \operatorname{cotg}\Gamma - \operatorname{cotg}\vartheta \sin E$ sei, während für diese Annahme sich aus (13) für den zweiten Durchschnittspunkt der Kantenlinie AB mit der Kegelfläche P der Coordinatenwerth

$$(17)\quad z = \frac{2a \sin E(\operatorname{cotg}\Gamma - \operatorname{cotg}\vartheta \sin E)}{\cos E^2 + \operatorname{cotg}\Gamma^2 - \operatorname{cotg}\vartheta^2 \sin E^2}$$

ergiebt. Damit dieser Werth nicht positiv ausfalle, darf $\operatorname{cotg}\Gamma$ nicht grösser als $\operatorname{cotg}\vartheta \sin E$ sein, und wir haben daher für die Möglichkeit den Doppelkegel überhaupt so zu legen, dass er mit einem Punkte der Peripherie seines Grundkreises den Vereinigungspunkt der beiden Kanten AB und AC berührt und sein Schwerpunkt sich vertikal über diesem Vereinigungspunkt befindet, die Bedingungen

$$\operatorname{cotg}\vartheta \sin E > \operatorname{cotg}\Gamma,$$

oder

$$\operatorname{cotg}\vartheta \sin E = \operatorname{cotg}\Gamma.$$

Diese beiden Fälle müssen aber wohl unterschieden uud einzeln näher untersucht werden. Es kann nämlich $\sin\psi$ überhaupt nur alsdann einen von Null verschiedenen und positiven Werth erhalten, wenn die durch μ vorgestellte Summe $>\operatorname{cotg}\Gamma$ ist, wovon man sich sofort überzeugt, wenn man dem Zähler der Formel (16) die Gestalt giebt

$$\sqrt{\mu^2(\cos E^2+\operatorname{cotg}\Gamma^2)-\mu^2\operatorname{cotg}\Gamma^2}-\sqrt{\operatorname{cotg}\Gamma^2(\cos E^2+\operatorname{cotg}\Gamma^2)-\mu^2\operatorname{cotg}\Gamma^2}.$$

Da aber für jeden Werth von ψ immer $\mu=\operatorname{cotg}\vartheta\sin E+\delta$ ist, so liesse sich für ein solches Verhältniss der Constanten ϑ, E, Γ, wobei $\operatorname{cotg}\vartheta\sin E=\operatorname{cotg}\Gamma$ wird, die mit ψ gleichzeitig variirende Grösse μ nur dadurch grösser als $\operatorname{cotg}\Gamma$ machen, dass man der Grösse δ einen positiven Werth beilegte, was mit dem Umstande, dass z nothwendig entweder negativ oder gleich Null sein muss, nicht vereinbar ist. Wenn daher die Constanten ϑ, E, Γ wirklich in dem Verhältniss zu einander stehen, dass die Gleichung $\operatorname{cotg}\vartheta\sin E=\operatorname{cotg}\Gamma$ erfüllt wird, so kann man zwar dem Doppelkegel eine solche Lage anweisen, dass er auf dem Vereinigungspunkt der beiden unterstützenden Kanten ruht und sein Schwerpunkt sich in der von diesem Punkt aufwärts gezogenen Vertikallinie befindet, also $\psi=0$ ist, und die Gleichungen (17) und (12) zeigen, dass die beiden Kanten alsdann Tangenten der Kegelflächen sind; allein irgend eine Drehung desselben um einen positiven Winkel ψ wird unter diesen Umständen durch den Widerstand der Kanten unmöglich gemacht werden. Auch giebt durch Substitution des Werths $\operatorname{cotg}\vartheta=\frac{\operatorname{cotg}\Gamma}{\sin E}$ und des daraus folgenden

$$\sin\vartheta^2=\frac{\sin E^2}{\sin E^2+\operatorname{cotg}\Gamma^2}$$

die Formel (9), sobald man Zähler und Nenner derselben vorerst durch $\sin\vartheta$ dividirt, den Werth

$$\sin\omega=\frac{\cos E\sin\Gamma\cos\Gamma-\cos\Gamma\sqrt{1-(\sin E^2+\operatorname{cotg}\Gamma^2)\sin\Gamma^2}}{1-\sin E^2\sin\Gamma^2}$$

$$=\frac{\cos\Gamma[\cos E\sin\Gamma-\sqrt{1-(1-\cos E^2)\sin\Gamma^2-\cos\Gamma^2}]}{1-\sin E^2\sin\Gamma^2}$$

$$=0,$$

woraus hervorgeht, dass der Doppelkegel unter diesen Umständen, man mag ihn auf die Schenkel der Unterlage hinlegen in welchen Punkten man will, nicht im Stande ist von selbst weiter zu rollen.

Wenn dagegen $\operatorname{cotg}\vartheta\sin E>\operatorname{cotg}\Gamma$ ist, so bleibt auch $\mu=\operatorname{cotg}\vartheta\sin E+\delta$ grösser als $\operatorname{cotg}\Gamma$, so lange die negative Grösse δ dem numerischen Werthe nach die Differenz $\operatorname{cotg}\vartheta\sin E-\operatorname{cotg}\Gamma$ nicht überschreitet; und innerhalb dieses Grenzwerths und dem Werthe $\delta=0$ ist denn auch $\sin\psi$ von Null verschiedener, positiver und reeller Werthe fähig, — reeller Werthe aus dem Grunde,

weil wegen $\mu < \cotg\vartheta \sin E < \cos E$ (zu Folge (14)) die Wurzelgrösse in dem Ausdruck (16) niemals imaginär ausfallen kann. Nun zeigt aber diese Formel (16) auch, dass der W. ψ bei constanten Werthen von E und Γ desto grösser wird, je grösser μ ist; und weil, wenn μ wachsen soll, der numerische Werth von δ abnehmen muss, so erreicht der W. ψ sein Maximum, sobald man $\delta = 0$, also $\mu = \cotg\vartheta \sin E$ annimmt. Für dieses Maximum hat man daher den Werth

$$(18)\quad \sin\psi = \frac{\cotg\vartheta \sin E \cos E - \cotg\Gamma \sqrt{\cotg\Gamma^2 + \cos E^2 - \cotg\vartheta^2 \sin E^2}}{\cos E^2 + \cotg\Gamma^2}.$$

Dieser Werth ist aber mit dem in (10) für $\sin\omega$ gefundenen identisch, also das Maximum von $\psi = \omega$, nämlich W. $JAK = DAZ$ (Fig. 2), woraus folgt, dass der Radius KA alsdann senkrecht auf AZ steht. Wenn daher die Bedingung $\cotg\vartheta \sin E > \cotg\Gamma$ erfüllt ist und man alsdann den Doppelkegel so auf den Vereinigungspunkt der Kanten AB und AC legt, dass sein Schwerpunkt nur ein wenig aus der vertikalen Richtung AJ abweichend in die Winkelebene JAN fällt, so findet zunächst eine Umdrehung um den Berührungspunkt A Statt und zwar so lange, bis der Radius AK mit den Halbmessern MS, $M'S'$, u. s. f. gleiche Neigung gegen die Horizontallinie AD erhalten hat, d. h. bis die durch die Axe des Kegels und den Berührungspunkt A gelegte Ebene mit allen andern Berührungs-Axenschnitten PSM, $P'S'M'$ parallel geworden ist, — und dann erst beginnt die fortrollende Bewegung. In dem Augenblicke also, wenn der Doppelkegel aufhört mit der Peripherie seines Grundkreises den Punkt A zu berühren, ist seine Stellung ganz die nämliche, wie wir sie in den vorhergehenden §§. für einen beliebigen andern Zeitpunkt während seiner fortrollenden Bewegung haben kennen gelernt. Zugleich ergiebt sich aus diesen Betrachtungen, dass die von Kraft (l. c. §. 8.) angegebene Formel $\tang ANK = \tang NAZ = \frac{AK}{AN} = \frac{a}{h \cotg\eta} = \frac{\tang\eta}{\tang\vartheta}$ (weil er nämlich glaubte, das $\Delta\, ANK$ sei bei A rechtwinklig) falsch ist und heissen muss $\sin ANK = \sin NAZ = \frac{\tang\eta}{\tang\vartheta}$, wie wir sie in §. 2. aufgestellt haben.

§. 10.

Ish wende mich jetzt zur Betrachtung der auf der Kegeloberfläche liegenden Curve, in welcher alle in Fig. 1. mit T, T', u. s. f. bezeichneten, nach und nach mit der Kante AB in Berührung kommenden Punkte gelegen sind. Diese Curve kann man offenbar auch auf die Art entstehen lassen, dass man sich den Doppelkegel selbst als stillstehend vorstellt, aber die Kante AB dergestalt an seiner krummen Oberfläche rings herumführt, dass sie fortwährend die Kegelfläche tangirt und zugleich gegen die durch den jedesmaligen Berührungspunkt T gezogene Kegelseite PS unter einem constanten Winkel BTB geneigt bleibt, dessen trigonometrische

Tangente durch $\frac{AS}{ST}=\frac{AZ}{BZ}$ angegeben wird, weil nämlich alle Berührungs-Axenschnitte auf der Geraden AZ perpendikulär stehen (§. 2.). Nehmen wir jetzt in Fig. 3. den Punkt O in der Peripherie des Grundkreises als denjenigen Punkt an, von welchem die gedachte Schneckenlinie $OTKL$ ihren Anfang nimmt und welcher also ursprünglich mit dem Vereinigungspunkt der beiden Kanten der Unterlage in Berührung war, und T für einen beliebigen andern Punkt der Curve, ATb für die zugehörige Berührungslinie. Da jede solche Berührungslinie gegen die demselben Punkt entsprechende Kegelseite, oder wie man bei Rotationsflächen im Allgemeinen zu sprechen pflegt, gegen den Meridian PTS unter einem constanten Winkel geneigt ist, so ist die Curve selbst eine sogenannte Kegelloxodrome. Zieht man auch am Punkte S in der Ebene des Grundkreises an dessen Peripherie die Tangente SA, so liegt diese mit TA in einer Ebene und beide schneiden sich also in einem Punkte, welcher aus einem sogleich deutlich werdenden Grunde mit A bezeichnet worden ist. Es sei nun ferner Av die Projection der Tangente AT auf die Ebene des Grundkreises und OW die Projection der Loxodrome OT; so muss nach einem bekannten Satze Av zugleich die dem Punkte W entsprechende Tangente an die Curve OW sein. Nun ist aber auch in Fig. 1. und Fig. 2. die Gerade AW nichts anderes, als die Projection der berührenden Kantenlinie AT auf die Ebene des Grundkreises, folglich muss der in Fig. 3. mit AWS bezeichnete Winkel mit dem gleichnamigen in den beiden andern Figuren identisch, nämlich gleich $(90^\circ - NAZ)$ sein.

Sobald man aber jetzt, um die Curve OW auf Polarcoordinaten zu beziehen, den Pol in M und OM als Polaraxe annimmt, so ist $AWS=MWv$ der Winkel, welchen die in der Richtung des wachsenden Bogens gezogene Tangente mit dem nach dem Berührungspunkt gezogenen Radius Vector bildet, und da dieser Winkel gegenwärtig von dem veränderlichen Polarwinkel OMW unabhängig und stets gleich dem Complement des constanten und gegebenen W. NAZ sein soll, so folgt, nach der bekannten charakteristischen Eigenschaft der logarithmischen Spirallinien, dass die in der Ebene des Grundkreises liegende Curve OW eine logarithmische Spirale ist. Als Differenzialgleichung derselben zwischen den Variablen $OMW=\varphi$ und $MW=u$ haben wir sogleich

$$-\frac{ud\varphi}{du}=\operatorname{tang} MWv=\operatorname{cotg} NAZ,$$

und wenn wir der Kürze wegen $\operatorname{tang} NAZ=\varkappa$ setzen, so dass der Formel (2) in §. 4. zu Folge

$$(19)\quad \varkappa=\frac{\operatorname{tang}\eta}{\sqrt{\operatorname{tang}\vartheta^2-\operatorname{tang}\eta^2}}=\frac{\sin\eta\cos\vartheta}{\sqrt{\sin(\vartheta+\eta)\sin(\vartheta-\eta)}}$$

ist, so giebt die vorige Gleichung $\frac{du}{u}=-\varkappa d\varphi$, also

$$lu=-\varkappa\varphi+\text{const.}$$

Für $\varphi=0$ soll $u=a$ werden, also muss const. $=la$ sein, und die Gleichung der Curve ist

$$(20)\quad l\frac{u}{a}=-\varkappa\varphi \quad \text{oder} \quad u=ae^{-\varkappa\varphi}.$$

§. 11.

Als die nächste und sich einem Jeden unmittelbar aufdrängende Folgerung aus dem Umstande, dass die Projection der auf der Kegelfläche entstandenen Schneckenlinie eine logarithmische Spirale ist, dass also der Radius Vector u erst für $\varphi=\infty$ verschwindet, stellt sich nun das Resultat heraus, dass auch diese Schneckenlinie nicht bis in die Kegelspitze hinaufläuft, dass also auch der Doppelkegel PQ erst nach unzählig vielen Umwälzungen theoretisch aufgefasst mit seinen Scheiteln P und Q auf den Kanten der Unterlage AB und AC aufliegen würde. Von der Frage freilich, ob gegen das Ende der Bewegung hin durch die beschleunigte Geschwindigkeit ein Fortgleiten des Doppelkegels eintreten werde, müssen wir hierbei, bevor nicht die Grösse der Reibung näher in Untersuchung gezogen worden, noch absehen.

Obwohl aber eine solche Kegelloxodrome sich nur asymptotisch dem Scheitel des Kegels nähert, so ist man dennoch im Stande dieselbe vom Anfangspunkt O an gerechnet bis zum Scheitel hin vollständig zu rectificiren, so dass die auf einander folgenden einzelnen Windungen die Glieder einer geometrischen Progression darstellen, deren Summenausdruck sich gleich AB ergeben wird.

Bezeichnen wir nämlich das Differenzial des Bogens der Loxodrome am Punkte T durch ds und das entsprechende Differenzial ihrer Projection am Punkt W mit ds', so ist $ds=ds'.\sec WAT$. Nun muss aber, wenn wir die Veränderliche $z=WT$ in Fig. 3. als gleichgross mit der gleichnamigen Linie in Fig. 1. annehmen, auch SW in beiden Figuren gleich sein, woraus sofort, da auch die Winkel bei S und W in den $\Delta\Delta$ SAW übereinstimmen, die Congruenz dieser Dreiecke hervorgeht. Hieraus folgt weiter, dass auch AW in beiden Figuren einerlei Grösse haben müsse, dass also auch die $\Delta\Delta$ ATW die nämlichen sind, daher ist in Fig. 3. W. $WAT=\eta$, und $s=s'.\sec\eta$. Ferner haben wir, indem wir den W. OMW fortwährend durch φ bezeichnen,

$$ds'=\sqrt{u^2d\varphi^2+du^2}=-\sqrt{(u^2\frac{d\varphi^2}{du^2}+1)}\,du,$$

wo das Vorzeichen $(-)$ genommen werden musste, weil wenn s' zunehmen soll, du negativ ist. Und wenn wir hier für $\frac{d\varphi}{du}$ den aus (20) fliessenden Werth $-\frac{1}{a\varkappa e^{-\varkappa\varphi}}=-\frac{1}{\varkappa u}$ substituiren und integriren, so erhalten wir

$$s'=\text{const.}-u\sqrt{\frac{1}{\varkappa^2}+1},$$

oder weil dem Anfangswerthe $s'=0$ der Radius Vector $u=MO=a$ entspricht,

$$(21) \left\{ \begin{aligned} s' &= (a-u)\sqrt{\frac{1}{\varkappa^2}+1}, \\ s &= (a-u)\sec\eta . \sqrt{\frac{1}{\varkappa^2}+1}. \end{aligned} \right.$$

Um diese Ausdrücke geometrisch anschaulich zu machen, brauchen wir nur zu bemerken, dass dem vorigen §. zu Folge $\frac{1}{\varkappa}=$ $\operatorname{cotg} NAZ = \operatorname{tang} AWS$, also $\sqrt{\frac{1}{\varkappa^2}+1} = \sec AWS = \operatorname{cosec} NAZ$ ist, denn dadurch haben wir sogleich

$$s' = SW.\sec AWS = AW$$

und

$$s = AW.\sec WAT = AT.$$

Dehnen wir die Gleichungen (21) so weit aus, bis $u=0$, nämlich $\varphi=\infty$ wird, und blicken dabei auf Fig. 1., so erhalten wir

$$(22) \left\{ \begin{aligned} & s' = a \operatorname{cosec} NAZ = \frac{NZ}{\sin NAZ} = AN = \frac{h}{\operatorname{tang}\eta} \\ & \text{und} \\ & s = AN.\sec\eta = \frac{AN}{\cos NAB} = AB = \frac{h}{\sin\eta} \end{aligned} \right.$$

wie vorauszusehen war.

Substituiren wir jedoch in dem bei (21) für s gefundenen Ausdrucke für u seinen Werth $ae^{-\varkappa\varphi}$ und für $a\sec\eta.\sqrt{\frac{1}{\varkappa^2}+1}$ den Werth $AB=\frac{h}{\sin\eta}$, so dass

$$(23) \quad s=\frac{h}{\sin\eta}(1-e^{-\varkappa\varphi})$$

wird; setzen darin allmählig $\varphi=2\pi$, 4π, 6π u. s. f. und subtrahiren jedesmal von dem späteren Resultate das Vorhergehende, so ergeben sich die Ausdrücke für die auf einander folgenden Windungen der Loxodrome, nämlich Länge der

ersten Windung $s_1=\frac{h}{\sin\eta}(1-e^{-2\varkappa\pi})$,

zweiten Windung $s_2=\frac{h}{\sin\eta}(1-e^{-2\varkappa\pi})e^{-2\varkappa\pi}=s_1.e^{-2\varkappa\pi}$,

dritten Windung $s_3 = \frac{h}{\sin\eta}(1 - e^{-2\varkappa\pi})\, e^{-4\varkappa\pi} = s_1\,(e^{-2\varkappa\pi})^2$,

u. s. f.,

überhaupt Länge der $(n+1)$ten Windung $s_n = s_1\,(e^{-2\varkappa\pi})^n$,

so dass diese Windungen in geometrischer Progression abnehmen.

§. 12.

Auch die Breiten, oder wenn man lieber will, indem man sich die Axe des Kegels vertikal gestellt denkt, die Höhen der auf einander folgenden Windungen*) lassen sich leicht bestimmen, und auch diese nehmen in geometrischer Progression ab. Es ist nämlich überhaupt, wie man aus dem $\Delta\ STW$ in Fig. 3. sieht, $WT = z = (a-u)\tan\vartheta = a\tan\vartheta(1 - e^{-\varkappa\varphi}) = h(1 - e^{-\varkappa\varphi})$, oder wegen (23)

$$(24) \quad z = s.\sin\eta,$$

wie auch schon das $\Delta\ AWT$ lehrt, in welchem $AT = OT = s$ ist. Nennen wir nun denjenigen Werth von z, welcher dem Rotations winkel $\varphi = 2\pi$ entspricht, die Höhe der ersten Windung, so ist diese

$$z_1 = h(1 - e^{-2\varkappa\pi}) = s_1 . \sin\eta,$$

und sofort ergeben sich hiernach für die Höhe der zweiten, dritten u. s. f. Windungen die Werthe

$$z_2 = z_1 . e^{-2\varkappa\pi},$$

$$z_3 = z_1\,(e^{-2\varkappa\pi})^2$$

u. s. f.,

überhaupt

$$z_{n+1} = z_1(e^{-2\varkappa\pi})^n.$$

§. 13.

Da in Fig. 3., wie so eben bewiesen worden, die Geraden AW und AT beziehungsweise gleiche Länge haben mit den Curven OW und OT, so kann das ebene Dreieck AWT durch Krümmung mit dem auf der logarithmischen Spiral-Cylinderfläche liegenden $\Delta\ OWT$ in Congruenz gebracht werden. Hieraus wird man vielleicht die Ansicht gewinnen, dass gleichzeitig mit dieser Krümmung des Dreiecks AWT auch das ebene Dreieck AST sich

---

*) Bestreicht man die Kanten der Unterlage AB und AC mit einer abfärbenden Substanz, z. B. mit Kreide, so werden, nachdem der Doppelkegel darüber hingerollt ist, diese Windungen deutlich sichtbar sein.

über das auf der Kegelfläche liegende Δ OST in völliger Congruenz ausbreite, und diese Ansicht, auf die Figur 1. übergetragen, würde, weil dann die Linie AS immer gleiche Länge mit dem abgerollten Bogen des Grundkreises hätte, zu dem weitern und wichtigen Schluss führen, dass jeder in der Peripherie des Grundkreises gelegene Punkt während der rotirenden Bewegung des Doppelkegels eine gemeine Cykloide beschriebe. So ist es aber nicht, und die obige Voraussetzung, dass die Gerade AS auf dem Kreisbogen OS hergekrümmt werden könne, würde irrig sein. Denn es ist dieser Kreisbogen $OS = a\varphi$, dagegen $AS = SW.\operatorname{tang} AWS = \frac{1}{k}(a-u) = a\left(\frac{1-e^{-\varkappa\varphi}}{\varkappa}\right)$, und dieser letzte Ausdruck entwickelt giebt

$$AS = a\varphi - \frac{1}{\varkappa}\left[\frac{\varkappa^2\varphi^2}{2!} - \frac{\varkappa^3\varphi^3}{3!} + \frac{\varkappa^4\varphi^4}{4!} - \ldots\right],$$

welches keineswegs gleich $a\varphi$ ist.

Und was die Curve anbelangt, welche derjenige in der Peripherie des Grundkreises befindliche Punkt, der am Anfang der rollenden Bewegung mit dem Vereinigungspunkt der Kanten in Berührung war, während dieser Bewegung beschreibt, so sieht man leicht mit Beihülfe von Fig. 1. ein, dass, wenn A zum Ursprung rechtwinkliger Coordinaten und ASZ als Abscissenaxe angenommen wird, die Gleichung derselben das Resultat der Elimination des Winkels φ aus den beiden Gleichungen

$$y = MS - a\cos\varphi = a(1 - \cos\varphi),$$

$$x = AS - a\sin\varphi = \frac{a}{\varkappa}(1 - e^{-\varkappa\varphi}) - a\sin\varphi$$

sein werde. Diese Gleichung ist demnach

$$(25) \quad x = \frac{a}{\varkappa}\left[1 - e^{-\varkappa \operatorname{arc}\cos\frac{a-y}{a}}\right] - \sqrt{2ay - y^2}.$$

§. 14.

In allen diesen Gleichungen ist der Werth der Constante $\varkappa$ nach der Formel (19) aus den ursprünglich gegebenen Grössen zu berechnen, jedoch verdient noch besonders bemerkt zu werden die einfache Relation zwischen dieser Constante und der Tangente des unveränderlichen Winkels, unter welchem die Loxodrome von den Meridianen der Kegelfläche geschnitten wird. Die Fig. 1. liefert nämlich sofort die Werthe

$$\operatorname{tang} ATS = \frac{AZ}{BZ} \quad \text{und} \quad \varkappa = \operatorname{tang} NAZ = \frac{NZ}{AZ},$$

woraus folgt

$$(26) \quad \varkappa = \operatorname{cotg} ATS.\frac{NZ}{BZ} = \cos\vartheta.\operatorname{cotg} ATS.$$

§. 15.

Es mögte dem Gegenstand gegenwärtiger Abhandlung zu ferne liegend scheinen, auf andere Eigenschaften der Kegelloxodrome hier weiter einzugehen; überdies findet man in dem zweiten Bande dieses Archivs, Heft 2. Seite 127., eine Abhandlung von Grebe, worin der Verf. diese Curve mit der gemeinen Schraubenlinie (Cylinderloxodrome) zusammengehalten und mehrere interessante Sätze, wiewohl nur in Form von Resultaten und ohne Beweis, zuerst aufgestellt hat. Nur die eine, freilich auch schon von Grebe aufgefundene Eigenschaft, dass der Krümmungshalbmesser für jeden Punkt der Curve eine mit der Ebene des Grundkreises parallele Lage hat, glaube ich hier noch in Kürze nachweisen zu müssen, weil ich auf diesen Satz in dem zweitfolgenden Paragraphen einen andern Schluss zu stützen gedenke.

Nehmen wir daher den Radius MO in Fig. 3. als Axe der x und ein in M darauf errichtetes in der Ebene des Grundkreises liegendes Perpendikel als die Axe der y an, während wie bisher MP die Axe der z sein soll, so ist

$$x = u\cos\varphi = ae^{-\varkappa\varphi}\cos\varphi,$$

$$y = u\sin\varphi = ae^{-\varkappa\varphi}\sin\varphi;$$

und vermöge §. 12.

$$z = h(1 - e^{-\varkappa\varphi});$$

also

$$dx = -[a\varkappa e^{-\varkappa\varphi}\cos\varphi + ae^{-\varkappa\varphi}\sin\varphi]\,d\varphi = -(y + \varkappa x)\,d\varphi,$$

$$dy = -[a\varkappa e^{-\varkappa\varphi}\sin\varphi - ae^{-\varkappa\varphi}\cos\varphi]\,d\varphi = (x - \varkappa y)\,d\varphi,$$

$$dz = \varkappa he^{-\varkappa\varphi}\,d\varphi;$$

und

$$d^2x = -(dy + \varkappa dx)\,d\varphi = [2\varkappa y + (\varkappa^2 - 1)\,x]\,d\varphi^2,$$

$$d^2y = (dx - \varkappa dy)\,d\varphi = [-2\varkappa x + (\varkappa^2 - 1)\,y]\,d\varphi^2,$$

$$d^2z = -\varkappa^2 he^{-\varkappa\varphi}\,d\varphi^2.$$

Nun ist aber, wenn ξ, v, ζ die Coordinaten des Mittelpunkts des Krümmungskreises bedeuten, welcher dem Berührungspunkt x, y, z zukommt, und wenn man der Kürze wegen

$$R = dxd^2y - dyd^2x, \qquad S = dxd^2z - dzd^2x,$$

$$T = dzd^2y - dyd^2z$$

setzt, bekanntlich

$$z-\zeta=(Tdy-Sdx)\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{R^2+S^2+T^2},$$

und mittelst der vorigen Werthe erhält man im gegenwärtigen Fall

$$T=[-2\varkappa x+(\varkappa^2-1)y+\varkappa(x-\varkappa y)]\,\varkappa he^{-\varkappa\varphi}d\varphi^3=-(y+\varkappa x)\,\varkappa he^{-\varkappa\varphi}d\varphi^3,$$

$$S=[\varkappa(y+\varkappa x)-2\varkappa y-(\varkappa^2-1)x]\,\varkappa he^{-\varkappa\varphi}\,d\varphi^3=(x-\varkappa y)\,\varkappa he^{-\varkappa\varphi}\,d\varphi^3;$$

also

$$Tdy-Sdx=0,$$

folglich $\zeta=z$, was zu beweisen war.

§. 16.

Wir hätten nun endlich unser Augenmerk noch auf diejenigen veränderlichen, aber unter sich ähnlichen Ellipsen zu richten, welche eine durch die Kante der Unterlage AB oder AC gelegte vertikale Ebene, nämlich die Erweiterung des Trapezes $EABG$ resp. $EABH$ (Fig. 1.) auf der Fläche des rollenden Doppelkegels in einem beliebigen Augenblick seiner Bewegung hervorbringen wird. Da sowohl diese schneidende Ebene, als auch die Ebene des Grundkreises vertikal stehen, so liegt deren Durchschnittslinie vertikal, woraus sogleich nach den allerersten Sätzen über die Schnitte am Kegel folgt, dass die kleine Axe einer der eben gedachten Ellipsen gleichfalls vertikal, und ihre grosse Axe horizontal laufen muss. Unbegreiflich erscheint es daher, wie Kononoff in §. 3. seiner oben citirten Abhandlung von der Annahme ausgehen konnte, die grosse Axe wäre parallel mit der Kante AB und die kleine Axe, senkrecht auf der Kante AB, ginge durch den Berührungspunkt T; und da auf diese irrthümlich vorausgesetzten Verhältnisse die Entwickelung aller seiner Formeln wesentlich gestützt ist, so lässt sich über jene Arbeit leider kein anderes Urtheil fällen, als das in der Einleitung von mir ausgesprochene.

Man sieht übrigens ein, dass es nicht im geringsten mit Schwierigkeiten verknüpft sein kann, die Halbaxen einer solchen Ellipse als Functionen von der Variablen AT oder von $TW=z=AT\cos\eta$ oder von einer anderen mit AT proportional wachsenden Linie, und eben so auch die Coordinaten ihres Mittelpunkts darzustellen. Da aber die zu entwickelnden Formeln etwas weitläuftig ausfallen und kein besonderes Interesse in Anspruch zu nehmen geeignet sind, so erscheint es wohl zweckmässig, dabei nicht zu verweilen und ich begnüge mich daher nur den Werth der grossen Halbaxe und das unveränderliche Verhältniss beider Halbaxen herzusetzen, nämlich

$$(27)\qquad \frac{\beta}{\alpha}=\frac{\sqrt{\sin(\vartheta+E)\sin(\vartheta-E)}}{\sin\vartheta},$$

$$(28) \quad \alpha = \frac{(h-z)\cos\vartheta}{\sin(\vartheta+E)\sin(\vartheta-E)}\left[\cos E \sin\vartheta - \cos\vartheta \sin E \sin\omega\right]$$

$$= \frac{(h-z)\cos\vartheta\cos\omega\sqrt{\sin\vartheta^2 - \sin E^2 \sin\Gamma^2}}{\sin\Gamma\sin(\vartheta+E)\sin(\vartheta-E)}$$

$$= \frac{(h-z)\cos\vartheta\cos\omega\sin\Gamma\sqrt{\sin(\vartheta+\eta)\sin(\vartheta-\eta)}}{\sin\vartheta^2\sin\Gamma^2 - \sin\eta^2},$$

wobei $\cos\omega$ und $\sin\omega$ nach (9) oder (10) zu berechnen sein würden

§. 17.

Ausserdem bietet sich hierbei noch die Frage dar, ob vielleicht die Ebene einer solchen Ellipse zusammenfalle mit der dem Berührungspunkt T entsprechenden Krümmungsebene der im Vorhergehenden betrachteten Kegelloxodrome, welche letztere Ebene, gleichwie die Ellipsenebene, durch die tangirende Kante AB geht, — ob nämlich diese Krümmungsebene gleichfalls eine vertikale Lage habe. Die Antwort aber wird sein: nur dann fallen beide Ebenen für jeden beliebigen Berührungspunkt T zusammen, wenn $\Gamma = \frac{\pi}{2}$ ist, d. h. wenn die Kanten AB und AC horizontal laufen. Dies Resultat lässt sich durch den Calcul mittelst der Gleichung der Krümmungsebene ziemlich leicht, noch leichter jedoch durch folgendes Räsonnement erhärten. Wenn die durch den Berührungspunkt gelegte Krümmungsebene mit der durch die berührte Kante AB gelegten Vertikalebene identisch ist, so müssen auch der Krümmungshalbmesser der Kegelloxodrome und der Krümmungshalbmesser der Ellipse der Richtung nach zusammenfallen, weil beide auf der tangirenden Kante senkrecht stehen müssen. Und umgekehrt, wenn diese Krümmungshalbmesser gleiche Richtung haben, so sind jene Ebenen identisch. Nun fallen aber diese zwei Krümmungshalbmesser nur dann zusammen, wenn $\Gamma = \frac{\pi}{2}$ ist. Denn man denke sich durch den Berührungspunkt eine Ebene, welche wir der Kürze wegen M nennen wollen, perpendikulär auf die Kante AB gelegt, ferner ebenfalls durch den Punkt T eine Ebene N parallel zu der vertikalen Grundfläche des Doppelkegels, und bezeichne endlich die schon gedachte, durch die Kante AB gelegte vertikale Ebene $ABGE$ durch Q. Der Krümmungshalbmesser der Loxodrome liegt dann nicht allein in der Ebene M, sondern muss zufolge der in §. 15. bewiesenen Eigenschaft dieser Curve auch in der Ebene N liegen, fällt also in die Durchschnittslinie von M und N. Eben so muss die Richtung des Krümmungshalbmessers der Ellipse in den Durchschnitt der Ebenen M und Q fallen. Wenn nun $\Gamma = \frac{\pi}{2}$ ist, so ist ausser N und Q auch M vertikal, und dann fallen also die beiden Durchschnittslinien von M und N einerseits, und von M mit Q andererseits als Durchschnittslinien dreier vertikaler, durch den nämlichen Punkt gelegter Ebenen wirklich

zusammen. Wenn dagegen $\Gamma < \frac{\pi}{2}$ ist, so ist M nicht vertikal, also kann dann weder die eine noch die andere der eben gedachten Durchschnittslinien vertikal sein. Beide können aber nun auch nicht zusammen fallen, weil ja sonst die Durchschnittslinie der Ebenen N und Q gleichfalls mit ihnen zusammenfallen müsste, während doch diese dritte Durchschnittslinie offenbar in allen Fällen vertikal laufen muss.

XXXVIII.

Ueber die Projection einer geraden Linie auf einer Ebene, auf einer Fläche überhaupt, und auf der Oberfläche eines elliptischen Sphäroids insbesondere.

Von

dem Herausgeber.

I.

Projection einer geraden Linie auf einer Ebene.

§. 1.

In Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz seien

$$1)\quad y = ax + a_1,\quad z = bx + b_1$$

die Gleichungen der gegebenen geraden Linie, und

$$2)\quad Ax + By + Cz + D = 0$$

sei die Gleichung der gegebenen Ebene.

Die Gleichung der projicirenden Ebene, deren Durchschnitts-

linie mit der gegebenen Ebene die gesuchte Projection der gegebenen geraden Linie auf der gegebenen Ebene ist, sei ferner

$$3)\quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0.$$

Da diese Ebene auf der gegebenen Ebene senkrecht steht, so hat man nach den Principien der analytischen Geometrie die Gleichung,

$$AA_1+BB_1+CC_1=0,$$

und weil die gegebene gerade Linie ganz in der projicirenden Ebene liegt, so ist für jedes x

$$(A_1+aB_1+bC_1)x+a_1B_1+b_1C_1+D_1=0,$$

woraus sich die beiden Gleichungen

$$A_1+aB_1+bC_1=0,\quad a_1B_1+b_1C_1+D_1=0$$

ergeben, so dass man also nun zwischen den vier unbekannten Grössen A_1, B_1, C_1, D_1 die drei folgenden Gleichungen hat:

$$4)\quad \begin{cases} AA_1+BB_1+CC_1=0, \\ A_1+aB_1+bC_1=0, \\ a_1B_1+b_1C_1+D_1=0. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man aber sogleich

$$\begin{aligned} (Ab-C)A_1+(Bb-Ca)B_1&=0, \\ (Aa-B)A_1-(Bb-Ca)C_1&=0, \\ a_1B_1+b_1C_1+D_1&=0; \end{aligned}$$

und sieht hieraus, dass dieselben erfüllt werden, wenn man

$$5)\quad \begin{cases} A_1=Bb-Ca, \\ B_1=-(Ab-C), \\ C_1=Aa-B, \\ D_1=a_1(Ab-C)-b_1(Aa-B) \end{cases}$$

oder

$$6)\quad \begin{cases} A_1=Bb-Ca, \\ B_1=-(Ab-C), \\ C_1=Aa-B, \\ D_1=-A(ab_1-ba_1)+Bb_1-Ca_1 \end{cases}$$

setzt. Folglich ist nach dem Obigen

$$7)\quad \left.\begin{array}{l}(Bb-Ca)x\\ -(Ab-C)y\\ +(Aa-B)z\\ -A(ab_1-ba_1)+Bb_1-Ca_1\end{array}\right\}=0$$

die Gleichung der projicirenden Ebene, und man muss nun, um die Gleichungen der Projection der gegebenen geraden Linie auf der gegebenen Ebene zu finden, die Gleichungen der Durchschnittslinie der projicirenden Ebene mit der gegebenen Ebene entwickeln. Die Gleichungen dieser Durchschnittslinie sind aber nach dem Obigen unmittelbar

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}(Bb-Ca)x-(Ab-C)y+(Aa-B)z\\ \qquad -A(ab_1-ba_1)+Bb_1-Ca_1\end{array}\right\}=0;$$

und durch Elimination von z und y aus diesen beiden Gleichungen erhält man ohne Schwierigkeit als Gleichungen der Projection der gegebenen geraden Linie auf der gegebenen Ebene die beiden folgenden Gleichungen:

$$8)\quad \left.\begin{array}{l}\{A(Aa-B)-C(Bb-Ca)\}x\\ +\{B(Aa-B)+C(Ab-C)\}y\\ +D(Aa-B)+C\{A(ab_1-ba_1)-Bb_1+Ca_1\}\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\{A(Ab-C)+B(Bb-Ca)\}x\\ +\{C(Ab-C)+B(Aa-B)\}z\\ +D(Ab-C)-B\{A(ab_1-ba_1)-Bb_1+Ca_1\}\end{array}\right\}=0;$$

oder, wie man hieraus leicht findet:

$$9)\quad \left.\begin{array}{l}\{(A^2+B^2+C^2)a-(A+Ba+Cb)B\}x\\ -\{A^2+B^2+C^2-(A+Ba+Cb)A\}y\\ +(Aa-B)(Cb_1+D)-(Ab-C)\,Ca_1\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\{(A^2+B^2+C^2)b-(A+Ba+Cb)\,C\}x\\ -\{A^2+B^2+C^2-(A+Ba+Cb)A\}z\\ +(Ab-C)(Ba_1+D)-(Aa-B)\,Bb_1\end{array}\right\}=0.$$

§. 2.

Sind x_1, y_1, z_1 die Coordinaten eines beliebigen Punktes in der gegebenen geraden Linie, und α, β, γ die von dem einen der

beiden Theile dieser geraden Linie, in welche dieselbe durch den Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ getheilt wird, mit den positiven Theilen dreier durch diesen Punkt gelegter, den primitiven Axen paralleler Axen eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel; so sind die Gleichungen der gegebenen geraden Linie bekanntlich

$$10)\quad \frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma},$$

und man hat also im Obigen

$$a=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha},\quad b=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha};$$

$$a_1=y_1-\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}x_1,\quad b_1=z_1-\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}x_1$$

zu setzen, wodurch man für die Projection der gegebenen geraden Linie auf der gegebenen Ebene leicht die drei folgenden Gleichungen erhält:

$$11)\quad \left.\begin{array}{r}\{(A^2+B^2+C^2)\cos\beta-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)B\}x\\ -\{(A^2+B^2+C^2)\cos\alpha-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)A\}y\\ +\{(B\cos\gamma-C\cos\beta)x_1+(C\cos\alpha-A\cos\gamma)y_1+(A\cos\beta-B\cos\alpha)z_1\}C\\ +(A\cos\beta-B\cos\alpha)D\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r}\{(A^2+B^2+C^2)\cos\gamma-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)C\}y\\ -\{(A^2+B^2+C^2)\cos\beta-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)B\}z\\ +\{(B\cos\gamma-C\cos\beta)x_1+(C\cos\alpha-A\cos\gamma)y_1+(A\cos\beta-B\cos\alpha)z_1\}A\\ +(B\cos\gamma-C\cos\beta)D\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r}\{(A^2+B^2+C^2)\cos\alpha-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)A\}z\\ -\{(A^2+B^2+C^2)\cos\gamma-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)C\}x\\ +\{(B\cos\gamma-C\cos\beta)x_1+(C\cos\alpha-A\cos\gamma)y_1+(A\cos\beta-B\cos\alpha)z_1\}B\\ +(C\cos\alpha-A\cos\gamma)D\end{array}\right\}=0.$$

Wenn die gegebene gerade Linie die gegebene Ebene in einem Punkte schneidet, so kann man den Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ in diesen Punkt legen, und da dann der Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ auch in der Projection der gegebenen geraden Linie auf der gegebenen Ebene liegt, so werden die Gleichungen 11) erfüllt, wenn man in denselben für x, y, z respective x_1, y_1, z_1 setzt. Zieht man aber die durch diese Substitution hervorgehenden Gleichungen von den Gleichungen 11) ab, so erhält man als Gleichungen der Projection der gegebenen geraden Linie auf der gegebenen Ebene die folgenden Gleichungen:

$$12)\quad \frac{x-x_1}{(A^2+B^2+C^2)\cos\alpha-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)A}$$

$$=\frac{y-y_1}{(A^2+B^2+C^2)\cos\beta-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)B}$$

$$=\frac{z-z_1}{(A^2+B^2+C^2)\cos\gamma-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)C},$$

wobei man noch zu bemerken hat, dass natürlich

$$13)\quad Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$$

ist.

Bezeichnet man durch φ, ψ, χ die 180° nicht übersteigenden Winkel, die einer der beiden Theile, in welche die Projection der gegebenen geraden Linie auf der gegebenen Ebene durch den Punkt $(x_1y_1z_1)$ getheilt wird, mit den positiven Theilen dreier durch diesen Punkt gelegter, den primitiven Axen paralleler Axen einschliesst; so sind bekanntlich

$$14)\quad \frac{x-x_1}{\cos\varphi}=\frac{y-y_1}{\cos\psi}=\frac{z-z_1}{\cos\chi}$$

die Gleichungen der Projection der gegebenen Linie auf der gegebenen Ebene, und aus diesen und den Gleichungen 12) erhält man daher leicht durch Division:

$$\frac{\cos\varphi}{(A^2+B^2+C^2)\cos\alpha-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)A}$$

$$=\frac{\cos\psi}{(A^2+B^2+C^2)\cos\beta-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)B}$$

$$=\frac{\cos\chi}{(A^2+B^2+C^2)\cos\gamma-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)C},$$

oder, wenn man die Nenner dieser drei Brüche der Kürze wegen respective durch F, G, H bezeichnet:

$$\frac{\cos\varphi}{F}=\frac{\cos\psi}{G}=\frac{\cos\chi}{H}.$$

Weil nun bekanntlich

$$\cos\varphi^2+\cos\psi^2+\cos\chi^2=1$$

ist, so ist mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$15)\quad \begin{cases} \cos\varphi = \pm \dfrac{F}{\sqrt{F^2+G^2+H^2}}, \\ \cos\psi = \pm \dfrac{G}{\sqrt{F^2+G^2+H^2}}, \\ \cos\chi = \pm \dfrac{H}{\sqrt{F^2+G^2+H_2}}. \end{cases}$$

Nun ist aber, wenn man der Kürze wegen

$$\begin{aligned} 16)\quad K^2 &= A^2+B^2+C^2-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2 \\ &= A^2\sin\alpha^2+B^2\sin\beta^2+C^2\sin\gamma^2 \\ &\quad -2(AB\cos\alpha\cos\beta+BC\cos\beta\cos\gamma+CA\cos\gamma\cos\alpha) \\ &= (A\cos\beta-B\cos\alpha)^2 \\ &\quad +(B\cos\gamma-C\cos\beta)^2 \\ &\quad +(C\cos\alpha-A\cos\gamma)^2 \end{aligned}$$

setzt, wo K eine positive Grösse bezeichnen soll, wie man leicht findet:

$$17)\quad F^2+G^2+H^2=(A^2+B^2+C^2)K^2,$$

und folglich mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$18)\quad \begin{cases} \cos\varphi = \pm \dfrac{F}{K\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\psi = \pm \dfrac{G}{K\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\chi = \pm \dfrac{H}{K\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \end{cases}$$

oder, wenn man für F, G, H ihre aus dem Obigen bekannten Werthe setzt:

$$19)\quad \begin{cases} \cos\varphi = \pm \dfrac{(A^2+B^2+C^2)\cos\alpha-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)A}{K\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\psi = \pm \dfrac{(A^2+B^2+C^2)\cos\beta-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)B}{K\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\chi = \pm \dfrac{(A^2+B^2+C^2)\cos\gamma-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)C}{K\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \end{cases}$$

immer mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander.

§. 3

Bezeichnen wir jetzt jeden der beiden 180° nicht übersteigenden Winkel, welche der Theil der gegebenen geraden Linie, dem die Winkel α, β, γ entsprechen, mit den beiden Theilen ihrer Projection auf der gegebenen Ebene einschliesst, im Allgemeinen durch ω; so ist bekanntlich

$$20)\quad \cos\omega = \cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\cos\psi + \cos\gamma\cos\chi,$$

und folglich nach den Gleichungen 19), weil bekanntlich

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$$

ist, wie man leicht findet:

$$21)\quad \cos\omega = \pm\frac{A^2+B^2+C^2-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{K\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

d. i. nach 16)

$$22)\quad \cos\omega = \pm\frac{K}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Weil nun bekanntlich K eine positive Grösse ist, so sieht man, dass man in allen obigen Formeln für den Theil der Projection der gegebenen geraden Linie auf der gegebenen Ebene, welcher mit dem Theile der gegebenen geraden Linie, dem die Winkel α, β, γ entsprechen, einen 90° nicht übersteigenden Winkel ein schliesst, die obern Zeichen, dagegen für den Theil der Projection der gegebenen geraden Linie auf der gegebnen Ebene, welcher mit dem Theile der gegebenen geraden Linie, dem die Winkel α, β, γ entsprechen, einen 90° übersteigenden Winkel einschliesst, die untern Zeichen nehmen muss.

Bezeichnen wir daher jetzt den 90° nicht übersteigenden Neigungswinkel des Theils der gegebenen geraden Linie, welchem die Winkel α, β, γ entsprechen, gegen die gegebene Ebene durch i, so ist für den Theil der Projection der gegebenen geraden Linie auf der gegebenen Ebene, welcher mit dem Theile der gegebenen geraden Linie, dem die Winkel α, β, γ entsprechen, den Winkel i einschliesst, nach dem Obigen:

$$23)\quad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{(A^2+B^2+C^2)\cos\alpha-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)A}{K\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\[2ex] \cos\psi = \dfrac{(A^2+B^2+C^2)\cos\beta-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)B}{K\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\[2ex] \cos\chi = \dfrac{(A^2+B^2+C^2)\cos\gamma-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)C}{K\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \end{cases}$$

und ausserdem hat man nach 22) die Formel

$$24)\quad \cos i = \frac{K}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

oder

$$25)\quad \cos i = \sqrt{1-\frac{(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}},$$

woraus sich unmittelbar die Gleichung

$$26)\ \sin i = \pm\frac{A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

ergiebt, in welcher man, da $\sin i$ immer positiv ist, das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, jenachdem die Grösse

$$A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma$$

positiv oder negativ ist.

Bezeichnet man die Neigungswinkel der gegebenen Ebene gegen die Ebenen der xy, xz, yz durch $\varkappa$, λ, μ; so ist bekanntlich

$$27)\quad \begin{cases} \cos\varkappa^2 = \dfrac{C^2}{A^2+B^2+C^2}, \\ \cos\lambda^2 = \dfrac{B^2}{A^2+B^2+C^2}, \\ \cos\mu^2 = \dfrac{A^2}{A^2+B^2+C^2}; \end{cases}$$

und nach dem Obigen ist folglich, wie man nach gehöriger Substitution dieser Ausdrücke mittelst der Formeln 23) und 24) ohne Schwierigkeit findet:

$$28)\quad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\cos\alpha}{\cos i} - \dfrac{A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma}{A\cos i}\cos\mu^2, \\ \cos\psi = \dfrac{\cos\beta}{\cos i} - \dfrac{A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma}{B\cos i}\cos\lambda^2, \\ \cos\chi = \dfrac{\cos\gamma}{\cos i} - \dfrac{A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma}{C\cos i}\cos\varkappa^2; \end{cases}$$

woraus sich, weil nach 27)

$$\cos\varkappa^2+\cos\lambda^2+\cos\mu^2=1$$

ist, auch leicht die Gleichung

$$29)\quad A\cos\varphi+B\cos\psi+C\cos\chi=0$$

ergiebt.

Die Winkel φ, ψ, χ entsprechen immer dem Theile der Projection der gegebenen Linie auf der gegebenen Ebene, welcher mit dem durch die Winkel α, β, γ bestimmten Theile der gegebenen geraden Linie den 90° nicht übersteigenden Winkel i einschliesst.

Die Coordinaten eines beliebigen Punktes in dem durch die Winkel α, β, γ bestimmten Theile der gegebenen geraden Linie, dessen Entfernung von dem Punkte $(x_1 y_1 z_1)$ wir durch ϱ bezeichnen wollen, sind

$$x_1+\varrho\cos\alpha,\ y_1+\varrho\cos\beta,\ z_1+\varrho\cos\gamma;$$

und die Gleichungen einer jeden durch diesen Punkt gelegten geraden Linie sind folglich

$$y-y_1-\varrho\cos\beta=M(x-x_1-\varrho\cos\alpha),$$

$$z-z_1-\varrho\cos\gamma=N(x-x_1-\varrho\cos\alpha).$$

Soll diese gerade Linie auf der gegebenen Ebene, deren Gleichung

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$

ist, senkrecht stehen, so muss nach den Principien der analytischen Geometrie

$$B=AM,\ C=AN,$$

also

$$M=\frac{B}{A},\quad N=\frac{C}{A}$$

sein, und die Gleichungen der durch den durch die Coordinaten

$$x_1+\varrho\cos\alpha,\ y_1+\varrho\cos\beta,\ z_1+\varrho\cos\gamma$$

bestimmten Punkt gelegten, auf der gegebenen Ebene senkrecht stehenden geraden Linie sind folglich

$$y-y_1-\varrho\cos\beta=\frac{B}{A}(x-x_1-\varrho\cos\alpha),$$

$$z-z_1-\varrho\cos\gamma=\frac{C}{A}(x-x_1-\varrho\cos\alpha);$$

oder

$$\frac{x-x_1-\varrho\cos\alpha}{A}=\frac{y-y_1-\varrho\cos\beta}{B}=\frac{z-z_1-\varrho\cos\gamma}{C}.$$

Bezeichnen wir jetzt die Coordinaten des Durchschnittspunkts dieses Perpendikels mit der gegebenen Ebene durch X, Y, Z; so haben wir zur Bestimmung dieser Coordinaten die folgenden Gleichungen:

$$\frac{X-x_1-\varrho\cos\alpha}{A}=\frac{Y-y_1-\varrho\cos\beta}{B}=\frac{Z-z_1-\varrho\cos\gamma}{C},$$

$$A(X-x_1)+B(Y-y_1)+C(Z-z_1)=0;$$

aus denen man leicht durch gewöhnliche Elimination

$$30)\quad\begin{cases} X=x_1+\varrho\cos\alpha-\dfrac{\varrho A(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)}{A^2+B^2+C^2}, \\ Y=y_1+\varrho\cos\beta-\dfrac{\varrho B(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)}{A^2+B^2+C^2}, \\ Z=z_1+\varrho\cos\gamma-\dfrac{\varrho C(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)}{A^2+B^2+C^2}; \end{cases}$$

oder

$$31)\quad\begin{cases} X=x_1-\varrho\dfrac{B(A\cos\beta-B\cos\alpha)+C(A\cos\gamma-C\cos\alpha)}{A^2+B^2+C^2}, \\ Y=y_1-\varrho\dfrac{C(B\cos\gamma-C\cos\beta)+A(B\cos\alpha-A\cos\beta)}{A^2+B^2+C^2}, \\ Z=z_1-\varrho\dfrac{A(C\cos\alpha-A\cos\gamma)+B(C\cos\beta-B\cos\gamma)}{A^2+B^2+C^2}, \end{cases}$$

erhält.

Ist nun erstens C positiv, so ist wegen der dritten der Gleichungen 30) die Grösse

$$A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma$$

positiv oder negativ, jenachdem $z_1+\varrho\cos\gamma$ grösser oder kleiner als Z ist. Wenn dagegen zweitens C negativ ist, so ist wegen der in Rede stehenden Gleichung die Grösse

$$A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma$$

positiv odor negativ, je nachdem $z_1+\varrho\cos\gamma$ kleiner oder grösser als Z ist.

Betrachtet man von jetzt an in dem Falle, wenn

C positiv

ist, i als positiv oder negativ, jenachdem die dritten Coordinaten aller Punkte in dem durch die Winkel α, β, γ bestimmten Theile der gegebenen geraden Linie grösser oder kleiner als die dritten Coordinaten der Fusspunkte der von diesen Punkten auf die gegebene Ebene gefällten Perpendikel sind; in dem Falle dagegen, wenn

C negativ

ist, i als positiv oder negativ, jenachdem die dritten Coordinaten aller Punkte in dem durch die Winkel α, β, γ bestimmten Theile der gegebenen geraden Linie kleiner oder grösser als die dritten Coordinaten der Fusspunkte der von diesen Punkten auf die gegebene Ebene gefällten Perpendikel sind; so kann man der Gleichung 26) zufolge offenbar in völliger Allgemeinheit

$$32)\quad \sin i = \frac{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

setzen.

Betrachten wir die oben durch $\varkappa$, λ, μ bezeichneten Winkel, ohne weiter ihre geometrische Bedeutung zu berücksichtigen, von jetzt an gewissermassen als blosse Hülfswinkel, so können wir

$$33)\quad \begin{cases} \cos\varkappa = \dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\lambda = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ \cos\mu = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \end{cases}$$

setzen, und erhalten nun leicht mittelst der Formeln 32) und 33)

$$34)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin i}{\cos\varkappa} = \dfrac{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}{C}, \\ \dfrac{\sin i}{\cos\lambda} = \dfrac{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}{B}, \\ \dfrac{\sin i}{\cos\mu} = \dfrac{A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma}{A}. \end{cases}$$

Mittelst dieser Ausdrücke und der Formeln 28) erhält man aber auf der Stelle:

$$35)\quad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\cos\alpha - \sin i\cos\mu}{\cos i}, \\ \cos\psi = \dfrac{\cos\beta - \sin i\cos\lambda}{\cos i}, \\ \cos\chi = \dfrac{\cos\gamma - \sin i\cos\varkappa}{\cos i}. \end{cases}$$

Nach dem Obigen ist bekanntlich

$$36)\quad \cos i = \cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\cos\psi + \cos\gamma\cos\chi,$$

und diese Gleichung, in Verbindung mit den Formeln 35) und der bekannten Gleichung

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1,$$

führt leicht zu der Gleichung

$$37)\quad \sin i = \cos\alpha\cos\mu + \cos\beta\cos\lambda + \cos\alpha\cos\varkappa.$$

II.

Projection einer geraden Linie auf einer Fläche überhaupt.

§. 4.

Unter der Projection einer geraden Linie auf einer beliebigen Fläche werden wir im Folgenden, um jede Zweideutigkeit zu vermeiden, immer die Gesammtheit aller derjenigen Punkte dieser Fläche verstehen, welche auf derselben eine solche Lage haben, dass die in ihnen auf die Fläche errichteten Normalen die gegebene gerade Linie schneiden.

Dies vorausgesetzt, seien nun

$$38)\quad \frac{x-f}{\cos\alpha} = \frac{y-g}{\cos\beta} = \frac{z-h}{\cos\gamma}$$

die Gleichungen einer geraden Linie im Raume, wo bekanntlich f, g, h die Coordinaten eines beliebigen Punkts in dieser geraden Linie, und α, β, γ die 180° nicht übersteigenden Winkel sind, die der eine der beiden Theile, in welche die gerade Linie durch den Punkt (fgh) getheilt wird, mit den positiven Theilen dreier durch diesen Punkt gelegter, den primitiven Axen paralleler Axen einschliesst. Ferner sei

$$39)\quad u = F(x, y, z) = 0$$

die Gleichung einer beliebigen krummen Fläche, und $(x_1 y_1 z_1)$ sei ein beliebiger Punkt auf derselben; so sind, wenn wir der Kürze wegen

$$40)\quad u_1 = F(x_1, y_1, z_1)$$

setzen, und alle im Folgenden vorkommenden Differentialquotienten partielle Differentialquotienten bezeichnen, nach den Principien der analytischen Geometrie

$$41)\quad \frac{x-x_1}{\frac{du_1}{dx_1}} = \frac{y-y_1}{\frac{du_1}{dy_1}} = \frac{z-z_1}{\frac{du_1}{dz_1}}$$

die Gleichungen der Normale der durch die Gleichung 39) charakterisirten krummen Fläche in dem Punkte $(x_1 y_1 z_1)$. Soll nun diese Normale die gegebene gerade Linie schneiden, d. h. soll $(x_1 y_1 z_1)$ ein Punkt der Projection der gegebenen geraden Linie auf der gegebenen krummen Fläche sein, so müssen die Gleichungen 38) und 41) durch dieselben x, y, z erfüllt werden, und man wird also die Bedingungsgleichung, dass die beiden in Rede stehenden Linien sich schneiden, erhalten, wenn man aus den vier Gleichungen 38) und 41) die drei Grössen x, y, z eliminirt.

Es ist aber

$$y-g=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}(x-f),$$

$$z-h=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}(x-f)$$

und

$$y-y_1=\frac{\frac{du_1}{dy_1}}{\frac{du_1}{dx_1}}(x-x_1),$$

$$z-z_1=\frac{\frac{du_1}{dz_1}}{\frac{du_1}{dx_1}}(x-x_1);$$

also durch Subtraction der dritten von der ersten und der vierten von der zweiten Gleichung:

$$y_1-g=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}(x-f)-\frac{\frac{du_1}{dy_1}}{\frac{du_1}{dx_1}}(x-x_1),$$

$$z_1-h=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}(x-f)-\frac{\frac{du_1}{dz_1}}{\frac{du_1}{dx_1}}(x-x_1);$$

oder

$$y_1-g=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}(x-f)-\frac{\frac{du_1}{dy_1}}{\frac{du_1}{dx_1}}\{x-f-(x_1-f)\},$$

$$z_1-h=\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}(x-f)-\frac{\frac{du_1}{dz_1}}{\frac{du_1}{dx_1}}\{x-f-(x_1-f)\};$$

woraus leicht

$$(x-f)\left(\frac{du_1}{dy_1}\cos\alpha-\frac{du_1}{dx_1}\cos\beta\right)$$
$$=\left\{(x_1-f)\frac{du_1}{dy_1}-(y_1-g)\frac{du_1}{dx_1}\right\}\cos\alpha,$$

$$(x-f)\left(\frac{du_1}{dz_1}\cos\alpha-\frac{du_1}{dx_1}\cos\gamma\right)$$
$$=\left\{(x_1-f)\frac{du_1}{dz_1}-(z_1-h)\frac{du_1}{dx_1}\right\}\cos\alpha;$$

und hieraus ferner durch Division und nach gehöriger Reduction

$$0=(x_1-f)\left(\frac{du_1}{dz_1}\cos\beta-\frac{du_1}{dy_1}\cos\gamma\right)$$
$$+(y_1-g)\left(\frac{du_1}{dx_1}\cos\gamma-\frac{du_1}{dz_1}\cos\alpha\right)$$
$$+(z_1-h)\left(\frac{du_1}{dy_1}\cos\alpha-\frac{du_1}{dx_1}\cos\beta\right)$$

oder

$$0=\left\{(y_1-g)\frac{du_1}{dz_1}-(z_1-h)\frac{du_1}{dy_1}\right\}\cos\alpha$$
$$+\left\{(z_1-h)\frac{du_1}{dx_1}-(x_1-f)\frac{du_1}{dz_1}\right\}\cos\beta$$
$$+\left\{(x_1-f)\frac{du_1}{dy_1}-(y_1-g)\frac{du_1}{dx_1}\right\}\cos\gamma$$

erhalten wird. Wenn man nun statt x_1, y_1, z_1 nur x, y, z setzt, so erhellet aus allem Vorhergehenden auf der Stelle, dass die Gleichungen der Projection der durch die Gleichungen 38) charakterisirten geraden Linie auf der durch die Gleichung 39) charakterisirten Fläche die folgenden sind:

$$42)\quad u=F(x,y,z)=0,$$

$$0=(x-f)\left(\frac{du}{dz}\cos\beta-\frac{du}{dy}\cos\gamma\right)$$
$$+(y-g)\left(\frac{du}{dx}\cos\gamma-\frac{du}{dz}\cos\alpha\right)$$
$$+(z-h)\left(\frac{du}{dy}\cos\alpha-\frac{du}{dx}\cos\beta\right)$$

oder

$$43)\quad u=F(x,y,z)=0,$$

$$0=\left\{(y-g)\frac{du}{dz}-(z-h)\frac{du}{dy}\right\}\cos\alpha$$
$$+\left\{(z-h)\frac{du}{dx}-(x-f)\frac{du}{dz}\right\}\cos\beta$$
$$+\left\{(x-f)\frac{du}{dy}-(y-g)\frac{du}{dx}\right\}\cos\gamma.$$

III.

Projection einer geraden Linie auf der Oberfläche eines elliptischen Sphäroids.

§. 5.

Indem wir zuerst nur in der Kürze das elliptische Sphäroid im Allgemeinen betrachten, nachher aber ausführlichere Betrachtungen über das elliptische Rotationssphäroid insbesondere anstellen werden, sei überhaupt

$$44)\quad \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

die Gleichung der Oberfläche eines elliptischen Sphäroids, so ist im Vorhergehenden

$$u=\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2-1,$$

und folglich

$$\frac{du}{dx}=\frac{2x}{a^2},\quad \frac{du}{dy}=\frac{2y}{b^2},\quad \frac{du}{dz}=\frac{2z}{c^2}$$

zu setzen. Also sind nach 42) oder 43)

$$45)\quad \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,$$

$$\left.\begin{array}{l}(x-f)\left(\frac{z}{c^2}\cos\beta-\frac{y}{b^2}\cos\gamma\right)\\ +(y-g)\left(\frac{x}{a^2}\cos\gamma-\frac{z}{c^2}\cos\alpha\right)\\ +(z-h)\left(\frac{y}{b^2}\cos\alpha-\frac{x}{a^2}\cos\beta\right)\end{array}\right\}=0$$

oder

$$46)\quad \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,$$

$$\left.\begin{array}{l}\{(y-g)\frac{z}{c^2}-(z-h)\frac{y}{b^2}\}\cos\alpha \\ +\{(z-h)\frac{x}{a^2}-(x-f)\frac{z}{c^2}\}\cos\beta \\ +\{(x-f)\frac{y}{b^2}-(y-g)\frac{x}{a^2}\}\cos\gamma\end{array}\right\}=0;$$

oder auch

$$47)\quad \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,$$

$$\left.\begin{array}{l}\{(z-h)\cos\beta-(y-g)\cos\gamma\}\frac{x}{a^2} \\ +\{(x-f)\cos\gamma-(z-h)\cos\alpha\}\frac{y}{b^2} \\ +\{(y-g)\cos\alpha-(x-f)\cos\beta\}\frac{z}{c^2}\end{array}\right\}=0$$

die Gleichungen der Projection der durch die Gleichungen 38) charakterisirten geraden Linie auf der durch die Gleichung 44) charakterisirten Oberfläche eines beliebigen elliptischen Sphäroids.

Für die Kugel ist $a=b=c$, und die Gleichungen der Projection der durch die Gleichungen 38) charakterisirten geraden Linie auf der Kugelfläche sind also nach dem Vorhergehenden, wie man leicht findet:

$$48)\quad x^2+y^2+z^2=a^2,$$

$$\left.\begin{array}{l}(h\cos\beta-g\cos\gamma)x \\ +(f\cos\gamma-h\cos\alpha)y \\ +(g\cos\alpha-f\cos\beta)z\end{array}\right\}=0;$$

wo aus der zweiten Gleichung erhellet, dass die in Rede stehende Projection ganz in einer durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Ebene liegt; und zugleich überzeugt man sich auf der Stelle, dass diese Ebene die durch den Mittelpunkt der Kugel und die gegebene gerade Linie gelegte Ebene ist, was auch Alles der Natur der Sache ganz gemäss und aus den ersten Elementen der Stereometrie bekannt ist.

§. 6.

Um die Gleichungen der Berührungslinie der Projection einer geraden Linie auf der Oberfläche eines beliebigen Ellipsoids in einem gegebenen Punkte derselben zu finden, wollen wir der Kürze wegen, ausser wie vorher

$$u = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1,$$

auch noch

$$v = \left\{(y-g)\frac{z}{c^2} - (z-h)\frac{y}{b^2}\right\}\cos\alpha$$

$$+ \left\{(z-h)\frac{x}{a^2} - (x-f)\frac{z}{c^2}\right\}\cos\beta$$

$$+ \left\{(x-f)\frac{x}{b^2} - (y-g)\frac{x}{a^2}\right\}\cos\gamma$$

setzen; so ist

$$\frac{du}{dx} = \frac{2x}{a^2},\ \frac{du}{dy} = \frac{2y}{b^2},\ \frac{du}{dz} = \frac{2z}{c^2}$$

und, wie man leicht findet:

$$\frac{dv}{dx} = \left\{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right)z - \frac{h}{a^2}\right\}\cos\beta$$

$$- \left\{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)y - \frac{g}{a^2}\right\}\cos\gamma,$$

$$\frac{dv}{dy} = \left\{\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)x - \frac{f}{b^2}\right\}\cos\gamma$$

$$- \left\{\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)z - \frac{h}{b^2}\right\}\cos\alpha,$$

$$\frac{dv}{dz} = \left\{\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)y - \frac{g}{c^2}\right\}\cos\alpha$$

$$- \left\{\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)x - \frac{f}{c^2}\right\}\cos\beta.$$

Nach den Principien der Differentialrechnung hat man nun bekanntlich zur Bestimmung der Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} \text{ und } \frac{dz}{dx}$$

die beiden Gleichungen:

$$\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=0,$$

$$\frac{dv}{dx}+\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{dv}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=0;$$

und erhält aus denselben mit Hülfe der vorher für

$$\frac{du}{dx},\frac{du}{dy},\frac{du}{dz}\text{ und }\frac{dv}{dx},\frac{dv}{dy},\frac{dv}{dz}$$

gefundenen Ausdrücke, wenn der Kürze wegen

$$A=\left\{\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)z-\frac{h}{b^2}\right\}\cos\alpha$$

$$-\left\{\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)x-\frac{f}{b^2}\right\}\cos\gamma,$$

$$B=\left\{\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)x-\frac{f}{c^2}\right\}\cos\beta$$

$$-\left\{\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)y-\frac{g}{c^2}\right\}\cos\alpha,$$

$$C=\left\{\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)y-\frac{g}{a^2}\right\}\cos\gamma$$

$$-\left\{\left(\frac{1}{a^2}\quad\frac{1}{c^2}\right)z-\frac{h}{a^2}\right\}\cos\beta$$

gesetzt wird, für die beiden in Rede stehenden Differentialquotienten leicht die folgenden Ausdrücke:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B\frac{x}{a^2}-C\frac{z}{c^2}}{A\frac{z}{c^2}-B\frac{y}{b^2}},\quad\frac{dz}{dx}=\frac{C\frac{y}{b^2}-A\frac{x}{a^2}}{A\frac{z}{c^2}-B\frac{y}{b^2}}.$$

Sind nun x_1, y_1, z_1 die Coordinaten eines beliebigen Punktes in der Projection der gegebenen geraden Linie auf der Oberfläche des Ellipsoids, so sind nach den Principien der höheren Geometrie, wenn der Kürze wegen

$$49)\quad A_1=\left\{\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)z_1-\frac{h}{b^2}\right\}\cos\alpha$$

$$-\left\{\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)x_1-\frac{f}{b^2}\right\}\cos\gamma,$$

$$B_1=\left\{\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)x_1-\frac{f}{c^2}\right\}\cos\beta$$

$$-\left\{\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)y_1-\frac{g}{c^2}\right\}\cos\alpha.$$

$$C_1 = \left\{ \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) y_1 - \frac{g}{a^2} \right\} \cos\gamma$$
$$- \left\{ \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right) z_1 - \frac{h}{a^2} \right\} \cos\beta$$

gesetzt wird,

$$50) \left\{ \begin{aligned} y - y_1 &= \frac{B_1 \frac{x_1}{a^2} - C_1 \frac{z_1}{c^2}}{A_1 \frac{z_1}{c^2} - B_1 \frac{y_1}{b^2}} (x - x_1), \\ z - z_1 &= \frac{C_1 \frac{y_1}{b^2} - A_1 \frac{x_1}{a^2}}{A_1 \frac{z_1}{c^2} - B_1 \frac{y_1}{b^2}} (x - x_1) \end{aligned} \right.$$

oder

$$51) \quad \frac{x - x_1}{A_1 \frac{z_1}{c^2} - B_1 \frac{y_1}{b^2}} = \frac{y - y_1}{B_1 \frac{x_1}{a^2} - C_1 \frac{z_1}{c^2}} = \frac{z - z_1}{C_1 \frac{y_1}{b^2} - A_1 \frac{x_1}{a^2}}$$

die Gleichungen der durch den Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ gehenden Berührenden der Projection der gegebenen geraden Linie auf der Oberfläche des Ellipsoids.

§. 7.

Ohne die vorhergehenden allgemeinen Untersuchungen, welche an sich interessant, für meinen nächsten Zweck für jetzt jedoch von geringerer Bedeutung sind, weiter auszuführen, will ich mich nun sogleich zu der Betrachtung der Projection einer geraden Linie auf der Oberfläche eines durch Umdrehung einer Ellipse um ihre zweite Axe entstandenen elliptischen Sphäroids wenden.

Weil bekanntlich

$$52) \quad \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung der Oberfläche eines durch Umdrehung einer Ellipse, deren erste und zweite Halbaxe a und b sind, um ihre zweite Axe entstandenen elliptischen Sphäroids, welches wir in der Kürze ein Rotationsellipsoid nennen wollen, ist; so sind nach 46)

$$53) \quad \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

$$\left. \begin{aligned} &\left\{ (y-g) \frac{z}{b^2} - (z-h) \frac{y}{a^2} \right\} \cos\alpha \\ &+ \left\{ (z-h) \frac{x}{a^2} - (x-f) \frac{z}{b^2} \right\} \cos\beta \\ &+ \left\{ (x-f) \frac{y}{a^2} - (y-g) \frac{x}{a^2} \right\} \cos\gamma \end{aligned} \right\} = 0$$

oder, wie hieraus mittelst einer einfachen Verwandlung der zweiten Gleichung leicht folgt:

$$54)\quad \frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1,$$

$$\frac{\{g\cos\gamma+(z-h)\cos\beta\}x-\{f\cos\gamma+(z-h)\cos\alpha\}y}{\{(x-f)\cos\beta-(y-g)\cos\alpha\}z}=\frac{a^2}{b^2}$$

die Gleichungen der Projection der durch die Gleichungen 38) charakterisirten geraden Linie auf der durch die Gleichung 52) charakterisirten Oberfläche des Rotationsellipsoids.

Bestimmen wir aus der zweiten der beiden vorhergehenden Gleichungen z, so erhalten wir

$$55)\quad z=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{(h\cos\beta-g\cos\gamma)x+(f\cos\gamma-h\cos\alpha)y}{g\cos\alpha-f\cos\beta+\frac{a^2-b^2}{a^2}(x\cos\beta-y\cos\alpha)},$$

und folglich, wenn wir

$$56)\quad e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2},\ 1-e^2=\frac{b^2}{a^2}$$

setzen:

$$56)\quad z=-(1-e^2)\frac{(h\cos\beta-g\cos\gamma)x+(f\cos\gamma-h\cos\alpha)y}{g\cos\alpha-f\cos\beta+e^2(x\cos\beta-y\cos\alpha)}.$$

Führen wir nun diesen Ausdruck von z in die erste der Gleichungen 54) ein, so erhalten wir zwischen x und y die folgende Gleichung:

$$57)\quad (1-e^2)\{(h\cos\beta-g\cos\gamma)x+(f\cos\gamma-h\cos\alpha)y\}^2$$
$$=(a^2-x^2-y^2)\{g\cos\alpha-f\cos\beta+e^2(x\cos\beta-y\cos\alpha)\}^2$$

§. 8.

Setzen wir jetzt, was wegen der ersten der Gleichungen 54) offenbar verstattet ist:

$$58)\quad \begin{cases} x=a\cos\Theta\cos\Omega, \\ y=a\sin\Theta\cos\Omega, \\ z=b\sin\Omega \end{cases}$$

und führen diese Ausdrücke von x, y, z in die Gleichung 56) ein, so erhalten wir nach einigen leichten Verwandlungen die Gleichung:

$$59)\quad (g\cos\alpha-f\cos\beta)\operatorname{tang}\Omega$$
$$=\{ae^2\cos\alpha\sin\Omega-(f\cos\gamma-h\cos\alpha)\sqrt{1-e^2}\}\sin\Theta$$
$$-\{ae^2\cos\beta\sin\Omega-(g\cos\gamma-h\cos\beta)\sqrt{1-e^2}\}\cos\Theta,$$

welche die Gleichung der Projection der durch die Gleichungen 38) charakterisirten geraden Linie auf der Oberfläche des Rotationsellipsoids zwischen Θ und Ω ist. Setzt man

$$60)\quad \begin{cases} R\cos\Phi = ae^2\cos\alpha\sin\Omega - (f\cos\gamma - h\cos\alpha)\sqrt{1-e^2}, \\ R\sin\Phi = ae^2\cos\beta\sin\Omega - (g\cos\gamma - h\cos\beta)\sqrt{1-e^2}; \end{cases}$$

so wird die vorhergehende Gleichung

$$61)\quad (g\cos\alpha - f\cos\beta)\tang\Omega = R\sin(\Theta - \Phi).$$

Auch ist, wie man mittelst der beiden Gleichungen 60) leicht findet:

$$g\cos\alpha - f\cos\beta = -\frac{R(\cos\alpha\sin\Phi - \cos\beta\cos\Phi)}{\cos\gamma\sqrt{1-e^2}},$$

und daher, wenn man dies in die Gleichung 61) einführt, nach einigen leichten Verwandlungen:

$$62)\quad \tang\Omega = -\frac{\cos\gamma\sin(\Theta - \Phi)\sqrt{1-e^2}}{\cos\alpha\sin\Phi - \cos\beta\cos\Phi},$$

oder auch

$$63)\quad \tang\Phi = \frac{\cos\beta - \cos\gamma\sin\Theta\cot\Omega\sqrt{1-e^2}}{\cos\alpha - \cos\gamma\cos\Theta\cot\Omega\sqrt{1-e^2}}.$$

§. 9.

Zunächst wollen wir nun den Differentialquotienten

$$\frac{d\Theta}{d\Omega}$$

entwickeln. Differentiiren wir zu dem Ende die Gleichung 61), so erhalten wir:

$$R\cos(\Theta - \Phi)\left(\frac{d\Theta}{d\Omega} - \frac{d\Phi}{d\Omega}\right) + \sin(\Theta - \Phi)\frac{dR}{d\Omega}$$
$$= (g\cos\alpha - f\cos\beta)\sec\Omega^2.$$

Durch Differentiation der beiden Gleichungen 60) ergiebt sich aber

$$\cos\Phi\frac{dR}{d\Omega} - R\sin\Phi\frac{d\Phi}{d\Omega} = ae^2\cos\alpha\cos\Omega,$$

$$\sin\Phi\frac{dR}{d\Omega} + R\cos\Phi\frac{d\Phi}{d\Omega} = ae^2\cos\beta\cos\Omega;$$

und hieraus ferner mittelst gewöhnlicher Elimination:

$$\frac{dR}{d\Omega} = ae^2 (\cos\alpha \cos\Phi + \cos\beta \sin\Phi) \cos\Omega,$$

$$R\frac{d\Phi}{d\Omega} = -ae^2 (\cos\alpha \sin\Phi - \cos\beta \cos\Phi) \cos\Omega.$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in die oben zwischen den Differentialquotienten

$$\frac{d\Theta}{d\Omega}, \frac{d\Phi}{d\Omega}, \frac{dR}{d\Omega}$$

gefundene Gleichung erhält man aber

$$\begin{aligned} & R\cos(\Theta - \Phi)\frac{d\Theta}{d\Omega} \\ & + ae^2 \left\{ \begin{array}{l} \sin(\Theta - \Phi)(\cos\alpha\cos\Phi + \cos\beta\sin\Phi) \\ +\cos(\Theta - \Phi)(\cos\alpha\sin\Phi - \cos\beta\cos\Phi) \end{array} \right\} \cos\Omega \\ & = (g\cos\alpha - f\cos\beta)\sec\Omega^2 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} & R\cos(\Theta - \Phi)\frac{d\Theta}{d\Omega} \\ & + ae^2 \left\{ \begin{array}{l} \cos\alpha(\sin(\Theta - \Phi)\cos\Phi + \cos(\Theta - \Phi)\sin\Phi) \\ -\cos\beta(\cos(\Theta - \Phi)\cos\Phi - \sin(\Theta - \Phi)\sin\Phi) \end{array} \right\} \cos\Omega \\ & = (g\cos\alpha - f\cos\beta)\sec\Omega^2, \end{aligned}$$

d. i.

$$\begin{aligned} & R\cos(\Theta - \Phi)\frac{d\Theta}{d\Omega} \\ & + ae^2(\cos\alpha\sin\Theta - \cos\beta\cos\Theta)\cos\Omega \\ & = (g\cos\alpha - f\cos\beta)\sec\Omega^2; \end{aligned}$$

also, wie man nach einigen leichten Verwandlungen findet:

$$64)\quad \frac{d\Theta}{d\Omega} = \frac{(g - ae^2\sin\Theta\cos\Omega^3)\cos\alpha - (f - ae^2\cos\Theta\cos\Omega^3)\cos\beta}{R\cos(\Theta - \Phi)\cos\Omega^2}.$$

Setzt man

$$65)\quad \left\{ \begin{array}{l} R^{(1)}\cos\Phi^{(1)} = \left(\dfrac{g}{\sin\Theta\cos\Omega^3} - ae^2\right)\cos\alpha, \\[2ex] R^{(1)}\sin\Phi^{(1)} = \left(\dfrac{f}{\cos\Theta\cos\Omega^3} - ae^2\right)\cos\beta; \end{array} \right.$$

so wird, wie man leicht findet:

$$66)\quad \frac{d\Theta}{d\Omega} = \cos\Omega\,\frac{R^{(1)}\sin(\Theta - \Phi^{(1)})}{R\cos(\Theta - \Phi)}.$$

§. 10.

Um nun ferner auch den zweiten Differentialquotienten

$$\frac{d^2\Theta}{d\Omega^2}$$

zu entwickeln, wollen wir zuerst die beiden Gleichungen 65) differentiiren. Dadurch erhalten wir

$$\cos\Phi^{(1)}\frac{dR^{(1)}}{d\Omega}-R^{(1)}\sin\Phi^{(1)}\frac{d\Phi^{(1)}}{d\Omega}$$

$$=\frac{3g\cos\alpha\tang\Omega\,(1-\frac{1}{3}\cot\Theta\cot\Omega\frac{d\Theta}{d\Omega})}{\sin\Theta\cos\Omega^3},$$

$$\sin\Phi^{(1)}\frac{dR^{(1)}}{d\Omega}+R^{(1)}\cos\Phi^{(1)}\frac{d\Phi^{(1)}}{d\Omega}$$

$$=\frac{3f\cos\beta\tang\Omega\,(1+\frac{1}{3}\tang\Theta\cot\Omega\frac{d\Theta}{d\Omega})}{\cos\Theta\cos\Omega^3};$$

und hieraus

$$\frac{dR^{(1)}}{d\Omega}=\frac{3g\cos\alpha\tang\Omega\,(1-\frac{1}{3}\cot\Theta\cot\Omega\frac{d\Theta}{d\Omega})}{\sin\Theta\cos\Omega^3}\cos\Phi^{(1)}$$

$$+\frac{3f\cos\beta\tang\Omega\,(1+\frac{1}{3}\tang\Theta\cot\Omega\frac{d\Theta}{d\Omega})}{\cos\Theta\cos\Omega^3}\sin\Phi^{(1)},$$

$$R^{(1)}\frac{d\Phi^{(1)}}{d\Omega}=-\frac{3g\cos\alpha\tang\Omega\,(1-\frac{1}{3}\cot\Theta\cot\Omega\frac{d\Theta}{d\Omega})}{\sin\Theta\cos\Omega^3}\sin\Phi^{(1)}$$

$$+\frac{3f\cos\beta\tang\Omega\,(1+\frac{1}{3}\tang\Theta\cot\Omega\frac{d\Theta}{d\Omega})}{\cos\Theta\cos\Omega^3}\cos\Phi^{(1)}.$$

Setzt man nun

$$67)\left\{\begin{array}{l}R^{(2)}\cos\Phi^{(2)}=\dfrac{g\cos\alpha\,(1-\frac{1}{3}\cot\Theta\cot\Omega\frac{d\Theta}{d\Omega})}{\sin\Theta},\\[2ex] R^{(2)}\sin\Phi^{(2)}=\dfrac{f\cos\beta\,(1+\frac{1}{3}\tang\Theta\cot\Omega\frac{d\Theta}{d\Omega})}{\cos\Theta};\end{array}\right.$$

so wird

$$68)\quad \begin{cases} \dfrac{dR^{(1)}}{d\Omega}=3R^{(2)}\dfrac{\text{tang}\,\Omega}{\cos\Omega^3}\cos(\Phi^{(2)}-\Phi^{(1)}), \\ R^{(1)}\dfrac{d\Phi^{(1)}}{d\Omega}=3R^{(2)}\dfrac{\text{tang}\,\Omega}{\cos\Omega^3}\sin(\Phi^{(2)}-\Phi^{(1)}); \end{cases}$$

und folglich auch

$$69)\quad \frac{d\Phi^{(1)}}{d\Omega}=\frac{\text{tang}(\Phi^{(2)}-\Phi^{(1)})}{R^{(1)}}\cdot\frac{dR^{(1)}}{d\Omega},$$

oder auch

$$70)\quad \frac{d\Phi^{(1)}}{d\Omega}=\text{tang}(\Phi^{(2)}-\Phi^{(1)})\,.\,\frac{dlR^{(1)}}{d\Omega},$$

wo l wie gewöhnlich den natürlichen Logarithmus bezeichnet.

Differentiirt man nun die aus 66) sich ergebende Gleichung

$$R\cos(\Theta-\Phi)\frac{d\Theta}{d\Omega}=R^{(1)}\sin(\Theta-\Phi^{(1)})\cos\Omega,$$

so erhält man

$$71)\quad R\cos(\Theta-\Phi)\frac{d^2\Theta}{d\Omega^2}$$
$$=-R^{(1)}\sin\Omega\sin(\Theta-\Phi^{(1)})$$
$$+\left\{\sin(\Theta-\Phi^{(1)})\frac{dR^{(1)}}{d\Omega}+R^{(1)}\cos(\Theta-\Phi^{(1)})\left(\frac{d\Theta}{d\Omega}-\frac{d\Phi^{(1)}}{d\Omega}\right)\right\}\cos\Omega$$
$$-\left\{\cos(\Theta-\Phi)\frac{dR}{d\Omega}-R\sin(\Theta-\Phi)\left(\frac{d\Theta}{d\Omega}-\frac{d\Phi}{d\Omega}\right)\right\}\frac{d\Theta}{d\Omega},$$

also nach 66)

$$72)\quad R^2\cos(\Theta-\Phi)^2\frac{d^2\Theta}{d\Omega^2}$$
$$=-RR^{(1)}\sin\Omega\cos(\Theta-\Phi)\sin(\Theta-\Phi^{(1)})$$
$$+R\cos\Omega\cos(\Theta-\Phi)\{\sin(\Theta-\Phi^{(1)})\frac{dR^{(1)}}{d\Omega}+R^{(1)}\cos(\Theta-\Phi^{(1)})(\frac{d\Theta}{d\Omega}-\frac{d\Phi^{(1)}}{d\Omega})\}$$
$$-R^{(1)}\cos\Omega\sin(\Theta-\Phi^{(1)})\{\cos(\Theta-\Phi)\frac{dR}{d\Omega}-R\sin(\Theta-\Phi)(\frac{d\Theta}{d\Omega}-\frac{d\Phi}{d\Omega})\}.$$

Setzt man noch

$$73)\quad \begin{cases} R^{(3)}\cos\Phi^{(3)}=ae^2\cos\alpha\cos\Omega, \\ R^{(3)}\sin\Phi^{(3)}=ae^2\cos\beta\cos\Omega; \end{cases}$$

so ist, wie aus dem Obigen leicht erhellet:

$$74)\quad \begin{cases} \dfrac{dR}{d\Omega} = R^{(3)} \cos(\varphi^{(3)} - \varphi), \\ R\dfrac{d\Phi}{d\Omega} = R^{(3)} \sin(\varphi^{(3)} - \varphi); \end{cases}$$

also

$$75)\quad \frac{d\Phi}{d\Omega} = \frac{\operatorname{tang}(\varphi^{(3)} - \varphi)}{R} \cdot \frac{dR}{d\Omega}$$

Führt man nun diesen Ausdruck von $\frac{d\Phi}{d\Omega}$ und den Ausdruck von $\frac{d\varphi^{(1)}}{d\Omega}$ aus 69) in die Gleichung 72) ein, so erhält man nach einigen leichten goniometrischen Reductionen:

$$76)\quad R^2 \cos(\Theta - \Phi)^2 \frac{d^2\Theta}{d\Omega^2}$$

$$= - RR^{(1)} \sin\Omega \cos(\Theta - \Phi) \sin(\Theta - \varphi^{(1)})$$

$$+ RR^{(1)} \cos\Omega \cos(\Phi - \varphi^{(1)}) \frac{d\Theta}{d\Omega}$$

$$- R^{(1)} \cos\Omega \frac{\sin(\Theta - \varphi^{(1)}) \cos(\Theta - \varphi^{(3)})}{\cos(\varphi - \varphi^{(3)})} \cdot \frac{dR}{d\Omega}$$

$$+ R \cos\Omega \frac{\cos(\Theta - \varphi) \sin(\Theta - \varphi^{(2)})}{\cos(\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)})} \cdot \frac{dR^{(1)}}{d\Omega},$$

mittelst welcher Formel der zweite Differentialquotient

$$\frac{d^2\Theta}{d\Omega^2}$$

ohne grosse Schwierigkeit berechnet werden kann, wenn man nur erst mittelst der oben entwickelten Formeln die Differentialquotienten

$$\frac{d\Theta}{d\Omega}, \quad \frac{dR}{d\Omega}, \quad \frac{dR^{(1)}}{d\Omega}$$

berechnet hat.

§. 11.

Die Gleichungen der dem Punkte $(x_1 y_1 z_1)$ der Projection der durch die Gleichungen 38) charakterisirten geraden Linie auf der Oberfläche des Rotationsellipsoids entsprechenden Berührenden dieser Projection sind bekanntlich

$$77)\quad \begin{cases} y - y_1 = \dfrac{dy_1}{dx_1}(x - x_1), \\ z - z_1 = \dfrac{dz_1}{dx_1}(x - x_1). \end{cases}$$

Setzen wir nun auf ähnliche Art wie im Vorhergehenden

$$78)\quad \left\{\begin{array}{l} x_1 = a\cos\Theta_1\cos\Omega_1\,, \\ y_1 = a\sin\Theta_1\cos\Omega_1\,, \\ z_1 = b\sin\Omega_1\,; \end{array}\right.$$

so ist, wie man durch Differentiation leicht findet:

$$79)\quad \left\{\begin{array}{l} dx_1 = -a(\sin\Theta_1\cos\Omega_1 d\Theta_1 + \cos\Theta_1\sin\Omega_1 d\Omega_1)\,, \\ dy_1 = a(\cos\Theta_1\cos\Omega_1 d\Theta_1 - \sin\Theta_1\sin\Omega_1 d\Omega_1)\,, \\ dz_1 = b\cos\Omega_1 d\Omega_1\,; \end{array}\right.$$

und folglich

$$80)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dy_1}{dx_1} = \dfrac{\sin\Theta_1\sin\Omega_1 - \cos\Theta_1\cos\Omega_1\dfrac{d\Theta_1}{d\Omega_1}}{\cos\Theta_1\sin\Omega_1 + \sin\Theta_1\cos\Omega_1\dfrac{d\Theta_1}{d\Omega_1}}\,, \\ \dfrac{dz_1}{dx_1} = -\dfrac{\cos\Omega_1\sqrt{1-e^2}}{\cos\Theta_1\sin\Omega_1 + \sin\Theta_1\cos\Omega_1\dfrac{d\Theta_1}{d\Omega_1}}\,; \end{array}\right.$$

oder

$$81)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dy_1}{dx_1} = \operatorname{tang}\Theta_1 \cdot \dfrac{1 - \cot\Theta_1\cot\Omega_1\dfrac{d\Theta_1}{d\Omega_1}}{1 + \operatorname{tang}\Theta_1\cot\Omega_1\dfrac{d\Theta_1}{d\Omega_1}}\,, \\ \dfrac{dz_1}{dx_1} = -\dfrac{\cot\Omega_1}{\cos\Theta_1} \cdot \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{1 + \operatorname{tang}\Theta_1\cot\Omega_1\dfrac{d\Theta_1}{d\Omega_1}}\,. \end{array}\right.$$

Also sind nach dem Obigen

$$82)\quad \left\{\begin{array}{l} y - y_1 = \operatorname{tang}\Theta_1 \cdot \dfrac{1 - \cot\Theta_1\cot\Omega_1\dfrac{d\Theta_1}{d\Omega_1}}{1 + \operatorname{tang}\Theta_1\cot\Omega_1\dfrac{d\Theta_1}{d\Omega_1}}(x - x_1)\,, \\ z - z_1 = -\dfrac{\cot\Omega_1}{\cos\Theta_1} \cdot \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{1 + \operatorname{tang}\Theta_1\cot\Omega_1\dfrac{d\Theta_1}{d\Omega_1}}(x - x_1) \end{array}\right.$$

die Gleichungen der dem Punkte $(x_1y_1z_1)$ der Projection der durch die Gleichungen 38) charakterisirten geraden Linie auf der Oberfläche des Rotationsellipsoids entsprechenden Berührenden dieser Projection.

Bezeichnet man die 180° nicht übersteigenden Winkel, die der eine der beiden Theile, in welche die in Rede stehende Berührende

durch den Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ getheilt wird, mit den positiven Theilen dreier durch diesen Punkt gelegter, den primitiven paralleler Axen einschliesst, durch φ_1, ψ_1, χ_1; so ist bekanntlich

$$\frac{\cos\psi_1}{\cos\varphi_1}=\frac{dy_1}{dx_1},\quad \frac{\cos\chi_1}{\cos\varphi_1}=\frac{dz_1}{dx_1};$$

und folglich, wie man mit Hülfe der Gleichung

$$\cos\varphi_1^2+\cos\psi_1^2+\cos\chi_1^2=1$$

leicht findet, mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$83)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy_1}{dx_1}\right)^2+\left(\dfrac{dz_1}{dx_1}\right)^2}}, \\[2ex] \cos\psi_1=\pm\dfrac{\dfrac{dy_1}{dx_1}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy_1}{dx_1}\right)^2+\left(\dfrac{dz_1}{dx_1}\right)^2}}, \\[2ex] \cos\chi_1=\pm\dfrac{\dfrac{dz_1}{dx_1}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy_1}{dx_1}\right)^2+\left(\dfrac{dz_1}{dx_1}\right)^2}}. \end{cases}$$

Nun findet man aber mit Hülfe der Gleichungen 80) leicht

$$84)\quad \sqrt{1+\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{dx_1}\right)^2}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{1-e^2\cos\Omega_1^2\left(1+\frac{1}{e}\cdot\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right)\left(1-\frac{1}{e}\cdot\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right)}}{\cos\Theta_1\sin\Omega_1+\sin\Theta_1\cos\Omega_1\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}}\ {}^{*}).$$

Also ist nach dem Obigen:

---

*) Statt

$$e^2\left(1+\frac{1}{e}\cdot\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right)\left(1-\frac{1}{e}\cdot\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right)$$

kann man hier und im Folgenden überall auch

$$\left(e+\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right)\left(e-\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right)$$

setzen.

$$85)\begin{cases}\cos\varphi_1=\pm\dfrac{\cos\Theta_1\sin\Omega_1+\sin\Theta_1\cos\Omega_1\dfrac{d\Theta_1}{d\Omega_1}}{\sqrt{1-e^2\cos\Omega_1^2(1+\dfrac{1}{e}\cdot\dfrac{d\Theta_1}{d\Omega_1})(1-\dfrac{1}{e}\cdot\dfrac{d\Theta_1}{d\Omega_1})}},\\ \cos\psi_1=\pm\dfrac{\sin\Theta_1\sin\Omega_1-\cos\Theta_1\cos\Omega_1\dfrac{d\Theta_1}{d\Omega_1}}{\sqrt{1-e^2\cos\Omega_1^2(1+\dfrac{1}{e}\cdot\dfrac{d\Theta_1}{d\Omega_1})(1-\dfrac{1}{e}\cdot\dfrac{d\Theta_1}{d\Omega_1})}},\\ \cos\chi_1=\mp\dfrac{\cos\Omega_1\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\cos\Omega_1^2(1+\dfrac{1}{e}\cdot\dfrac{d\Theta_1}{d\Omega_1})(1-\dfrac{1}{e}\cdot\dfrac{d\Theta_1}{d\Omega_1})}};\end{cases}$$

wo die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen.

Setzt man

$$86)\begin{cases}\tang P_1=\cot\Omega_1\dfrac{d\Theta_1}{d\Omega_1},\\ \sin Q_1=e\cos\Omega_1\sqrt{(1+\dfrac{1}{e}\cdot\dfrac{d\Theta_1}{d\Omega_1})(1-\dfrac{1}{e}\cdot\dfrac{d\Theta_1}{d\Omega_1})};\end{cases}$$

so ist, immer mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$87)\begin{cases}\cos\varphi_1=\pm\dfrac{\sin\Omega_1\cos(\Theta_1-P_1)}{\cos P_1\cos Q_1},\\ \cos\psi_1=\pm\dfrac{\sin\Omega_1\sin(\Theta_1-P_1)}{\cos P_1\cos Q_1},\\ \cos\chi_1=\mp\dfrac{\cos\Omega_1\sqrt{(1+e)(1-e)}}{\cos Q_1}.\end{cases}$$

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich, wenn ds das allgemeine Differential des Bogens der Projection der durch die Gleichungen 38) charakterisirten geraden Linie auf der Oberfläche des Rotationsellipsoids bezeichnet, auch leicht die Formel:

$$88)\quad ds^2=a^2\{\cos\Omega^2 d\Theta^2+(1-e^2\cos\Omega^2)\,d\Omega^2\}$$

oder

$$89)\quad ds^2=a^2\,d\Omega^2\{1-e^2\cos\Omega^2+\cos\Omega^2\left(\frac{d\Theta}{d\Omega}\right)^2\}.$$

§. 12.

Die Gleichung der Ebene des dem Punkte $(x_1y_1z_1)$ entsprechenden Meridians ist

$$y_1x-x_1y=0,$$

d. i. nach 78)

$$x \sin \Theta_1 - y \cos \Theta_1 = 0,$$

und die Gleichungen des in Rede stehenden Meridians sind folglich:

$$90)\quad \begin{cases} x \sin \Theta_1 - y \cos \Theta_1 = 0, \\ \dfrac{x^2+y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} - 1 = 0; \end{cases}$$

oder, wie man leicht findet:

$$91)\quad \begin{cases} x \sin \Theta_1 - y \cos \Theta_1 = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2 \cos \Theta_1{}^2} + \dfrac{z^2}{b^2} - 1 = 0. \end{cases}$$

Folglich sind die Gleichungen der durch den Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ gehenden Berührenden dieses Meridians:

$$92)\quad \begin{cases} y - y_1 = \quad (x - x_1) \operatorname{tang} \Theta_1, \\ z - z_1 = -(x - x_1) \dfrac{b^2 x_1}{a^2 z_1 \cos \Theta_1{}^2}; \end{cases}$$

oder nach 78):

$$93)\quad \begin{cases} y - y_1 = \quad (x - x_1) \operatorname{tang} \Theta_1, \\ z - z_1 = -(x - x_1) \dfrac{\cot \Omega_1}{\cos \Theta_1} \sqrt{1 - e^2}. \end{cases}$$

Bezeichnet man die 180° nicht übersteigenden Winkel, die der eine der beiden Theile, in welche die in Rede stehende Berührende durch den Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ getheilt wird, mit den positiven Theilen dreier durch diesen Punkt gelegter, den primitiven paralleler Axen einschliesst, durch $\varphi^{(1)}, \psi^{(1)}, \chi^{(1)}$; so ist

$$\frac{\cos \psi^{(1)}}{\cos \varphi^{(1)}} = \operatorname{tang} \Theta_1, \quad \frac{\cos \chi^{(1)}}{\cos \varphi^{(1)}} = -\frac{\cot \Omega_1}{\cos \Theta_1} \sqrt{1 - e^2};$$

und folglich

$$94)\quad \begin{cases} \cos \varphi^{(1)} = \pm \dfrac{\cos \Theta_1}{\sqrt{1 + (1 - e^2) \cot \Omega_1{}^2}}, \\ \cos \psi^{(1)} = \pm \dfrac{\sin \Theta_1}{\sqrt{1 + (1 - e^2) \cot \Omega_1{}^2}}, \\ \cos \chi^{(1)} = \mp \dfrac{\cot \Omega_1 \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 + (1 - e^2) \cot \Omega_1{}^2}}; \end{cases}$$

mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander

Bezeichnet man einen jeden der 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die durch den Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ gelegten Berührenden des diesem Punkte entsprechenden Meridians und der Projection der durch die Gleichungen 38) charakterisirten geraden Linie auf der Oberfläche des Rotationsellipsoids mit einander einschliessen, durch Γ_1; so ist bekanntlich in den vorher eingeführten Bezeichnungen:

$$\cos\Gamma_1 = \cos\varphi_1 \cos\varphi^{(1)} + \cos\psi_1 \cos\psi^{(1)} + \cos\chi_1 \cos\chi^{(1)},$$

also nach dem Vorhergehenden

$$95)\ \cos\Gamma_1 = \pm\sqrt{\frac{1-e^2\cos\Omega_1{}^2}{1-e^2\cos\Omega_1{}^2\left(1+\frac{1}{e}\cdot\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right)\left(-\frac{1}{e}\cdot\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right)}},$$

woraus sich ferner sogleich ergiebt:

$$96)\ \sin\Gamma_1 = \pm\frac{\cos\Omega_1\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}}{\sqrt{1-e^2\cos\Omega_1{}^2\left(1+\frac{1}{e}\cdot\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right)\left(1-\frac{1}{e}\cdot\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right)}},$$

in welcher letzteren Formel, da $\sin\Gamma_1$ immer positiv ist, das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, jenachdem

$$\cos\Omega_1\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}$$

eine positive oder eine negative Grösse ist.

Aus den beiden vorhergehenden Gleichungen ergiebt sich aber auch auf der Stelle

$$97)\ \tang\Gamma_1 = \pm\frac{\cos\Omega_1\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}}{\sqrt{1-e^2\cos\Omega_1{}^2}},$$

oder, wenn man

$$98)\ \sin U_1 = e\cos\Omega_1$$

setzt:

$$99)\ \tang\Gamma_1 = \pm\frac{\cos\Omega_1}{\cos U_1}\cdot\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}.$$

§. 13.

Wir wollen nun auch den dem Punkte $(x_1 y_1 z_1)$ der Projection der durch die Gleichungen 38) charakterisirten geraden Linie auf der Oberfläche des Rotationsellipsoids entsprechenden Krümmungshalbmesser r_1 dieser Projection zu bestimmen suchen, indem wir als bekannt voraussetzen, dass nach den Principien der höheren Geometrie, wenn der Kürze wegen

$$100)\quad T_1^2 = \left(\frac{dx_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2y_1}{d\Omega_1^2} - \frac{dy_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2x_1}{d\Omega_1^2}\right)^2 + \left(\frac{dx_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2z_1}{d\Omega_1^2} - \frac{dz_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2x_1}{d\Omega_1^2}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2z_1}{d\Omega_1^2} - \frac{dz_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2y_1}{d\Omega_1^2}\right)^2,$$

wo T_1 eine positive Grösse bezeichnen soll, gesetzt wird:

$$101)\quad r_1 = \frac{\left(\frac{ds_1}{d\Omega_1}\right)^3}{T_1}$$

ist, wo die Bedeutung des Symbols s_1 leicht von selbst erhellen wird. Weil nun nach 79)

$$\frac{dx_1}{d\Omega_1} = -a\left(\cos\Theta_1\sin\Omega_1 + \sin\Theta_1\cos\Omega_1\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right),$$

$$\frac{dy_1}{d\Omega_1} = -a\left(\sin\Theta_1\sin\Omega_1 - \cos\Theta_1\cos\Omega_1\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right),$$

$$\frac{dz_1}{d\Omega_1} = a\sqrt{1-e^2}.\cos\Omega_1$$

ist, so ist, wie man durch fernere Differentiation leicht findet:

$$\frac{d^2x_1}{d\Omega_1^2} = -a\left\{\begin{array}{c}\cos\Theta_1\cos\Omega_1 - 2\sin\Theta_1\sin\Omega_1\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\\ +\cos\Theta_1\cos\Omega_1\left(\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right)^2 + \sin\Theta_1\cos\Omega_1\frac{d^2\Theta_1}{d\Omega_1^2}\end{array}\right\},$$

$$\frac{d^2y_1}{d\Omega_1^2} = -a\left\{\begin{array}{c}\sin\Theta_1\cos\Omega_1 + 2\cos\Theta_1\sin\Omega_1\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\\ +\sin\Theta_1\cos\Omega_1\left(\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right)^2 - \cos\Theta_1\cos\Omega_1\frac{d^2\Theta_1}{d\Omega_1^2}\end{array}\right\},$$

$$\frac{d^2z_1}{d\Omega_1^2} = -a\sqrt{1-e^2}.\sin\Omega_1;$$

und hieraus erhält man ferner nach einigen keine Schwierigkeit darbietenden Reductionen:

$$\frac{dx_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2y_1}{d\Omega_1^2} - \frac{dy_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2x_1}{d\Omega_1^2}$$

$$= a^2\left\{\frac{d\Theta_1}{d\Omega}\left(1+\cos\Omega_1^2\left(\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right)\right) + \sin\Omega_1\left(\sin\Omega_1\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1} - \cos\Omega_1\frac{d^2\Theta_1}{d\Omega_1^2}\right)\right\},$$

$$\frac{dx_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2z_1}{d\Omega_1^2}-\frac{dz_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2x_1}{d\Omega_1^2}$$

$$=a^2\sqrt{1-e^2}.\left\{\begin{array}{c}\cos\Theta_1(1+\cos\Omega_1^2\left(\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right)^2)\\ -\sin\Theta_1\cos\Omega_1(\sin\Omega_1\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}-\cos\Omega_1\frac{d^2\Theta_1}{d\Omega_1^2})\end{array}\right\},$$

$$\frac{dy_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2z_1}{d\Omega_1^2}-\frac{dz_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2y_1}{d\Omega_1^2}$$

$$=a^2\sqrt{1-e^2}.\left\{\begin{array}{c}\sin\Theta_1(1+\cos\Omega_1^2\left(\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right)^2)\\ +\cos\Theta_1\cos\Omega_1(\sin\Omega_1\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}-\cos\Omega_1\frac{d^2\Theta_1}{d\Omega_1^2})\end{array}\right\}.$$

Setzt man aber der Kürze wegen

$$102)\quad\left\{\begin{array}{l}\varrho_1\sin E_1=1+\cos\Omega_1^2\left(\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right)^2,\\ \varrho_1\cos E_1=\cos\Omega_1(\sin\Omega_1\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}-\cos\Omega_1\frac{d^2\Theta_1}{d\Omega_1^2});\end{array}\right.$$

so wird, wie man leicht findet:

$$\frac{dx_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2y_1}{d\Omega_1^2}-\frac{dy_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2x_1}{d\Omega_1^2}$$

$$=\varrho_1 a^2(\cos E_1\tang\Omega_1+\sin E_1\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}),$$

$$\frac{dx_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2z_1}{d\Omega_1^2}-\frac{dz_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2x_1}{d\Omega_1^2}=\varrho_1 a^2\sqrt{1-e^2}.\sin(E_1-\Theta_1),$$

$$\frac{dy_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2z_1}{d\Omega_1^2}-\frac{dz_1}{d\Omega_1}\cdot\frac{d^2y_1}{d\Omega_1^2}=\varrho_1 a^2\sqrt{1-e^2}.\cos(E_1-\Theta_1);$$

und folglich

$$103)\quad T_1=\varrho_1 a^2\sqrt{1-e^2+(\cos E_1\tang\Omega_1+\sin E_1\frac{d\Theta_1}{d\Omega})^2}.$$

Weil nun nach 89)

$$\left(\frac{ds_1}{d\Omega_1}\right)^2=a^2\{1-e\cos\Omega_1^2+\cos\Omega_1^2\left(\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right)^2\},$$

oder nach Einführung der Hülfsgrössen ϱ_1 und E_1:

$$\left(\frac{ds_1}{d\Omega_1}\right)^2 = a^2(\varrho_1 \sin E_1 - e^2 \cos \Omega^2{}_1)$$

ist, so ist nach 101):

$$104)\quad r_1 = \frac{a(\varrho_1 \sin E_1 - e^2 \cos \Omega_1{}^2)^{\frac{3}{2}}}{\varrho_1 \sqrt{1 - e^2 + (\cos E_1 \operatorname{tang} \Omega_1 + \sin E_1 \frac{d\Theta_1}{d\Omega_1})^2}}.$$

Bezeichnet man die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts durch ξ_1, η_1, ζ_1; so ist bekanntlich, wenn der Kürze wegen

$$X_1 = \left(\frac{dx_1}{d\Omega_1} \cdot \frac{d^2y_1}{d\Omega_1{}^2} - \frac{dy_1}{d\Omega_1} \cdot \frac{d^2x_1}{d\Omega_1{}^2}\right) \frac{dy_1}{d\Omega_1}$$
$$+ \left(\frac{dx_1}{d\Omega_1} \cdot \frac{d^2z_1}{d\Omega_1{}^2} - \frac{dz_1}{d\Omega_1} \cdot \frac{d^2x_1}{d\Omega_1{}^2}\right) \frac{dz_1}{d\Omega_1},$$

$$Y_1 = \left(\frac{dy_1}{d\Omega_1} \cdot \frac{d^2x_1}{d\Omega_1{}^2} - \frac{dx_1}{d\Omega_1} \cdot \frac{d^2y_1}{d\Omega_1{}^2}\right) \frac{dx_1}{d\Omega_1}$$
$$+ \left(\frac{dy_1}{d\Omega_1} \cdot \frac{d^2z_1}{d\Omega_1{}^2} - \frac{dz_1}{d\Omega_1} \cdot \frac{d^2y_1}{d\Omega_1{}^2}\right) \frac{dz_1}{d\Omega_1},$$

$$Z_1 = \left(\frac{dz_1}{d\Omega_1} \cdot \frac{d^2x_1}{d\Omega_1{}^2} - \frac{dx_1}{d\Omega_1} \cdot \frac{d^2z_1}{d\Omega_1{}^2}\right) \frac{dx_1}{d\Omega_1}$$
$$+ \left(\frac{dz_1}{d\Omega_1} \cdot \frac{d^2y_1}{d\Omega_1{}^2} - \frac{dy_1}{d\Omega_1} \cdot \frac{d^2z_1}{d\Omega_1{}^2}\right) \frac{dy_1}{d\Omega_1};$$

oder, wie man nach gehöriger Entwickelung mittelst des Obigen leicht findet:

$$105)\quad X_1 = \varrho_1 a^3 \left\{\begin{array}{l} \sin(E_1 - \Theta_1) \cos \Omega_1 \\ -\cos E_1 \sin \Theta_1 \sin \Omega_1 \operatorname{tang} \Omega_1 \\ +\cos(E_1 + \Theta_1) \sin \Omega_1 \frac{d\Theta_1}{d\Omega_1} \\ +\sin E_1 \cos \Theta_1 \cos \Omega_1 \left(\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right)^2 \end{array}\right\}$$
$$- \varrho_1 a^3 e^2 \sin(E_1 - \Theta_1) \cos \Omega_1,$$

$$Y_1 = \varrho_1 a^3 \left\{\begin{array}{l} \cos(E_1 - \Theta_1) \cos \Omega_1 \\ +\cos E_1 \cos \Theta_1 \sin \Omega_1 \operatorname{tang} \Omega_1 \\ +\sin(E_1 + \Theta_1) \sin \Omega_1 \frac{d\Theta_1}{d\Omega_1} \\ +\sin E_1 \sin \Theta_1 \cos \Omega_1 \left(\frac{d\Theta_1}{d\Omega_1}\right)^2 \end{array}\right\},$$
$$- \varrho_1 a^3 e^2 \cos(E_1 - \Theta_1) \cos \Omega_1$$

$$Z_1 = \varrho_1 a^3 \sqrt{1-e^2}.(\sin E_1 \sin \Omega_1 - \cos E_1 \cos \Omega_1 \frac{d\Theta_1}{d\Omega_1})$$

$$= a^3 \sqrt{1-e^2}.(\sin\Omega_1 + \cos\Omega_1{}^3 \frac{d\Theta_1}{d\Omega_1} \cdot \frac{d^2\Theta_1}{d\Omega_1{}^2})$$

gesetzt wird:

$$106) \begin{cases} \xi_1 = x_1 - \dfrac{\left(\dfrac{ds_1}{d\Omega_1}\right)^2}{T_1{}^2} X_1, \\ \eta_1 = y_1 - \dfrac{\left(\dfrac{ds_1}{d\Omega_1}\right)^2}{T_1{}^2} Y_1, \\ \zeta_1 = z_1 - \dfrac{\left(\dfrac{ds_1}{d\Omega_1}\right)^2}{T_1{}^2} Z_1. \end{cases}$$

Ich will jetzt diese Untersuchungen nicht weiter ausdehnen, behalte mir aber vor, in einem späteren Aufsatze auf einige Anwendungen zurück zu kommen, welche sich von denselben machen lassen, wozu die im Vorhergehenden mitgetheilten Entwickelungen völlig genügen.

XXXIX.

Ist $\int \frac{dx}{x} = lx + \text{const.}$, oder $= \frac{1}{2} l(x^2) + \text{const.}$?

Von

dem Herrn Doctor O. Schlömilch,

Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Diese Frage lässt sich auf folgende Weise beantworten. Setzt man in einem Integrale wie

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$x=\frac{z}{m}$, wo z eine neue Veränderliche, m eine constante Grösse ist, so wird $dx=\frac{dz}{m}$; wenn ferner $x=a$ und $x=b$ geworden ist, hat z die Werthe ma und mb angenommen. Daher ist jetzt

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{ma}^{mb} f\left(\frac{z}{m}\right)\frac{dz}{m} \ldots. \quad (1)$$

oder, weil es in einem bestimmten Integrale ganz gleichgültig ist, mit welchem Buchstaben die Veränderliche der Integration bezeichnet wird,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{ma}^{mb} f\left(\frac{x}{m}\right)\frac{dx}{m}.$$

Aus diesem Satze ergiebt sich z. B. für $a=0$, $b=u$, $m=-1$, $f(x)=\frac{1}{x}$.

$$\int_0^u \frac{dx}{x}=\int_0^{-u}\frac{(-1)}{x}\cdot\frac{dx}{-1}=\int_0^{-u}\frac{dx}{x} \ldots. \quad (2)$$

Setzen wir nun

$$\int\frac{dx}{x}=\varphi(x)+\text{const.}, \ldots. \quad (3)$$

so ist

$$\int_0^u \frac{dx}{x}=\varphi(u)-\varphi(0),$$

$$\int_0^{-u}\frac{dx}{x}=\varphi(-u)-\varphi(0);$$

und vermöge der Gleichung (2)

$$\varphi(u)=\varphi(-u) \ldots.. \quad (4)$$

Man hat aber eine doppelte Wahl; entweder $\varphi(x)=lx$, oder $\varphi(x)=\frac{1}{2}l(x^2)$; indem aus beiden folgt $d\varphi(x)=\frac{dx}{x}$, wie es nach (3) sein muss. Gleichwohl sind die Functionen lx und $\frac{1}{2}l(x^2)$ sehr von einander verschieden; die erstere wird nämlich für negative Werthe der Veränderlichen imaginär, während die zweite für ne-

gative x die nämlichen Werthe giebt, wie für gleich grosse positive x. In der That ist

$$\text{für } \varphi(x) = lx,\ \varphi(-x) = lx + l(-1) = lx \pm (2k+1)\pi\sqrt{-1}$$

oder

$$\varphi(-u) = lu \pm (2k+1)\pi\sqrt{-1},$$

dagegen für $\varphi(x) = \frac{1}{2}l(x^2), \varphi(-x) = \frac{1}{2}l(\overline{-x}^2) = \frac{1}{2}(lx^2)$

oder

$$\varphi(-u) = \varphi(u).$$

Da nun aber nach No. (4) $\varphi(-u) = \varphi(+u)$ sein soll, so kann man $\varphi(x)$ nicht $= lx$ setzen, sondern muss durchaus $\varphi(x) = \frac{1}{2}l(x^2)$ nehmen. Es ist daher nach No. (3)

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}l(x^2) + \text{const. und nicht } = lx + \text{const.}$$

Weiss man im Voraus, dass x keine negativen Werthe annehmen wird, so kann man auch die zweite Form nehmen, weil beide Formen für positive x identisch sind; dagegen würde es total falsch sein, sich dies auch bei negativen x erlauben zu wollen. Welchen Unterschied dies macht, sieht man z. B. an dem Integrale

$$\int_{-2}^{3} \frac{dx}{x},$$

dessen Werth nach dem Obigen $= \frac{1}{2}l(3^2) - \frac{1}{2}l(2^2) = \frac{1}{2}l\frac{9}{4} = \frac{3}{2}$ ist, während er bei gewöhnlicher Schreibweise $l(3) - l(-2)$, also imaginär sein müsste.

XL.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von dem Herrn Professor Dr. F. Stegmann an der Universität zu Marburg.

I) Es sei über dem Durchmesser AB ein Halbkreis $AuMwB$ beschrieben und in einem beliebigen Punkt P zwischen A und B des Perpendikel PM auf den Durchmesser gesetzt, welches in M den Halbkreis schneidet. Wenn man nun auf der Verlängerung dieses Perpendikels über M hinaus einen beliebigen Punkt S annimmt und die zwei Sehnen AM, BM nebst den zwei Sekanten AS, BS zieht, welche letztere in den Punkten u, w die Peripherie des Halbkreises durchschneiden, so wird Bogen $Mu \overset{}{\underset{<}{=}} Mw$ sein, je nachdem $AP \overset{>}{\underset{<}{=}} BP$ angenommen worden ist.

II) Wenn man in einem Kreis eine beliebige Sehne AC zieht und an deren Endpunkten die Tangenten AM und BM construirt, deren Durchschnittspunkt M sei; wenn man alsdann von dem einen Endpunkt C der Sehne AC eine zweite Sehne gleich der Hälfte der ersten, nämlich $CB = \frac{1}{2} AC$ in die Peripherie trägt und von deren Endpunkt B aus die Sekante BM zieht, deren zweiter Durchschnittspunkt mit der Peripherie U heisse; so wird U der Halbirungspunkt des Bogens $AUCB$, nämlich $AU = BU$ sein.

Es sind zwar zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich die Sehne $CB = \frac{1}{2} AC$ von C aus entweder in den grösseren oder in den kleineren der beiden von der Sehne AC gebildeten Kreisabschnitte eingetragen wird, für beide Fälle lässt sich jedoch der Beweiss mit ganz denselben Worten führen.

III) Wenn man in einer gleichseitigen Hyperbel von den Endpunkten eines beliebigen Durchmessers AB die Verbindungssehnen AM und BM nach einem beliebig auf der Hyperbel angenommenen Punkt M zieht, und von diesem Punkt M zugleich Perpendikel auf die Asymptoten fällt; so wird das eine dieser Perpendikel den Winkel AMB, das andere aber den durch die Verlängerung von AM oder BM entstandenen Nebenwinkel von AMB halbiren.

Lehrsatz aus der Differenzialrechnung.

Von dem Herrn Doctor O. Schlömilch, Privatdocenten an der Universität zu Jena.

Setzt man

$$^np_0=1,\ ^np_r=(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r)n_r,$$

wo n_r den $r$ten Binomialkoëfficienten des Exponenten n bezeichnet, so ist

$$d^n(e^{-\frac{1}{x}}):dx^n$$

$$=\left[\frac{^np_0}{x^{2n}}-\frac{^np_1}{x^{2n-1}}+\frac{^np_2}{x^{2n-2}}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{^np_{n+1}}{x^{n+1}}\right]e^{-\frac{1}{x}}.$$

So ist z. B. für $n=4$

$$d^4(e^{-\frac{1}{x}}):dx^4=\left[\frac{1}{x^8}-\frac{12}{x^7}+\frac{36}{x^6}-\frac{24}{x^5}\right]e^{-\frac{1}{x}}.$$

Wie lässt sich dies allgemein beweisen?

Herr Anton Ritman zu Wien hat mir für das Archiv die folgende Aufgabe mitgetheilt.

Man denke sich einen Kegel mit kreisförmiger Grundfläche und lege durch dessen Axe eine auf seiner Grundfläche senkrecht stehende Ebene, deren Durchschnitt mit dem Kegel der sogenannte Axentriangel ist. Lässt man jetzt um einen beliebigen, aber gegebenen Punkt in der einen der beiden in der Kegelfläche liegenden Seiten dieses Axentriangels eine Ebene sich so bewegen, dass dieselbe immer auf der Ebene des Axentriangels senkrecht steht, so ist der Durchschnitt mit der Kegelfläche bekanntlich jederzeit ein Kegelschnitt, und man kann nun fragen, welches die geometrischen Oerter der Brennpunkte aller dieser Kegelschnitte sind. G.

Die beiden Gleichungen

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}\ \text{und}\ (x-z)(y-z)=z^2$$

sind immer identisch.

XLI.

Miscellen.

Herr A. J. H. Vincent (professeur au collége Saint-Louis) hat die Berechnung der Zahl π auf eine Rechnungsregel gebracht, welche sich zwar sehr leicht aus ganz bekannten Sätzen ergiebt, aber dessenungeachtet bemerkenswerth ist und bei'm Elementarunterrichte berücksichtigt zu werden verdient, weshalb ich dieselbe im Folgenden mittheilen werde.

Bezeichnen wir die Flächenräume des in und um einen Kreis, dessen Halbmesser r sein mag, beschriebenen

$$n\text{ecks},\ 2n\text{ecks},\ 4n\text{ecks},\ 8n\text{ecks},\ 16n\text{ecks},\ \ldots.$$

respective durch

$$F_n,\ F_{2n},\ F_{4n},\ F_{8n},\ F_{16n},\ \ldots.$$

und

$$\mathfrak{F}_n,\ \mathfrak{F}_{2n},\ \mathfrak{F}_{4n},\ \mathfrak{F}_{8n},\ \mathfrak{F}_{16n},\ \ldots.;$$

so ist nach einem sehr bekannten Satze

$$F_{2n}=\sqrt{F_n\mathfrak{F}_n} \text{ und } \mathfrak{F}_{2n}=\frac{2F_n\mathfrak{F}_n}{F_n+F_{2n}};$$

also

$$\frac{1}{F_{2n}}=\sqrt{\frac{1}{F_n}\cdot\frac{1}{\mathfrak{F}_n}} \text{ und } \frac{1}{\mathfrak{F}_{2n}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathfrak{F}_n}+\frac{F_{2n}}{F_n\mathfrak{F}_n}\right),$$

d. i.

$$\frac{1}{F_{2n}}=\sqrt{\frac{1}{F_n}\cdot\frac{1}{\mathfrak{F}_n}} \text{ und } \frac{1}{\mathfrak{F}_{2n}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathfrak{F}_n}+\frac{1}{F_{2n}}\right).$$

Weil nun $r^2\pi$ der Flächeninhalt des Kreises ist, so sind, wenn man $r=1$ setzt, offenbar jede zwei einander benachbarte Glieder der Reihe:

$$\frac{1}{F_n}$$

$$\frac{1}{\mathfrak{F}_n},$$

$$\frac{1}{F_{2n}}=\sqrt{\frac{1}{F_n}\cdot\frac{1}{\mathfrak{F}_n}},$$

$$\frac{1}{\mathfrak{F}_{2n}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathfrak{F}_n}+\frac{1}{F_{2n}}\right),$$

$$\frac{1}{F_{4n}}=\sqrt{\frac{1}{F_{2n}}\cdot\frac{1}{\mathfrak{F}_{2n}}}$$

$$\frac{1}{\mathfrak{F}_{4n}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathfrak{F}_{2n}}+\frac{1}{F_{4n}}\right),$$

u. s. w.

zwei Gränzen, zwischen denen der Bruch $\frac{1}{\pi}$ liegt. Wie aber die Glieder der vorhergehenden Reihe nach und nach aus einander gebildet werden, fallt auf der Stelle in die Augen, indem man nämlich vom dritten Gliede an jedes Glied erhält, wenn man zwischen den beiden unmittelbar vorhergehenden Gliedern abwechselnd die mittlere geometrische Proportionale und die mittlere arithmetische Proportionale nimmt.

Setzen wir jetzt $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$, so ist der Flächeninhalt des Kreises $\frac{\pi}{2}$, und die Flächenräume des in und um den Kreis beschriebenen regulären Vierecks sind respective 1 und 2, so dass also $F_4=1$ und $\mathfrak{F}_4=2$ ist. Bildet man nun aus 1 und $\frac{1}{2}$ nach und nach eine Reihe, in welcher vom dritten Gliede an jedes Glied abwechselnd die mittlere geometrische und die mittlere arithmetische Proportionale zwischen den beiden unmittelbar vorhergehenden Gliedern ist, so sind nach dem Vorhergehenden jede zwei einander benachbarte Glieder dieser Reihe zwei Gränzen, zwischen denen $\frac{2}{\pi}$ liegt. Weil aber $\frac{1}{2}$ die mittlere arithmetische Proportionale zwischen 0 und 1 ist, und 0 und 1 offenbar auch zwei Gränzen von $\frac{2}{\pi}$ sind, so kann man die Regel zur Berechnung dieser Grösse auch auf folgende Art aussprechen:

Wenn man aus 0 und 1 nach und nach eine Reihe bildet, in welcher vom dritten Gliede an jedes Glied abwechselnd die mittlere arithmetische Proportionale und die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden unmittelbar vorhergehenden Gliedern ist, so liefern jede zwei einander benachbarte Glieder dieser Reihe zwei Gränzen, zwischen denen der Bruch $\frac{2}{\pi}$ enthalten ist.

Dies ist die von Herrn Vincent gegebene Rechnungsregel.

G.

Bemerkung zu einer Stelle im Archiv Theil V. S. 220.

Von Herrn F. Arndt, Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Es ist dort der Satz aufgestellt: „Wenn die Sinus der Winkel eines ebenen Dreiecks eine arithmetische Progression bilden, so bilden auch jederzeit die Cotangenten der halben Winkel dieses Dreiecks eine arithmetische Progression.“

Herr Director Nizze hatte die Güte, mir einen Versuch über die Beweisführung dieses Satzes vorzulegen, und war zu einem Resultat gekommen, welches ihn veranlasste, starken Zweifel an der Richtigkeit der Behauptung zu hegen. Ich erlaube mir dieserhalb, meine eigene Entwickelung mitzutheilen, aus welcher sich ergiebt, dass der obige Satz allerdings nicht unter den gemachten Voraussetzungen richtig ist, vielmehr noch eine neue Annahme hinzukommen muss, die sich auf folgende Weise ergiebt.

Aus $2\sin\beta=\sin\alpha+\sin\gamma$ folgt, wenn man die halben Winkel einführt, $2\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta=\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)$, oder da (wegen $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$) $\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)=\cos\frac{1}{2}\beta$ ist,

$$1.\quad \sin\tfrac{1}{2}\beta=\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma).$$

Ferner haben wir

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha+\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\gamma=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}{\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\gamma}=\frac{\cos\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\gamma},\text{ oder}$$

$$2.\quad \cos\tfrac{1}{2}\beta=\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\gamma(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha+\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\gamma).$$

Dividirt man nun 2. durch 1., so entsteht, nachdem mit 2 multiplicirt worden,

$$3.\quad 2\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\beta=\frac{4\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha+\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\gamma).$$

Dies ist die richtige Gleichung. Soll sie in die im Archiv aufgestellte übergehen, so muss zwischen den Winkeln α und γ noch die durch die Gleichung

$$\frac{4\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}=1$$

ausgedrückte Abhängigkeit Statt finden. Statt dieser kann man setzen

$$4\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\gamma=\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\gamma+\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\gamma,$$

$$\text{also } 3\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\gamma=\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\gamma,$$

oder

$$4.\quad 3=\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\gamma.$$

In dem Annuaire de l'Académie Royale des sciences et belles lettres de Bruxelles. Dixième année. Bruxelles. 1844. p. 129. erzählt Herr Quetelet in seiner interessanten Notice sur Alexis Bouvard gelegentlich folgenden Vorfall, welcher Herrn Arago in seiner Eigenschaft als Offizier der Nationalgarde in den Tagen der französischen Revolution passirte.

Pendant ces émeutes M. Arago a couru plus d'un danger. Je tiens de lui-même que, sur un des ponts de Paris et dans un instant d'exaspération populaire contre la garde nationale, il faillit être jeté dans la Seine et ne dut son salut qu'à une plaisanterie. Des gens du peuple le soulevaient déjà pour le lancer par-dessus le parapet, lorsque il leur dit avec une admirable présence d'esprit: Hé bien! hé bien! Que faites-vous donc? Mais je ne sais pas nager! moi! Ces mots désarmèrent les furieux, et l'on finit par rire.

Der berühmte Optiker Robert-Aglaé Cauchoix ist am 8ten Februar 1845 zu Deuil bei Montmorency, wohin er sich seiner durch viele und grosse Arbeiten geschwächten Gesundheit wegen zurückgezogen hatte, gestorben. Er war am 24sten April 1776 zu Cormeilles-en-Parisis geboren, und widmete sich im Jahre 1792 dem Stande eines Optikers. Seine letzten grossen Arbeiten waren zwei grosse Fernröhre, das eine mit einem eilfzölligen, das andere mit einem dreizehnzölligen Objectiv, von denen das erste die Universität Cambridge, das zweite die Sternwarte von Armagh in Irland besitzt.

Sitzung der mathematisch-physikalischen Klasse der Akademie der Wissenschaften zu München vom 14ten December 1844.

Herr Akademiker v. Steinheil zeigt der Klasse ein von ihm erfundenes kleines Instrument vor, Passagen-Prisma genannt, welches auf Reisen zu Orts- und Zeitbestimmungen, so wie zur Regulirung des Ganges der Uhren mit Vortheil benutzt werden kann. Es ist dieses Instrument nur 2 Loth schwer und 1 Cubikzoll gross. Einfachheit in der Construction und Transportabilität, so wie bedeutende Sicherheit und Präcision der damit anzustellenden Beobachtungen, empfehlen es der Aufmerksamkeit der Klasse.

Preisaufgabe der Akademie der Wissenschaften zu Paris für 1846.

Les géomètres auxquels on doit les beaux développements, que la théorie des fonctions elliptiques a reçus dans ces derniers temps, ont aussi ouvert la route pour l'étude de nouvelles transcendantes d'ordre supérieur, dont les plus simples (nommées par M. Jacobi fonctions abéliennes de première classe) sont les fonctions de deux variables à quatre périodes distinctes. Néanmoins cette étude présente des difficultés nombreuses, et, quoique des travaux récents aient un peu étendu le cercle de nos connaissances sur cet objet, on est encore aujourd'hui bien loin du degré de per-

fection que nous offre la théorie des fonctions elliptiques. Pour encourager les efforts des géomètres dans cette matière à la fois très importante et très délicate, l'Académie la propose comme sujet du grand prix de mathématiques à decerner en 1846. La question peut être enoncée en ces termes:

Perfectionner dans quelque point essentiel la théorie des fonctions abéliennes, ou, plus généralement, des transcendantes qui résultent de la consideration des intégrales de quantités algébriques.

Le prix consistera en une médaille d'or de la valeur de 3000 francs. Les mémoires devront être arrivés au secrétariat de l'Institut avant le 1er Octobre 1846. Ce terme est de rigueur. Les noms des auteurs seront contenus dans un billet cacheté qui ne sera ouvert que si la pièce est couronnée. La commission, qui avait été chargée de proposer le sujet du prix était composée de MM. Arago, Binet, Poinsot, Cauchy et Liouville, rapporteur.

Herleitung des Differentialquotienten $\frac{d.x^n}{dx}=nx^{n-1}$, ohne Unterscheidung der Art des reellen Exponenten n.

Von dem Herrn Professor Dr. Matzka zu Tarnow in Galizien.

Der Differentialquotient $\frac{d.x^n}{dx}$, da er vermöge seiner Bedeutung $=\lim\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}$ für $\lim \Delta x=0$ ist, muss im Allgemeinen eine gewisse Function von x und n sein, die wir vorläufig durch $\varphi(x,n)$ darstellen und zu bestimmen unternehmen wollen. Zu diesem Zwecke verwandeln wir in

$$\frac{d.x^n}{dx}=\lim\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=\varphi(x,n),\ \lim \Delta x=0$$

den beliebigen (positiven oder negativen, ganzen, gebrochenen oder irrationalen, jedoch immer) reellen Exponenten n in sein $p$faches, pn, indem wir p irgend eine absolute ganze Zahl vorstellen lassen; und setzen für einen Augenblick zur Abkürzung $x+\Delta x=\xi$. Dadurch erhalten wir, immer für $\lim \Delta x=0$,

$$\varphi(x,pn)=\lim\frac{\xi^{pn}-x^{pn}}{\Delta x}=\lim\frac{(\xi^n)^p-(x^n)^p}{\Delta x},$$

daher, weil p absolut ganz ist,

$$=\lim\frac{\xi^n-x^n}{\Delta x}[\xi^{n(p-1)}+\xi^{n(p-2)}x^n+\xi^{n(p-3)}x^{2n}+\ldots+\xi^n x^{n(p-2)}+x^{n(p-1)}]$$

$$=\varphi(x,n)[px^{n(p-1)}]=p\frac{x^{np}}{x^n}\varphi(x,n),$$

und hieraus

$$\frac{\varphi(x,pn)}{x^{pn}}=p\cdot\frac{\varphi(x,n)}{x^n}.$$

Sehen wir nun den Quotienten $\frac{\varphi(x,n)}{xn}$, in so fern wir darin bloss auf die Veränderlichkeit von n Acht haben, als eine Function von n an, die wir mit $\psi(n)$ andeuten; so haben wir gefunden

$$\psi(pn)=p\,.\,\psi(n).$$

Die Function $\psi(n)$ hängt daher von dem Exponenten n so ab, dass, wenn dieser sich vervielfacht, auch sie eben so vielmal vervielfacht wird; mithin ist diese Function dem Exponenten direct proportionirt. *)

Noch einfacher erweist man diese Proportionalität wie folgt. Lässt man in der Gleichung

$$\frac{d\,.\,x^n}{dx}=\varphi(x,n)$$

den Exponenten n um die beliebige Zahl p wachsen, so folgt

$$\varphi(x,n+p)=\frac{d\,.\,x^{n+p}}{dx}=\frac{d(x^n\,.\,x^p)}{dx}$$
$$=x^p\frac{d\,.\,x^n}{dx}+x^n\frac{d\,.\,x^p}{dx}$$
$$=x^p\,\varphi(x,n)+x^n\,\varphi(x,p);$$

daher, wenn man durch x^n und x^p nach einander theilt,

$$\frac{\varphi(x,n+p)}{x^{n+p}}=\frac{\varphi(x,n)}{x^n}+\frac{\varphi(x,p)}{x^p}.$$

Setzt man nun wie vorher $\frac{\varphi(x,n)}{x^n}=\psi(n)$, so erhält man

$$\psi(n+p)=\psi(n)+\psi(p).$$

Die Function $\psi(n)$ hängt demnach mit dem Exponenten n so zusammen, dass zur Summe jeder zwei solcher Exponenten die Summe der ihnen angehörigen Functionen gehört; mithin ist die Function dem Exponenten direct proportional. **)

Solche Proportionalität drückt man aber bekanntlich am einfachsten dadurch aus, dass man die Function gleich stellt dem Producte aus dem, zum Werthe 1 der Veränderlichen gehörigen, Werthe der Function in die Veränderliche selbst; daher ist

$$\psi(n)=\psi(1)\,.\,n.$$

Nun ist $\psi(1)=\frac{\varphi(x,1)}{x^1}$ und $\varphi(x,1)=\frac{dx}{dx}=\lim\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=1$,

$$\text{folglich }\psi(1)=\frac{1}{x}\text{ und }\psi(n)=\frac{\varphi(x,n)}{x^n}=\frac{n}{x}.$$

Hieraus erscheint nun die geforderte Function $\varphi(x,n)=nx^{n-1}$, und sofort ist $\frac{d\,.\,x^n}{dx}=nx^{n-1}$.

---

*) Knar, Anfangsgründe der Arithmetik. Grätz 1829. §. 529.
**) Knar, ebendaselbst, §. 528.

XLII.

Ueber die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre.

Von

Herrn Hermann Grassmann,

Lehrer an der Friedrich-Wilhelms-Schule zu Stettin.

Vorerinnerung des Herausgebers.

Ich hatte Herrn H. Grassmann aufgefordert, die eigentliche Tendenz seiner kürzlich herausgegebenen Schrift: Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disciplin, dargestellt und durch Anwendungen erläutert von Hermann Grassmann. Erster Theil, die lineale Ausdehnungslehre enthaltend. Leipzig. 1844. in einem besondern Aufsatze den Lesern des Archivs mit möglichster Kürze und Deutlichkeit vor die Augen zu führen, welchem Wunsche Derselbe im Folgenden zu entsprechen die Güte gehabt hat. Die Neuheit des Gegenstandes lässt mich hoffen, dass Herr Grassmann dadurch vorzüglich denjenigen Lesern des Archivs, welche dem Studium des ganzen Werks eine hinreichende Zeit zu widmen nicht im Stande sind, einen angenehmen Dienst geleistet haben wird, und zugleich glaubte ich auf diese Weise am besten das Meinige zu der jedenfalls zu wünschenden weiteren Bekanntwerdung der Schrift und der in ihr vorgetragenen Lehren beizutragen. Möchten daher die Leser des Archivs dem folgenden Aufsatze ihre Aufmerksamkeit nicht versagen!

Zugleich soll diese Darstellung die Stelle einer ausführlichern Anzeige der Schrift in dem Literarischen Berichte vertreten. G.

I. Tendenz der Ausdehnungslehre als solcher.

1. Meine Ausdehnungslehre bildet die abstrakte Grundlage der Raumlehre (Geometrie), d. h. sie ist die von allen räumlichen Anschauungen gelöste, rein mathematische Wissenschaft, deren specielle Anwendung auf den Raum die Raumlehre ist

Die Raumlehre, da sie auf etwas in der Natur gegebenes, nämlich den Raum, zurückgeht, ist kein Zweig der reinen Mathe-

matik, sondern eine Anwendung derselben auf die Natur; aber nicht eine blosse Anwendung der Algebra, auch dann nicht, wenn die algebraische Grösse, wie in der Funktionenlehre, als stetig veränderlich betrachtet wird; denn es fehlt der Algebra der der Raumlehre eigenthümliche Begriff der verschiedenen Dimensionen. Daher ist ein Zweig der Mathematik nothwendig, welcher in den Begriff der stetig veränderlichen Grösse zugleich den Begriff von Verschiedenheiten aufnimmt, welche den Dimensionen des Raumes entsprechen, und dieser Zweig ist meine Ausdehnungslehre.

2. Doch sind die Sätze der Ausdehnungslehre nicht etwa blosse Uebertragungen geometrischer Sätze in die abstrakte Sprache, sondern haben eine viel allgemeinere Bedeutung; denn während die Raumlehre gebunden bleibt an die drei Dimensionen des Raumes, so bleibt die abstrakte Wissenschaft von diesen Schranken frei.

In der Raumlehre können durch die Bewegung von Punkten Linien, durch die der Linien Flächen, durch die der Flächen Körperräume erzeugt werden, aber weiter kann die Raumlehre nicht fortschreiten. Hingegen stellt man sich vor, dass an die Stelle des Punktes und der Bewegung abstrakte, vom Raume unabhängige Begriffe eingeführt werden (s. unten no. 4—6), so verschwinden diese Schranken.

3. Dadurch geschieht es nun, dass die Sätze der Raumlehre eine Tendenz zur Allgemeinheit haben, die in ihr vermöge ihrer Beschränkung auf drei Dimensionen keine Befriedigung findet, sondern erst in der Ausdehnungslehre zur Ruhe kommt.

Zwei Beispiele mögen dies erläutern. 1) Zwei gerade Linien derselben Ebene schneiden sich in Einem Punkte, ebenso eine Ebene und eine Gerade, zwei Ebenen in Einer geraden Linie, vorausgesetzt, dass die Geraden, oder die Ebene und die Gerade, oder die Ebenen nicht zusammenfallen, und die Durchschnitte im Unendlichen mitgerechnet werden. Werden der Punkt, die Gerade, die Ebene, der Körperraum beziehlich als Gebiete erster, zweiter, dritter, vierter Stufe aufgefasst, so liegt darin der allgemeine Satz angedeutet, dass ein Gebiet von $a$ter und eins von $b$ter Stufe, wenn sie in einem Gebiete von $c$ter Stufe, aber auch in keinem Gebiete von niederer Stufe vereinigt sind, ein Gebiet $(a+b-c)$ter Stufe gemeinschaftlich haben; aber die Raumlehre kann diesen Satz nur für c gleich oder kleiner als 4 zur Anschauung bringen. 2) Der Flächenraum eines Dreiecks ist die Hälfte von dem eines Parellelogramms, dessen Seiten mit zwei Seiten des Dreiecks gleich lang und parallel sind, der Körperraum des Tetraeders $\frac{1}{6}$ von dem des Spathes (Parallelepipedums), dessen Kanten mit 3 in einem Punkte zusammentreffenden Kanten des Tetraeders gleich lang und parallel sind. Darin scheint der Satz angedeutet: der Raum, welcher zwischen n Punkten liegt, die in einem Gebiete $n$ter Stufe (und in keinem Gebiete von niederer Stufe) vereinigt sind, ist $\frac{1}{1.2.3...n}$ von dem Raume eines Gebildes (einer Figur, eines Körpers), dessen Begränzungslinien

(Seiten, Kanten) den von einem der n Punkte zu den übrigen gezogenen geraden Linien gleich und parallel sind. Aber auch dieser Satz kommt hier nicht in seiner Allgemeinheit heraus. — Hingegen in der Ausdehnungslehre treten in diesen beiden, und in allen andern Fällen, die ganz allgemeinen Sätze vollkommen hervor. So nimmt also überall die Raumlehre einen Anlauf zur Allgemeinheit, stösst sich aber, ohne diese Allgemeinheit erreichen, zu können, an den ihr durch den Raum gesteckten Schranken, welche nur die abstrakte Wissenschaft der Ausdehnungslehre zu durchbrechen vermag.

4. Das der Linie entsprechende Gebilde der Ausdehnungslehre ist die Gesammtheit der Elemente, in die ein seinen Zustand stetig änderndes Element übergeht.

Die Linie kann als Gesammtheit der Punkte betrachtet werden, in die ein seinen Ort stetig ändernder Punkt übergeht. Substituiren wir hier dem Punkte allgemeiner irgend ein Ding, welches einer stetigen Aenderung irgend eines Zustandes, den es hat, fähig ist, und abstrahiren nun von allem anderweitigen Inhalte des Dinges und aller Besonderheit dieses seines Zustandes, und nennen das von allem anderweitigen Inhalte abstrahirte Ding das Element, so gelangen wir zu dem aufgestellten Begriffe.

5. Wenn hierbei das Element seinen Zustand stets auf gleiche Weise ändert, so dass, wenn aus einem Elemente a des Gebildes durch Eine solche Aenderung ein anderes Element b desselben hervorgeht, dann durch eine gleiche Aenderung aus b ein neues Element c desselben Gebildes hervorgeht, so entsteht das der *geraden* Linie entsprechende Gebilde, das Gebiet zweiter Stufe.

Die gerade Linie wird von dem Punkte konstruirt, wenn dieser seinen Ort stets nach derselben Richtung hin ändert; substituiren wir daher der Richtung die Art und Weise der Aenderung, so geht der aufgestellte Begriff hervor*).

6. Wenn man alle Elemente eines Gebietes $n$ter Stufe einer und derselben Aenderungsweise unterwirft, welche zu neuen (in jenem Gebiete nicht enthaltenen) Elementen führt, so heisst die Gesammtheit der durch diese Aenderungsweise und die entgegengesetzte erzeugbaren Elemente ein Gebiet $(n+1)$ter Stufe; das Gebiet dritter Stufe entspricht der Ebene, das vierter dem ganzen Raume.

Wenn die Punkte einer geraden Linie sich alle nach einer und derselben Richtung bewegen, die zu neuen (in jener Geraden nicht enthaltenen) Punkten führt, so ist die Gesammtheit der durch diese Bewegung und die entgegengesetzte erzeugbaren Punkte die Ebene; und wenn man ebenso mit den Punkten der

*) Soll die gerade Linie und das ihr entsprechende Gebilde nach beiden Seiten unendlich sein, so muss der Punkt (das Element) auch nach der entgegengesetzten Richtung (Änderungsweise) fortschreiten, was wir hier der Einfachheit wegen übergangen haben.

Ebene verfährt, so erhält man den ganzen Raum. Substituirt man hier den räumlichen Begriffen die vorher angegebenen abstrakten und hält den Fortgang von einer Stufe zur nächst höheren allgemein fest, so ergiebt sich der obige Begriff.

II. Tendenz der in meiner Ausdehnungslehre angewandten Rechnungsmethode an der Geometrie erläutert.

7. In meiner Ausdehnungslehre tritt eine eigenthümliche Rechnungsmethode hervor, welche auf die Raumlehre übertragen von unerschöpflicher Fruchtbarkeit ist, und hier (in der Raumlehre) darin besteht, dass räumliche Gebilde (Punkte, Linien u. s. w.) unmittelbar der Rechnung unterworfen werden.

Zum Beispiel wird die durch zwei Punkte geführte Gerade ihrer Grösse und Lage nach als Verknüpfung jener Punkte und zwar als eine eigenthümliche Art der Multiplikation aufgefasst (s. unten no. 15.), ebenso das zwischen 3 Punkten liegende Dreieck seinem Flächenraum und der Lage seiner Ebene nach als Produkt dreier Punkte, so dass dies Produkt null ist, wenn der Flächenraum jenes Dreiecks es ist d. h. die 3 Punkte in gerader Linie liegen; ferner der Durchschnittspunkt zweier gerader Linien in einem unten (no. 22. und Aufg. 18.) näher zu bezeichnenden Sinne als Produkt dieser Linien.

8. Die Tendenz dieser Rechnungsmethode für die Geometrie ist, die synthetische und analytische Methode zu vereinigen, d. h. die Vorzüge einer jeden auf den Boden der andern zu verpflanzen, indem jeder Konstruktion eine einfache analytishe Operation zur Seite gestellt wird und umgekehrt.

Zur Erläuterung diene folgendes Beispiel. Bekanntlich beschreibt eine Ecke γ eines veränderlichen Dreiecks, dessen beide andere Ecken α, β sich in festen geraden Linien A und B bewegen, und dessen Seiten durch 3 feste Punkte a, b, c gehen, einen Kegelschnitt. Sind a, b, c die festen Punkte, durch welche beziehlich die den Ecken α, β, γ gegenüberliegenden Seiten gehen, so sieht man, dass (s. no. 7.) γaB die Ecke β, $\gamma aBcA$ die Ecke α darstellt, und da die Punkte α, b, γ in einer geraden Linie liegen, also ihr Produkt null ist (no. 7.), so hat man die Gleichung

$$\gamma aBcAb\gamma = 0$$

als Gleichung eines von γ beschriebenen Kegelschnittes. Man sieht, dass diese Gleichung in Bezug auf γ vom zweiten Grade ist, und man wird schon hierin ein auf alle algebraischen Kurven gehendes wichtiges Gesetz ahnen.

III. Einfachste Rechnungsregeln für die neue Analyse.

Die Verknüpfungen, die in diesem Theile der Ausdehnungslehre vorkommen, sind Addition, Subtraktion, kombinatorische Multiplikation, kombinatorische Division.

9. **Für alle Arten der Addition und Subtraktion gilt das gewöhnliche Rechnungsverfahren.**

10. **Für alle Multiplikations- und Divisionsweisen gilt das Gesetz: Statt ein Aggregat von Gliedern mit einem zeichenlosen Ausdrucke auf irgend eine Weise zu multipliciren oder zu dividiren, kann man ohne Aenderung des letzten Ergebnisses die einzelnen Glieder mit diesem Ausdrucke auf dieselbe Weise*) multipliciren oder dividiren, und die einzelnen Produkte oder Quotienten so zu einem Aggregate verknüpfen, dass man einem jeden das Zeichen desjenigen Gliedes vorsetzt, durch dessen Multiplikation oder Division es entstanden ist; ein Zahlfaktor kann überdies, wenn er irgend einem Faktor des Produktes zugeordnet ist, auch jedem andern oder auch dem Produkte zugeordnet werden; endlich $\frac{A}{A}$ ist allemal 1, wenn A nicht null ist.**

11. **Ein Produkt $a.b.c....$ nenne ich ein kombinatorisches, wenn ausser dem Gesetze no. 10. für dasselbe noch das Gesetz gilt, dass, wenn von den einzelnen Faktoren a, b, c,.... zwei aufeinanderfolgende vertauscht werden, das Produkt entgegengesetzten Werth annimmt; und zwar nenne ich a, b, c,.... und deren Summen oder Differenzen dann Faktoren erster Ordnung.**

Hiernach ist also z. B. $a.b.c.d = -a.c.b.d$.

12. **Wenn in einem kombinatorischen Produkte zwei Faktoren erster Ordnung einander gleich sind, so ist das Produkt null.**

Z. B. $a.b.b.d = 0$ (wie sich auch sogleich ergiebt, wenn man in dem Beispiel zu no. 11. b und c gleich setzt). Folgende Aufgaben mögen zur Erläuterung dieser Multiplikationsweise dienen:

Aufg. 1. Das kombinatorische Produkt $(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) . (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3) . (\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3)$ zu entwickeln, wenn α_1, α_2, α_3; β_1, β_2, β_3; γ_1, γ_2, γ_3 Zahlgrössen; e_1, e_2, e_3 aber kombinatorische Faktoren erster Ordnung bezeichnen. Man erhält durch Anwendung der Rechnungsregeln (9—12) schliesslich den Ausdruck

$$(\alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 - \alpha_2\beta_1\gamma_3) e_1 . e_2 . e_3 .$$

Aufg. 2. Drei Gleichungen ersten Grades mit drei Unbekannten durch die Regeln der kombinatorischen Multiplikation zu lösen (§. 45.).

Die drei Gleichungen seien

$$1 \;..\; \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1 , \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2 , \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = \delta_3 . \end{cases}$$

---

*) Dieser Ausdruck bezieht sich nicht nur auf die Verknüpfungsweise im Allgemeinen, sondern auch auf die Stellung des Faktors in dem Produkte.

Man multiplicire die 3 Gleichungen beziehlich mit 3 kombinatorischen Faktoren erster Ordnung e_1, e_2, e_3, deren Produkt nicht null ist, addire sie, und setze

$$2\ldots \begin{cases} \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = a, \\ \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 = b, \\ \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3 = c, \\ \delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 + \delta_3 e_3 = d; \end{cases}$$

so erhält man die Gleichung

$$3 \;..\; xa + yb + zc = d.$$

Multiplicirt man diese Gleichung kombinatorisch mit $b.c$, so erhält man, weil $b.b.c$ und $c.b.c$ nach no. 12. null sind, die Gleichung

$$x.a.b.c = d.b.c, \text{ also } x = \frac{d.b.c}{a.b.c},$$

und auf ähnliche Weise findet man y und z, und erhält

$$4\ldots.\; x = \frac{d.b.c}{a.b.c},\; y = \frac{a.d.c}{a.b.c},\; z = \frac{a.b.d}{a.b.c}.$$

Diese Ausdrücke (in welchen die Gesetze der kombinatorischen Multiplikation kein Heben der einzelnen kombinatorischen Faktoren gestatten) sind äusserst bequem für die Analyse. Will man die Unbekannten in der gewöhnlichen Form ausgedrückt erhalten, so hat man nur aus Gleichung 2. zu substituiren, nach Aufg. 1. zu entwickeln und $e_1.e_2$ nach no. 11. im Zähler und Nenner zu heben; z. B. findet man

$$5\ldots.\; x = \frac{\delta_1\beta_2\gamma_3 - \delta_1\beta_3\gamma_2 + \delta_3\beta_1\gamma_2 - \delta_3\beta_2\gamma_1 + \delta_2\beta_3\gamma_1 - \delta_2\beta_1\gamma_3}{\alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 - \alpha_2\beta_1\gamma_3}.$$

Man sieht, wie dies Verfahren nicht nur überhaupt für n Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten anwendbar ist, sondern wie man auch bei einiger Geläufigkeit hiernach sogleich das Endresultat hinschreiben kann, sobald die n Gleichungen gegeben sind.

IV. Anschauliche Begriffe der verschiedenen Grössen und Verknüpfungsweisen in der Geometrie.

13. **Die räumlichen Grössen erster Stufe sind einfache oder vielfache Punkte, und gerade Linien von bestimmter Länge und Richtung.** (§ 13. — § 20.)

Sind A und B Punkte, so bezeichne ich die g. L. von A nach B, so fern an ihr zugleich Länge und Richtung, aber auch nichts weiter, festgehalten wird, mit $B-A$; ich sage also, dass $B-A$ dann und nur dann gleich B_1-A_1 sei, wenn die geraden Linien

von A nach B und von A_1 nach B_1 gleiche Länge und Richtung haben.

14. Die räumlichen Grössen $n$ter Stufe entstehen durch kombinatorische Multiplikation von n Grössen erster Stufe, welche als Faktoren erster Ordnung angenommen werden.

In diesem Falle, wenn nämlich die Faktoren erster Ordnung zugleich Grössen erster Stufe sind, nenne ich die Multiplikation eine äussere.

15. Sind A, B, C, D Punkte, so bedeutet (§ 106—115)

1) $A.B$ die Linie, welche A und B zu Gränzpunkten hat, aufgefasst als bestimmter Theil der durch A und B bestimmten unendlichen geraden Linie.

2) $A.B.C$ das Dreieck, dessen Ecken A, B, C sind, aufgefasst als bestimmter Theil der durch A, B, C bestimmten unendlichen Ebene.

3) $A.B.C.D$ das Tetraeder, dessen Ecken A, B, C, D sind, aufgefasst als bestimmter Theil des unendlichen Körperraumes.

D. h. wir setzen $A.B = A_1.B_1$, wenn beide Produkte gleiche und gleichbezeichnete*) Theile derselben geraden Linie vorstellen; ferner

$$A.B.C = A_1.B_1.C_1,$$

wenn beide Dreiecke gleiche und gleich bezeichnete Theile derselben Ebene sind; endlich

$$A.B.C.D = A_1.B_1.C_1.D_1,$$

wenn beide Tetraeder gleichen und gleichbezeichneten Inhalt haben.

16. Sind a, b, c Linien von bestimmter Länge und Richtung, so bedeutet (§ 28—36)

1) $a.b$ das Parallelogramm, dessen Seiten gleich und parallel a und b sind, und zwar aufgefasst als Flächenraum von bestimmter Grösse und Ebenen-Richtung**).

2) $a.b.c$ das Spath (Parallelepipedum), dessen Kanten gleich und parallel a, b, c sind, und zwar aufgefasst als Körperraum von bestimmter Grösse.

D. h. wir setzen

$$a.b = a_1.b_1,$$

wenn die Parallelogramme, welche durch diese Produkte dargestellt sind, in parallelen Ebenen liegen, und gleichen und gleichbezeichneten Flächenraum haben;

$$a.b.c = a_1.b_1.c_1,$$

---

*) Gleichbezeichnet nenne ich zwei Grössen, welche entweder beide positiven, oder beide negativen Werth haben.

**) Von zwei parallelen Ebenen sage ich, dass sie gleiche Ebenen-Richtung haben.

wenn die durch diese Producte dargestellten Spathe gleichen und gleichbezeichneten Inhalt haben.

17. **Die Seite (rechte oder linke), nach welcher die Konstruction einer räumlichen Grösse erfolgt, bestimmt ihren positiven oder negativen Werth,** nämlich

1) Zwei Theile derselben Linie, $A.B$ und $A_1.B_1$, setzen wir als gleichbezeichnet, wenn B von A aus nach derselben Seite liegt, wie B_1 von A_1 aus.

2) Zwei Theile derselben Ebene, $A.B.C$ und $A_1.B_1.C_1$, setzen wir als gleichbezeichnet, wenn C von $A.B$ aus nach derselben Seite hin liegt, wie C_1 von $A_1.B_1$ aus, oder deutlicher, wenn dem, der in A stehend nach B sieht, C nach derselben Seite hin liegt, wie C_1 dem liegt, der in A_1 stehend nach B_1 sieht.

3) Zwei Körpertheile $A.B.C.D$ und $A_1.B_1.C_1.D_1$ setzen wir als gleichbezeichnet, wenn D von $A.B.C$ aus nach derselben Seite hin liegt, wie D_1 von $A_1.B_1.C_1$ aus; oder deutlicher, wenn einer menschlichen Figur, die den Kopf nach A, die Füsse nach B, das Auge nach C hin gerichtet hat, der Punkt D nach derselben Seite liegt, wie D_1 einer Figur, die den Kopf nach A_1, die Füsse nach B_1, das Auge nach C_1 hin gerichtet hat.

4) Zwei parallele Flächenräume $a.b$ und $a_1.b_1$ setzen wir als gleichbezeichnet, wenn die Richtung b von der Richtung a aus nach derselben Seite liegt, wie b_1 von a_1 aus.

5) Zwei Körperräume $a.b.c$ und $a_1.b_1.c_1$ setzen wir als gleichbezeichnet, wenn die Richtung c von $a.b$ aus nach derselben Seite hin liegt, wie c_1 von $a_1.b_1$ aus, d. h. wenn einer menschlichen Figur, welcher die Richtung a von den Füssen zum Kopfe geht, und deren Augen in der Richtung b_1 vorwärts sehen, die Richtung c nach derselben Seite liegt, wie die Richtung c_1 einer Figur u. s. w.

18. **Es giebt sieben Gattungen räumlicher Grössen, in vier Stufen vertheilt:**

I. St.	1) **Einfache oder vielfache Punkte.** 2) **Gerade Linien von bestimmter Länge und Richtung.**
II. St.	3) **Bestimmte Theile bestimmter unendlicher gerader Linien.** 4) **Ebene Flächenräume von bestimmter Grösse und Ebenen-Richtung.**
III. St.	5) **Bestimmte Theile bestimmter unendlicher Ebenen.** 6) **Bestimmte Körperräume.**
IV. St.	7) **Bestimmte Körperräume.**

Hier kommen die Körperräume zweimal vor, theils als Grössen dritter Stufe, theils als Grössen vierter Stufe, je nachdem sie als Produkte dreier g. L. von bestimmter Richtung und Länge, oder als Produkte von 4 Punkten aufgefasst werden.

19. **Gleichbezeichnete Theile eines und desselben Ganzen geben als Summe einen ebenso bezeichneten**

Theil desselben Ganzen, welcher so gross ist, als jene beiden zusammengenommen. (§. 8.).

Z. B. $A.B$ und $A_1.B_1$ geben, wenn sie gleichgerichtete Theile derselben unendlichen g. L. sind, zur Summe einen eben so gerichteten Theil derselben Linie, welcher so gross ist, als jene beiden Theile zusammengenommen.

20. Je zwei Grössen derselben Stufe, aber auch nur solche, können addirt werden; der Begriff für die Addition solcher Grössen lässt sich allemal bestimmen, wenn man die vorhergegebene Bezeichnung dieser Grössen festhält, und die Rechnungsregeln aus III. anwendet.

Aufg. 3. Zwei Punkte A und B zu addiren.

Setzt man $A+B=2S$, so erhält man $B-A=2(S-A)$, d. h. S ist die Mitte zwischen A und B. Also die Summe zweier Punkte ist die doppelt genommene Mitte zwischen beiden.

Aufg. 4. Zwei vielfache Punkte αA und βB zu addiren, wenn die Coefficienten α und β positiv sind, d. h. den Punkt S zu finden, welcher der Gleichung

$$\alpha A+\beta B=(\alpha+\beta)S$$

genügt. (§. 94—98).

Soll dieser Gleichung genügt werden, so muss

$$\beta(B-A)=(\alpha+\beta)(S-A)$$

sein, und umgekehrt erhält man aus der letzten die erstere. Aus der letzten folgt aber die Konstruktion: Man nimmt von der Linie AB von A aus den Theil $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ (oder von B aus den Theil $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$), so ist der Endpunkt dieses Theiles der Punkt S. — Also „die Summe zweier vielfachen Punkte mit positiven Koefficienten ist ein mit der Summe der Koefficienten multiplicirter Punkt, welcher in der geraden Linie zwischen beiden Punkten so liegt, dass seine Entfernungen von diesen beiden Punkten sich umgekehrt verhalten, wie die zu diesen Punkten gehörigen Koefficienten*)."

Aufg. 5. Einen Punkt A und eine ger. Linie von bestimmter Länge und Richtung $C-B$ zu addiren.

Man konstruire eine ger. Linie von A aus, welche mit $C-B$ gleich lang und gleich gerichtet ist; diese sei $D-A$, so ist D die gesuchte Summe; denn da $C-B=D-A$ ist, so ist

$$A+(C-B)\triangleq A+(D-A)=D.$$

Also „die Summe eines Punktes A und einer geraden Linie von bestimmter Länge und Richtung ist der Endpunkt dieser Linie, wenn A ihr Anfangspunkt ist."

---

*) Man sieht, dass dieser Punkt der Schwerpunkt ist, wenn die Koefficienten Gewichte vorstellen.

Aufg. 6. Einen vielfachen Punkt αA und eine g. L. von bestimmter Länge und Richtung $C-B$ zu addiren

Man konstruire eine g. L. von A aus, welche mit $C-B$ gleiche Richtung hat, aber nur $\frac{1}{\alpha}$ so lang ist; diese sei $D-A$, so ist αD die gesuchte Summe. Denn da

$$C-B=\alpha(D-A) \text{ ist, so ist}$$
$$\alpha A+(C-B)=\alpha A+\alpha(D-A)=\alpha D.$$

Aufg. 7. Zwei ger. Linien von bestimmter Länge und Richtung $B-A$ und $D-C$ zu addiren.

Man mache $E-B=D-C$, so ist

$$(B-A)+(D-C)=(B-A)+(E-B)=E-A.$$

Also „zwei Linien von bestimmter Länge und Richtung addirt man, indem man, ohne die Länge und Richtung zu verändern, auf den Endpunkt der einen den Anfangspunkt der andern legt, dann ist die g. L. vom Anfangspunkte der ersten zum Endpunkte der letzten die gesuchte Summe.“

Aufg. 8. n ger. Linien von bestimmter Länge und Richtung zu addiren.

Die wiederholte Anwendung der Auflösung von Aufg. 7. führt sogleich zu der Lösung dieser Aufgabe, nämlich „n ger. Linien von bestimmter Länge und Richtung addirt man, indem man die einzelnen Linien, ohne ihre Richtung und Länge zu ändern, nach der Reihe stetig d. h. so an einander legt, dass, wo die eine aufhört, die nächstfolgende anfängt; dann ist die g. L. vom Anfangspunkte der ersten zum Endpunkte der letzten die gesuchte Summe.“

Aufg. 9. Die Summe von n Pnnkten A_1, $A_2 \ldots\ldots A_n$ zu finden, d. h. den Punkt S zu finden, welcher der Gleichung

$$A_1+A_2+\ldots\ldots A_n=nS$$

genügt.

Subtrahirt man auf beiden Seiten dieser Gleichung nR, wo R ein beliebiger Punkt ist, so erhält man

$$(A_1-R)+(A_2-R)+\ldots\ldots(A_n-R)=n(S-R).$$

Und da aus dieser Gleichung wieder die erstere sich ableiten lässt, so folgt: „Um n Punkte zu addiren, zieht man von einem beliebigen Punkte R die g. L. nach den n Punkten, legt sie, ohne ihre Richtung und Länge zu ändern, stetig an einander und zwar so, dass der Anfangspunkt der ersten auf R fällt, verbindet R mit dem Endpunkte der letzten durch eine g. L. und theilt diese Verbindungslinie in n gleiche Theile, so ist der erste Theilpunkt von R aus der Punkt S, dessen $n$faches die gesuchte Summe ist.

Aufg. 10. Beliebig viele vielfache Punkte αA, $\beta B, \ldots\ldots$ zu addiren, wenn die Summe der Koefficienten $\alpha+\beta+\ldots\ldots$ nicht null ist.

Setzt man

$$\alpha A+\beta B+\ldots\ldots=(\alpha+\beta+\ldots\ldots)S,$$

und subtrahirt auf beiden Seiten $(\alpha+\beta\ldots.)R$, wo R ein beliebiger Punkt ist, so erhält man

$$\alpha(A-R)+\beta(B-R)+\ldots..=(\alpha+\beta+\ldots.)(S-R).$$

Also da auch hieraus wieder die erste Gleichung sich ableiten lässt, so folgt „die Summe von beliebig vielen vielfachen Punkten αA, $\beta B\ldots.$, deren Koefficienten-Summe nicht null ist, findet man, indem man von irgend einem Punkte R aus die Linien nach A legt, diese dann beziehlich mit α, β, ... multiplicirt*), die so gewonnenen Linien, ohne ihre Richtung und Länge zu ändern, stetig an einander legt, so dass der Anfangspunkt der ersten in R fällt, dann R mit dem Endpunkte der letzten verbindet und von der Verbindungslinie von R aus den Theil $\frac{1}{\alpha+\beta+\ldots}$ nimmt, so ist der mit $(\alpha+\beta\ldots.)$ multiplicirte Endpunkt dieses Theiles die gesuchte Summe.“

Aufg. 11. Die Summe von vielfachen Punkten αA, βB,.... zu finden wenn $\alpha+\beta+\ldots.=0$ ist.

Man subtrahire von $\alpha A+\beta B+\ldots.$ den Ausdruck $(\alpha+\beta+\ldots)R$, so wird, da diese subtrahirte Grösse null ist, der Werth der Summe nicht geändert, also ist

$$\alpha A+\beta B+\ldots.=\alpha(A-R)+\beta(B-R)+\ldots.$$

Also „die Summe von vielfachen Punkten, deren Koefficientensumme null ist, ist eine g. L von bestimmter Länge und Richtung, die man dadurch findet, dass man von einem beliebigen Punkte R die g. L. nach den gegebenen Punkten zieht, diese mit den diesen Punkten zugehörigen Koefficienten multiplicirt, und die Produkte addirt.“

Aufg. 12. Zwei Theile $A.B$ und $C.D$ von Linien, die sich in E schneiden, zu addiren.

Man mache $E.F$ gleich $A.B$ und $E.G$ gleich $C.D$, so ist $A.B+C.D=E.F+E.G=E.(F+G)=2E.S$, wenn S die Mitte von F und G ist (vergl. Aufg. 3). Also „zwei Theile von Linien, welche sich schneiden, addirt man, indem man diesen Theilen den Durchschnittspunkt als Anfangspunkt giebt; dann ist die doppelte g. L. vom Durchschnittspunkte zu der Mitte der beiden Endpunkte die gesuchte Summe**).“

Aufg. 13. Zwei parallele Linientheile $A.B$ und $C.D$ zu addiren, wenn beide nicht gleichlang und zugleich entgegengesetzt gerichtet sind.

Wenn $A.B$ und $C.D$ parallel sind, so muss $D-C$ gleich $\alpha(B-A)$ sein, wo α irgend eine positive oder negative Zahl ist.

---

*) Durch solche Multiplikation mit einer Zahlgrösse α ändert sich, wie man leicht sieht, wenn α positiv ist, die Richtung nicht, während die Länge im Verhältniss $1:\alpha$ sich ändert; und ist α negativ, so wird die Richtung die entgegengesetzte.

**) Diese ist zugleich die Diagonale des Parallelogramms, welches jene Linientheile zu Seiten hat, woraus man sieht, dass die Summe der Linientheile die zusammengesetzte Kraft ist, wenn die Linientheile Kräfte vorstellen.

Da nun $A.B$ gleich $A.(B-A)$ ist, weil $A.A$ nach no. 12. null ist, so hat man

$$A.B+C.D=A.(B-A)+C.(D-C)$$
$$=A.(B-A)+\alpha C.(B-A)$$
$$=(A+\alpha C)(B-A).$$

Ist die Summe $A+\alpha C$ gleich $(1+\alpha)S$ (vergl. Aufg. 4.), so wird der letzte Ausdruck

$$=S.(1+\alpha)(B-A)=S.(B-A+D-C),$$

worin eine einfache Konstruktion jener Summe liegt.

Aufg. 14. Zwei gleich lange und entgegengesetzt gerichtete Linientheile $A.B$ und $C.D$ zu addiren.

Liegen beide in derselben g. L., so ist die Summe null. Ist dies nicht der Fall, so ist, weil $D-C=-(B-A)$ ist,

$$A.B+C.D=A.(B-A)+C.(D-C)$$
$$=A.(B-A)-C.(B-A)$$
$$=(A-C).(B-A).$$

Dann ist die Summe also ein Flächenraum von bestimmter Grösse und Ebenen-Richtung*).

Aufg. 15. Zwei Flächenräume von bestimmter Grösse und Ebenenrichtung $a.b$ und $c.d$ zu addiren.

Sind die Ebenen parallel, so können sie schon nach no. 19. addirt werden, sind sie es nicht, so werden beide Ebenen eine Richtung gemeinschaftlich haben. Es sei e eine g. L., welche diese Richtung hat, und $a.b$ gleich $e.f$, $c.d$ gleich $e.g$, so ist

$$a.b+c.d=e.f+e.g.$$

Aufg. 16. Zwei Theile $A.B.C$ und $D.E.F$ bestimmter Ebenen, die nicht parallel sind, zu addiren.

Sind die Ebenen nicht parallel, so werden sie sich schneiden. Es sei $G.H$ ein Theil der Durchschnittslinie, und es sei $A.B.C$ gleich $G.H.J$, $D.E.F$ gleich $G.H.K$, so ist

$$A.B.C+D.E.F=G.H.J+G.H.K$$
$$=G.H.(J+K)=2G.H.S,$$

wenn S die Mitte zwischen J und K ist. Also „Zwei Theile nicht paralleler Ebenen addirt man, indem man sie als Dreiecke darstellt, deren gemeinschaftliche Grundseite in dem Durchschnitt beider Ebenen liegt; dann ist das Doppelte des Dreiecks,

---

*) Wie die Summe zweier Linientheile, die nicht in derselben Ebene liegen, zu behandeln sei, kann ich hier nicht ausführen (vergl. Ausdehnungsl. §. 51. u. §. 122.).

was dieselbe Grundseite hat, und dessen Spitze die Mitte ist zwischen den Spitzen jener Dreiecke, die gesuchte Summe.

Aufg. 17. Zwei Theile $A.B.C$ und $D.E.F$ paralleler Ebenen zu addiren.

Sind die Ebenen parallel, so muss $(E-D).(F-D)$ gleich $\alpha(B-A).(C-A)$ gesetzt werden können, wo α eine Zahlgrösse ist. Dann ist

$$A.B.C+D.E.F=A.(B-A).(C-A)+D.(E-D).(F-D)^{*)}$$
$$=(A+\alpha D).(B-A).(C-A)$$
$$=S.(1+\alpha).(B-A).(C-A),$$

wenn $(1+\alpha)S$ die Summe von $A+\alpha D$ ist. Der letzte Ausdruck ist

$$=S[(B-A).(C-A)+(E-D).(F-D)],$$

worin wieder eine einfache Konstruktion liegt. Ist jedoch $\alpha=-1$, d. h. sind beide Flächenräume gleich gross, aber entgegengesetzt bezeichnet, so ist $A+\alpha D$ eine g. L. von bestimmter Richtung und Länge (Aufg. 11.); ist diese gleich $H-G$, so ist

$$A.B.C+D.E.F=(H-G).(B-A).(C-A),$$

also die Summe dann ein Körperraum.

Aufg. 18. Einen Theil $A.B.C$ einer bestimmten Ebene und einen Körperraum $(D-A).(B-A).(C-A)$ zu addiren.

$$A.B.C+(D-A).(B-A).(C-A)$$
$$=A.(B-A).(C-A)+(D-A).(B-A).(C-A)$$
$$=D.(B-A)+(C-A),$$

woraus der Begriff dieser Addition leicht hervorgeht.

21. Ein kombinatorisches Produkt, dessen Faktoren erster Ordnung Grössen $(n-1)$ter Stufe sind, welche aber alle in einem und demselben Gebiete $n$ter Stufe liegen, nenne ich ein eingewandtes Produkt, und zwar ein auf jenes Gebiet bezügliches, z. B. ein kombinatorisches Produkt von Linientheilen in der Ebene, oder von Ebenentheilen im Raume.

22. Wird von jetzt an die äussere Multiplikation durch blosses Aneinanderschreiben, die eingewandte Multiplikation durch einen zwischen die Faktoren gesetzten Punkt bezeichnet, so verstehen wir unter dem eingewandten Produkte $AB.AC$, wo A, B, C beliebige Grössen sind, das Produkt $ABC.A$, in welchem ABC wie ein zu A gehöriger Koefficient behandelt wird, vorausgesetzt, dass das Produkt auf das Gebiet von niedrigster Stufe, in welchem A, B und C zugleich liegen, bezogen wird.

Aufg. 19. Das auf die Ebene ABC bezügliche Produkt zweier Linientheile $AB.AC$ zu finden.

---

*) vergl. no. 12.

Nach no. 22 ist dasselbe gleich $ABC.A$; d. h. „das Produkt zweier Linientheile, deren Linien sich schneiden, ist der Durchschnittspunkt, verbunden mit einem Theil der Ebene als Koefficienten." Denkt man sich einen Theil der Ebene als Einheit angenommen, so werden die Ebenentheile, mit denen die Punkte behaftet sind, wirkliche Zahlgrössen und die Produkte erscheinen als vielfache Punkte; doch müssen dann alle zu vergleichenden Grössen in derselben Ebene, auf die sich die Produkte beziehen, liegen (wie dies in der Planimetrie immer der Fall ist).

Aufg. 19. Das Produkt dreier Linientheile AB, AC, BC in Bezug auf die Ebene ABC zu finden.
Aufl. $AB.AC.BC = ABC.ABC = (ABC)^2$.

Aufg. 21. Das eingewandte Produkt zweier Ebenentheile ABC und ABD (in Bezug auf den Körperraum) zu finden.
Aufl. $ABC.ABD = ABCD.AB$.

Aufg. 22. Das eingewandte Produkt dreier Ebenentheile ABC, ABD, ACD zu finden.
Aufl. $ABC.ABD.ACD = ABCD.ABCD.A = (ABCD)^2.A$

Aufg. 23. Das eingewandte Produkt von vier Ebenentheilen ABC, ABD, ACD, BCD zu finden.
Aufl. $ABC.ABD.ACD.BCD = (ABCD)^3$.

Anm. Das Produkt zweier Ebenentheile giebt also einen Linientheil, das dreier einen Punkt, aber jener Linientheil und dieser Punkt haben dann noch einen Raumtheil oder ein Produkt von Raumtheilen als Koefficienten, und nimmt man einen Raumtheil als Einheit an, so gehen diese Koefficienten in wirkliche Zahlgrössen über.

Dies etwa sind die wesentlichsten Begriffe, welche in dem ersten Theile meiner Ausdehnungslehre vorkommen. Aber es ist unmöglich, von der unendlichen Fruchtbarkeit dieser neuen Methode für die Behandlung nicht nur der Raumlehre, sondern überhaupt aller Wissenschaften, welche auf räumliche Verhältnisse zurückgehen, hier auch nur einen oberflächlichen Begriff zu geben. Ebenso wenig konnte ich hier die Beweise liefern, dass in der That die in III. gegebenen Rechnungsregeln für die einzelnen hier dargelegten Verknüpfungsweisen gelten, sondern auch hier muss ich auf meine ausführliche Schrift verweisen, in welcher diese Beweise in aller Strenge geführt sind; und wo zugleich die Entwickelung überall in der Art fortschreitet, dass alles Willkührliche, was noch in der Aufstellung der verschiedenen Begriffe zu liegen scheint, verschwindet.

XLIII.

Observation géométrique, au sujet du problême traité p. 321. du V. vol. de ce journal.

Par

Monsieur le docteur J. R. Boyman,

à l'école superieure de Malmedy.

1.

Décrivez par le sommet B d'un angle ABC (Tab. V. Fig. 1.) un cercle quelconque, qui coupera les deux côtés de l'angle en A et C, élevez à ces points les perpendiculaires, qui se rencontreront, comme on sait, sur la circonférence en un point D, et abaissez du point D la perpendiculaire DP sur la droite, qui joint les deux points A et C. Menez en outre entre les deux côtés de l'angle par le point P encore une droite GH à volonté, et circonscrivez au triangle GBH un cercle, qui coupera le premier en F. Si maintenant on joint DG, DH et FG, FH, on trouvera $\angle ADC = \angle GFH$; mais comme $\angle GFH$ est plus petit que $\angle GDH$, on aura aussi $\angle ADC$ plus petit que $\angle GDH$. Ainsi dans les deux triangles ADC et GDH on a $\angle ADC$ plus petit que $\angle GDH$, $DA < DG$, $DC < DH$, donc $AC < GH$. Or la droite GH ayant été menée à volonté par le point P, on est conduit au théorême suivant:

„Si entre les côtés d'un angle donné on tire une ligne „droite quelconque et que du point d'intersection des deux per„pendiculaires élevées à ses extrémités sur les côtés de l'angle „on abaisse sur elle la perpendiculaire: le pied de cette per„pendiculaire est un point tel, que la ligne droite est la droite „la plus courte qu'on puisse faire passer par ce point entre les „côtés de l'angle donné.

2.

Maintenant qu'après avoir tiré BP on décrive sur la ligne BP, comme diamètre, un cercle qui coupe la droite AC en Q, et qu'on joigne aussi BQ: alors on aura $\Delta DPA \sim \Delta AQB$ et $\Delta DPC \sim \Delta CQB$, d'où résultent les proportions suivantes:

$$AP : DP = BQA : Q,$$
$$DP : CP = CQ : BQ.$$

Si on multiplie ces deux proportions terme à terme, on trouvera la suivante:

$$AP : CP = CQ : AQ.$$

De là résulte

$$AP + CP : AP = CQ + AQ : CQ,$$

ou ce qui revient au même:

$$AC : AP = AC : CQ,$$

d'où l'on conclut:

$$AP = CQ.$$

Nous venons donc de démontrer le théorême suivant:

„Si par un point entre les côtés d'un angle quelconque on „mène la ligne droite la plus courte et qu'on décrive un cercle „sur la ligne qui joint ce point au sommet de l'angle, comme „diamètre: la droite la plus courte sera coupée par la circon„férence, de maniere que les deux segments hors du cercle „sont égaux."

5.

D'après ce qui précède il n'y a plus de difficulté pour tirer la droite la plus courte par un point P donné entre les côtés d'un angle, comme c'est aussi indiqué dans le traité cité. Car outre le point P on a aussi le point Q, qui détermine sa position. Mais ce point est le point d'intersection du cercle décrit sur la ligne BP comme diamètre et (puisqu'on doit avoir $AP = CQ$) de l'hyperbole ménée par le point P, laquelle a les côtés de l'angle donnée pour asymptotes.

XLIV.

Betrachtungen einiger Gegenstände der Logik, mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Mathematik.

Von

Herrn Dr. Wilhelm Matzka,

Professor der Mathematik
an der k. k. philosophischen Lehranstalt zu Tarnow in Galizien.

Allgemein erkennt man an, dass einerseits die Mathematik und von ihr ganz vorzüglich die reine Geometrie und Statik die beste Schule für die gründlichste und folgerechteste Anwendung der Logik sei, und andrerseits dass die Logik durch die Bemühungen der neueren meist deutschen Philosophen seit Kant, einen sehr hohen Aufschwung in ihrer Ausbildung genommen hat. Dessungeachtet folgen diejenigen Schriftsteller und Lehrer der Mathematik, welche ihre Lehrgegenstände ausführlich begründen, mit sehr geringer Ausnahme, noch immer der Weise Euklid's in den zwar für seine Zeit ganz vorzüglichen aber doch nicht unverbesserlichen Elementen der Geometrie; was um so weniger zu billigen zu sein scheint, als heut zu Tage besonders an gelehrten Schulen der Zögling schon eine höhere wissenschaftliche Vorbildung als vordem mitbringt und als man durch den ungeheuren Umfang, den die theoretische Mathematik schon erlangt hat, hauptsächlich auf übersichtliche und gedrängte Darstellung des Lehrganzen, jedoch ohne dabei die Deutlichkeit und Gründlichkeit ausser Acht zu lassen, hinzuarbeiten sich gedrungen sieht. Darum möge es mir erlaubt sein, in dem wegen seiner Tendenz, vorzüglich Lehrern höherer wissenschaftlicher Bildungsanstalten zu dienen, am besten hiezu geeigneten vortrefflichen Archiv, durch folgende Winke die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf die Verbesserung der Anordnung der Lehrsätze ihrer Wissenschaft und der logischen Form ihrer Beweise zu lenken.

I.

Ueber unmittelbare Folgerungen aus hypothetischen Urtheilen mittels der Umkehrung oder der Contraposition.

1. Die Umkehrung eines hypothetischen Urtheils besteht in der Verwechslung oder Umstellung des Grundes und der Folge, der Bedingung und des Bedingten; indem man, die Folge als Grund setzend, auf den Grund als Folge zurückschliesst. Die allgemeine Form des hypothetischen Urtheils ist nemlich:

„Wenn A ist, so ist B;“

daher die Form seines Umgekehrten:

„Wenn B ist, so ist A “

Dieser Schluss aus dem Bestehen der Folge auf das Bestehen des Grundes ist jedoch nicht nothwendig, sondern bloss etwa zufällig richtig, oft sogar ganz unrichtig. Denn das hypothetische Urtheil spricht nur die einseitige Abhängigkeit der Folge vom Grunde aus, setzt aber keineswegs umgekehrt die Verknüpfung des Grundes mit der Folge als nothwendig voraus. In dem Wesen des Grundes liegt es, dass er die Folge nach sich zieht; aber die Folge allgemein gedacht kann in besonderen Fällen verschiedene Gründe haben. Setzt man daher eine gewisse Folge, so muss man darum noch nicht diesen oder jenen bestimmten Grund setzen. Die Folge wird im hypothetischen Urtheile nur gesetzt, wenn und wiefern der Grund gesetzt wird; allein dieses Setzen des Grundes erscheint an sich bloss möglich, nicht aber unbedingt nothwendig. — Die Gültigkeit eines umkehrenden hypothetischen Urtheils muss demnach jedesmal erst eigens geprüft und wo möglich erwiesen werden, wenn man ihrer versichert sein soll.

So z. B. beweist die Geometrie den Satz:

„Wenn Parallelogramme gleiche Grundlinien und Höhen haben, so sind sie gleich;“

allein umgekehrt darf man nicht schliessen:

„Wenn Parallelogramme gleich sind, so haben sie gleiche Grundlinien und Höhen;“

denn dies findet nur in ganz besonderen Fällen statt, und kann also auch gar nicht allgemein bewiesen werden. Den Satz dagegen:

„Wenn Parallelogramme von gleichen Grundlinien gleiche Höhen haben, so sind sie gleich“

darf man zwar in den folgenden umkehren:

„Wenn Parallelogramme von gleichen Grundlinien gleich sind, so haben sie gleiche Höhen;“

allein seine Gültigkeit muss erst nachgewiesen werden.

2. Die Contraposition eines hypothetischen Urtheils besteht in der Umtauschung sowohl des Grundes als auch der Folge mit ihrem contradictorischen Gegentheile und in der nachherigen Umstellung dieser Gegentheile. Man folgert also hier aus dem Gegentheile, dem Nichtbestande, der Folge das Gegentheil, den

Nichtbestand des Grundes; oder man hebt mit der Folge auch den Grund auf. Aus dem allgemein hypothetischen Urtheile

„Wenn *A* ist, ist *B*“

schliesst man nemlich:

„Wenn *B* nicht ist, ist auch *A* nicht.“

Diese unmittelbare Folgerung aus einem hypothetischen Urtheile durch Contraposition hat jederzeit strenge logische Gültigkeit. Denn eigentlich ist sie ein abgekürzter hypothetischer Schluss in aufhebender Schlussweise, ein Enthymem der zweiten Ordnung, in welchem der Untersatz fehlt, durch den die Folge aufgehoben wird. In der allgemeinen Form zum aufhebenden hypothetischen Schluss vervollständigt lautet sie daher also:

Obersatz: „Wenn *A* ist, so ist *B*.“
Untersatz: „Nun ist *B* nicht.“
Schlusssatz: „Also ist auch *A* nicht.“

3. Durch die Contraposition der hypothetischen Urtheile oder der durch die unmittelbare Folgerung des Gegentheils des Grundes aus dem Gegentheile der Folge eines hypothetischen Urtheils kann man in der Mathematik, besonders in der reinen Geometrie, wo die meisten Lehrsätze hypothetisch ausgesprochen werden oder sich wenigstens hypothetisch aussprechen lassen, aus sehr vielen Lehrsätzen, sobald sie erwiesen sind, andere unmittelbar erschliessen; ohne dass man wie Euklid und seine Nachahmer, erst noch eines indirecten Beweises für sie bedarf oder über ihre strenge Gültigkeit auch nur den mindesten Zweifel zu hegen vermag. Gewöhnlich wird man dabei, zur Aufhellung der Einsicht, bloss den schon bewiesenen Lehrsatz nachträglich, den daraus abzuleitenden Folgesatz aber anfänglich, in der hypothetischen Form auszusprechen haben, und dem letzteren dann erst noch den angemessenen sprachlichen Ausdruck ertheilen.

Durch einen solchen Vorgang drängt man nicht nur den Lehrgegenstand mehr zusammen — was bei dem gegenwärtigen Umfange der zu lehrenden Wissenschaften schon höchst Noth thut — sondern man verschafft auch dem Lernenden einen helleren Blick in die Natur des Lehrgegenstandes und in den Zusammenhang seiner Wahrheiten.

So z. B. beweist man in der ebenen Geometrie nach Euklid einzeln und nach einander folgende Sätze:

a) „Durch denselben Punkt kann mit einer Geraden nur eine einzige Gerade parallel gezogen werden.“

b) „Eine gerade Linie, welche eine von zwei parallelen schneidet, muss auch die andere schneiden.“

c) „Zwei gerade Linien, welche zu derselben dritten parallel sind, müssen auch unter sich parallel sein.“

Nun sind die beiden ersteren Sätze nichts weiter als verschiedene Ausdrücke des hypothetischen Satzes:

„Wenn zwei Geraden sich schneiden, so können sie nicht zugleich zur nemlichen dritten parallel sein;“

der also allein zu beweisen kommt. Und daraus folgt sogleich ohne allen Beweis bloss durch Contraposition der dritte Satz zunächst in der hypothetischen Form:

„Sind zwei Geraden zu einer dritten parallel, so schneiden sie sich nicht, d. h. sie sind auch zu einander parallel."

Man bedarf daher hier nur Eines Beweises statt dreier.

4. Die Umkehrung eines hypothetischen Urtheils führt jedoch dann auf ein wahres Urtheil, oder man schliesst richtig von dem Bestehen der Folge auf das Bestehen des Grundes, wenn man überzeugt ist, dass nur bei dem angeführten Grunde die Folge nothwendig besteht, oder dass ein bestimmter Grund und eine gewisse Folge einander gegenseitig bedingen, unumgänglich mit einander stehen und fallen.

Hier lässt sich nemlich das gegebene hypothetische Urtheil in der Form aussprechen:

„Nur wenn A ist, ist auch B;"

und man schliesst daraus mit voller logischen Strenge:

„Wenn B ist, muss auch A sein."

Denn in einem solchen Falle gilt das gegebene Urtheil eigentlich folgenden zweien gleich:

„Wenn A ist, ist auch B,"

und

„Wenn A nicht ist, ist auch B nicht."

Aus dem ersteren folgert man aber mittels seiner Umkehrung:

„Wenn B ist, kann — unter andern — A sein;"

und aus dem zweiten Urtheile, mittels der Contraposition:

„Wenn B ist, ist auch A;"

mithin aus beiden Urtheilen zusammen, wie oben:

„Wenn B ist, muss auch A sein."

Z. B. der Satz der Astronomie:

„Nur wenn die Erde die Gestalt einer Kugel hat, ist ihr Schatten auf dem verfinsterten Monde jedesmal kreisrund,"

berechtigt uns zn dem Schlusse:

„Weil der Schatten der Erde auf dem verfinsterten Monde jedesmal kreisrund sich zeigt, so muss die Erde die Kugelgestalt haben."

Ebenso schliesst man aus dem geometrischen Satze:

„Wenn zwei Parallelogramme gleich sind, so haben sie die Grundlinien im verkehrten Verhältnisse der Höhen"

mit Sicherheit:

„Wenn zwei Parallelogramme die Grundlinien im verkehrten Verhältnisse der Höhen haben, so sind sie gleich."

5. Diese letztere Schlussweise wird in der Mathematik, besonders in den Anwendungen der Algebra auf Geometrie, Mechanik, Physik, Astronomie u. dgl. und in der höheren Analysis häufig angewendet.

In den allgemeinen algebraischen Forschungen dieser mathematischen Doctrinen erscheinen nemlich oft gewisse Grössen in einem solchen Zusammenhange, dass überhaupt die zwischen ihren Zahlwerthen bestehenden Beziehungen theils durch Gleichungen, theils durch Ungleichungen, theils auch noch durch sonstige Bedingungen ausgesprochen werden, welche zusammen gefasst ein System von Beziehungen ausmachen, das wir kurz mit A bezeichnen wollen. Tritt nun dazu in einem besonderen Falle noch ein System B von solchen Beziehungen zwischen einigen oder allen in Betracht genommenen Grössen oder ein System particulärer Werthe einiger jener Grössen, und verwandelt sich dadurch, mittels der algebraischen Reductionen, das allgemeine System A nothwendig in ein anderes nun mehr particuläres System C; so gewinnt man daraus die Ueberzeugung:

„Wenn zwischen den betrachteten Grössen insbesondere das System B von Beziehungen besteht, so besteht zwischen ihnen auch das System C."

Hat man nun das System B, wie es gewöhnlich geschieht, so allgemein angenommen, dass nur bei seinem Bestande das System C besteht, was aus der Art der Beziehungen, aus den Formen der Gleichungen und der Beschaffenheit der darin vorkommenden Rechnungsoperationen meistens dergestalt einleuchtet, dass eine weitläufige Erörterung überflüssig erscheint; so ist eigentlich der Satz festgestellt:

„Nur wenn zwischen den in Betracht genommenen Grössen das besondere System B von Beziehungen besteht, kann und muss zwischen ihnen auch das System C von Beziehungen bestehen."

Folglich schliesst man daraus mit voller Sicherheit umgekehrt:

„Wenn das System C von Beziehungen besteht, so besteht auch das System B."

Meistens sprechen die Analytiker diesen Folgesatz nicht erst noch eigens aus, sondern benützen ihn, wo er Anwendung findet, ohne weiteres Bedenken.

Beispiel 1. In der Planimetrie wird der Satz erwiesen:

„Parallelogramme verhalten sich wie die Producte ihrer Grundlinien und Höhen."

Sind nemlich P, p zwei Parallelogramme, A, a ihre Höhen und B, b ihre Grundlinien, so ist

$$P:p=AB:ab.$$

In dieser Proportion setzt man nun insbesondere $P=p$ und folgert daraus auch $AB=ab$ oder $A:a$ wie $b:B$.

Man hat also eigentlich den Satz erwiesen:

„Wenn $P=p$, so $A:a=b:B$"
d. h. „Sind zwei Parallelogramme gleich, so sind ihre Höhen den Grundlinien verkehrt proportional;

und hieraus folgert man sogleich ohne ferneren Beweis umgekehrt:

„Wenn $A:a=b:B$, so $P=p$;

d. h. „Wenn zwei Parallelogramme ihre Höhen den Grundlinien verkehrt proportional haben, so sind sie gleich."

Beispiel 2. Bezeichnen a, b, c die Seiten eines geradlinigen Dreiecks und α, β, γ die in derselben Ordnung ihnen gegenüberliegenden Winkel, so beweist die Trigonometrie den allgemeinen Satz: $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos\alpha$. Nimmt man nun das Product $2bc.\cos\alpha=0$ an, was nur dann sein kann, wenn $\cos\alpha=0$, also $\alpha=90^0$ ist; so erhält man den Satz: Wenn $\alpha=90^0$, so ist $a^2=b^2+c^2$, d. h. den bekannten pythagoräischen Lehrsatz.

Allein man folgert daraus auch sogleich umgekehrt:

„Wenn $a^2=b^2+c^2$, so $\alpha=90^0$;"

d. h. „Wenn in einem Dreiecke die zweite Potenz des Zahlwerthes einer Seite so gross ist, als die zweiten Potenzen der Zahlwerthe der beiden andern Seiten zusammen genommen; so liegt der ersteren Seite ein rechter Winkel gegenüber."

Beispiel 3. Die analytische Geometrie stellt zu einer Linie oder Fläche, für eine gewählte Art von Coordinaten, eine Gleichung oder ein System zusammen gehöriger Gleichungen auf, wodurch jene Linie oder Fläche analystisch vollständig charakterisirt wird; folglich erweist sie eigentlich den Satz:

„Wenn eine Linie oder Fläche für eine gewisse Art von Coordinaten diesen angeführten Charakter besitzt; so kommt ihr die hier abgeleitete Gleichung oder dieses System simultaner Gleichungen zu."

Sie schliesst daraus aber auch noch umgekehrt:

„Wenn einer Linie oder Fläche, bei der angewiesenen Art von Coordinaten, diese bestimmte Gleichung oder dieses bestimmte System von simultanen Gleichungen zukommt, so besitzt sie den vorher beschriebenen Charakter."

So beweist z. B. die Lehre von den Kegelschnitten, dass in der Parabel, wenn p den Parameter eines Durchmessers und x, y die hier gewöhnlichen schiefwinkligen Coordinaten vorstellen, die Gleichung $y^2 = px$ besteht. Andrerseits lehrt die Ballistik oder die Dynamik, dass im leeren Raume ein schief gegen den Horizont geworfener Körper eine Linie durchläuft, deren Gleichung die Form $y^2 = px$ hat; mithin, schliesst sie, beschreibt dieser Körper eine Parabel.

II.

Von der Umkehrung mehrerer zusammenhängender allgemeiner disjunctiver und hypothetischer Urtheile.

1. Höchst wichtig ist folgender, zuerst von Hauber *) aufgestellter Satz, nach dessen Anleitung man aus mehreren zusammen-

*) Vergleiche dessen Scholae logico-mathematicae. cap. 7. Stuttgart. 1829, und Drobisch Logik. Leipzig. 1836. S. 162.

hängenden allgemein bejahenden disjunctiven und hypothetischen Urtheilen mittels Umkehrung andere unmittelbar folgern kann.

Seien als gültig anerkannt:

erstens folgende zwei disjunctive Urtheile:

Der Begriff S kann nur entweder a oder b oder c, oder s. f. sein.
Der Begriff Σ kann nur entweder α oder β oder γ oder s. f. sein;

zweitens folgende hypothetische Urtheile:

Wenn S, a ist, so ist Σ, α;
Wenn S, b ist, so ist Σ, β;
Wenn S, c ist, so ist $\Sigma; \gamma$;
u. s. w.;

dann gelten auch umgekehrt die folgenden hypothetischen Urtheile:

Wenn Σ, α ist, so ist S, a;
Wenn Σ, β ist, so ist S, b;
Wenn Σ, γ ist, so ist S, c;
u. s. w.

Es genügt nur das erste behauptete Urtheil:

„Wenn Σ, α ist; so ist S, a"

zu erweisen, weil die übrigen ihm analog sind.

Indirecter Beweis. Wäre der Behauptung zuwider S nicht a, so müsste S entweder b oder c oder d u. s. f. sein.

Wäre S, b, so wäre nach der Annahme Σ, β also nicht Σ, α
„ S, c, „ „ „ „ „ Σ, γ also nicht Σ, α
wie bedungen, u. s. w.

Mithin wenn Σ, α ist, kann S weder b, noch c, noch d u. s. f. folglich nur a sein, wie behauptet wurde.

Directer Beweis. Aus den vorausgesetzten beiden disjunctiven und allen hypothetischen Urtheilen folgt der Satz:

Wenn S nicht a ist, folglich entweder b oder c oder d u. s. f., so ist Σ entweder β oder γ oder δ u. s. f. also nicht α; kurz: Wenn S nicht a ist, so ist auch Σ nicht α.

Hieraus folgert man aber durch Contraposition sogleich richtig den behaupteten Satz:

Wenn Σ, α ist, so ist S, a.

2. Aus diesem höchst allgemeinen Umkehrungsgesetze lassen sich für die Mathematik viele wichtige Sätze ableiten.

Betrachten wir zunächst zwei mit einander zusammenhängende Gattungen von Grössen in Absicht auf ihre gleichzeitigen Veränderungen. Gewöhnlich beweist man von ihnen folgende zwei Sätze:

1) „Zu gleichen Grössen der ersten Gattung gehören gleiche Grössen der andern Gattung."

2) „Zu ungleichen Grössen der ersten Gattung gehören ungleiche Grössen der zweiten Gattung; und zwar gehört zu

einer *grösseren* Grösse der ersten Gattung eine *grössere* / *kleinere* Grösse der zweiten Gattung.

Hier bedeutet nun S und Σ die Vergleichung, welche zwischen zwei Grössen der ersten und zweiten Gattung besteht; a und α das Gleichsein beider Grössen, b das Grösser-, c das Kleinersein in der ersten Gattung, β das Grösser- / Kleiner- und γ das Kleinersein / Grössersein in der zweiten Gattung. Mithin folgert man nach obigem Umkehrungsgesetze aus den erwiesenen zwei Sätzen noch diese zwei zugehörigen:

3) „Zu *gleichen* Grössen der zweiten Gattung gehören *gleiche* Grössen der ersten Gattung."

4) „Zu *ungleichen* Grössen der *zweiten* Gattung gehören *ungleiche* Grössen der ersten Gattung; und zwar gehört zu einer *grösseren* Grösse der zweiten Gattung eine *grössere* / *kleinere* Grösse der ersten Gattung."

Beispiel 1. Die Algebra beweist, dass, wofern in einem Producte ein Factor (der Multiplicand) ungeändert bleibt, a) zu gleichen zweiten Factoren (Multiplicatoren) gleiche Producte und b) zu einem grösseren zweiten Factor (Multiplicator) ein grösseres Product gehört. Indem sie ferner bei der Lehre von der Theilung das Product in den Dividend, den ersten Factor in den Divisor und den zweiten Factor in den Quotienten übersetzt; folgert sie sogleich, dass, bei ungeändertem Theiler oder Divisor, α) zu gleichen Dividenden gleiche Quotienten und β) zu einem grösseren Dividenden ein grösserer Quotient gehört.

Beispiel 2. Die Planimetrie erweist, dass in einem Dreiecke a) gleichen Seiten gleiche Winkel und b) einer grösseren Seite ein grösserer Winkel gegenüber liegen. Daraus lässt sich daher sogleich folgern, dass auch umgekehrt c) gleichen Winkeln gleiche Seiten und d) einem grössern Winkel eine grössere Seite gegenüber liegen müssen.

3. Diese Sätze lassen sich nunmehr leicht auf *drei oder mehrere* unter einander zusammenhängende *Gattungen von Grössen* ausdehnen. Seien nemlich die beiden folgenden Sätze erwiesen:

1) „Zu gleichen Grössen der ersten Gattung gehören auch gleiche Grössen der zweiten, dritten, vierten und so fort jeder andern Gattung."

2) „Zu einer grösseren Grösse der ersten Gattung gehört bald eine grössere bald eine kleinere Grösse einer jeden andern Gattung, jenachdem diese mit der ersten in gerader oder verkehrter Vergleichung steht."

Dann folgert man daraus umgekehrt für jede übrige Gattung zwei Sätze von folgender Form:

a) „Zu gleichen Grössen jedweder anderen Gattung gehören auch gleiche Grössen der ersten, mithin auch jeder übrigen Gattung."

b) „Zu einer grösseren Grösse jedweder anderen Gattung gehört bald eine grössere, bald eine kleinere Grösse der ersten, jenachdem diese zwei Gattungen in gerader oder verkehrter Vergleichung mit einander stehen; mithin gehört dazu auch entweder eine grössere oder kleinere Grösse jeder übrigen Gattung, je nachdem diese mit der ersten Gattung in gerader oder verkehrter Vergleichung steht.

Beispiel 1. In der Planimetrie / Stereometrie beweist man von den schiefen Geraden, die nebst der senkrechten aus einem Punkte an eine Gerade / Ebene gezogen werden die beiden Sätze:

a) Schiefe, welche mit der Senkrechten gleiche Winkel bilden, sind gleich und haben ihre Fusspunkte von dem der Senkrechten gleich weit abstehen.

b) Zu einem grösseren Winkel einer Schiefen mit der Senkrechten gehört eine grössere oder längere Schiefe und ein grösserer Abstand von der Senkrechten.

Hieraus folgt nun umgekehrt:

c) Gleiche Schiefen bilden mit der Senkrechten gleiche Winkel und stehen von der Senkrechten gleich weit ab.

d) Eine grössere Schiefe bildet mit der Senkrechten einen grösseren Winkel und steht von ihr weiter ab.

e) Schiefe, welche von der Senkrechten gleich weit abstehen, bilden mit der Senkrechten gleiche Winkel und sind gleich.

f) Eine Schiefe, welche von der Senkrechten weiter absteht, bildet mit dieser Senkrechten einen grössern Winkel und ist länger.

Beispiel 2. Die Lehre vom Kreise beweist, dass

a) zu gleichen Winkeln am Mittelpunkte gleiche Kreisbogen, Kreisausschnitte, Sehnen und gleiche Winkel der Sehnen mit den Halbmessern zu ihren Grenzpunkten, gleiche Abstände der Sehnen vom Mittelpunkte, gleiche Sagitten und Kreisabschnitte gehören; und

b) dass zu einem grösseren hohlen / erhobenen Winkel am Mittelpunkte auch ein grösserer Kreisbogen und Kreisausschnitt, eine grössere / kleinere Sehne, ein kleinerer / grösserer Winkel der Sehne mit dem Halbmesser am Grenzpunkte, ein kleinerer / grösserer Abstand der Sehne vom Mittelpunkte, eine grössere / kleinere Sagitte und ein grösserer / kleinerer Kreisabschnitt gehört.

Daraus kann man sogleich umgekehrt schliessen, dass wenn einer der genannten Gegenstände gleich ist, auch jeder andere gleich sein muss; und dass z. B. einer längeren Sehne ein grösserer hohler und ein kleinerer erhobener Winkel am Mittelpunkte, ein kleinerer Winkel der Sehne mit dem Halbmesser an ihren Grenzpunkten, ein kürzerer Abstand vom Mittelpunkte u. s. f. angehört.

4. Selbst wenn die Abhängigkeit der betrachteten Gattungen von Grössen in bestimmteren Formen ausgesprochen wird, lässt

sich das angeführte Umkehrungsgesetz noch benützen, wie z. B. bei der *Proportionalität* zweier Gattungen von Grössen.

Ist nemlich erkannt, dass zwei Gattungen von Grössen dergestalt zusammenhängen: α) dass zu gleichen Grössen einer jeden Gattung auch gleiche der anderen und β) zu einer grösseren einer jeden Gattung auch eine grössere / kleinere der anderen gehört und γ) dass zu jedem Vielfachen einer jeden Grösse der ersten Gattung das Ebensovielfache / der ebensovielte Theil der zugehörigen Grösse der zweiten Gattung gehört; so gilt, vermöge des erwähnten Umkehrungsgesetzes, auch der Schluss umgekehrt von der zweiten Gattung auf die erste, und beide Gattungen von Grössen heissen dann zu einander direct / verkehrt proportional

5. Aus allen diesen Beispielen erhellet, dass hier, so wie in ähnlichen Fällen die Beweise, ja sogar die blosse Anführung der umgekehrten Sätze, da diese für sich verständlich sind, überflüssig ist, wenn nur dieses Umkehrungsgesetz als dem zu Unterrichtenden bereits bekannt vorausgesetzt werden darf, daher zu diesem Zwecke etwa in die Vorrede oder in die Vorbegriffe des betreffenden Lehrbuches aufgenommen worden ist.

III.

Ueber indirecte Beweise und ihre Ersetzung durch directe.

1. Directe Beweise lassen bekanntlich die Wahrheit ihres Satzes als Schlusssatz aus richtigen Prämissen unmittelbar erkennen; indirecte Beweise dagegen stellen die Gültigkeit ihrer Behauptung dadurch ausser Zweifel, dass sie zeigen, das Gegentheil derselben sei unmöglich, in so fern es andern anerkannten Wahrheiten widerstreitet. Directe Beweise gewähren daher eine befriedigende Erkenntniss des nothwendigen Zusammenhanges der Behauptung mit ihren Beweisgründen, indirecte aber lassen nur den Widerstreit des Gegentheils der Behauptung mit den Beweisgründen erkennen. Denn directe Beweise zeigen, dass und warum etwas wahr sei und gerade so sein müsse, die indirecten aber bloss, dass und warum es nicht falsch sei und nicht anders sein könne. Durch den directen Beweis werden wir daher weit inniger von der Wahrheit des zu beweisenden Satzes durchdrungen, als durch den indirecten Beweis, welcher uns bloss das Zugeständniss derselben abnöthigt. Doch sind darum die indirecten Beweise noch nicht geradezu verwerflich; denn wo sich die vorausgesetzten Disjunctionen, von denen man eine behauptet, die übrigen aber widerlegt, vollständig übersehen lassen, wie vorzüglich in der Mathematik, passt derselbe immerhin. Wünschenswerth bleibt es jedoch immer, die indirecten Beweise überall, wo es nur angeht, durch directe zu ersetzen und sie nur als unumgängliche Nothbehelfe zu gebrauchen. Wie jenes Ersetzen wenigstens in manchen Fällen geleistet werden kann, soll hier gewiesen werden.

2. Haupthülfen der Vermeidung indirecter Beweise sind die bereits in den vorangehenden zwei Abschnitten behandelten Contrapositionen hypothetischer Urtheile und die Umkehrung hypothetisch-disjunctiver Urtheile; da die daraus fliessenden unmittelbaren Folgerungen sonst indirect erwiesen werden müssten.

Man wird daher überhaupt das indirect zu beweisende logische Urtheil vorerst contraponiren und dieses neue (contraponirende) Urtheil erweisen; dann folgt daraus, mittels abermaliger Contraposition, das zu erweisende von selbst. Soll das kategorische Urtheil

„*A* ist *B*“

bewiesen werden, so wird man vorerst das contraponirende

„Ein Nicht-*B* kann nicht *A* sein“

begründen; dann folgt jenes unmittelbar daraus.

Ist das hypothetische Urtheil

„Wenn *A* ist, so ist *B*“

zu erweisen, so zeigt man zuvörderst

„Wenn *B* nicht ist, so ist auch *A* nicht.“

Sehr oft muss aber hierbei noch eine Umgestaltung des Ausdruckes des vorerst zu erweisenden contraponirenden Urtheils vorgenommen werden.

Beispiel 1. Dem Satze:

„Wenn zwei in einer Ebene befindliche Geraden von einer dritten unter gleichen Wechselwinkeln geschnitten werden (d. h. so, dass jede zwei Wechselwinkel gleich sind und jede zwei Gegenwinkel *) zusammen genommen zwei rechte Winkel ausmachen), so schneiden sie sich nicht, und sind also zu einander parallel;“ schickt Euklid folgende zwei Sätze voraus:

„In jedem Dreiecke ist

1) der äussere Winkel grösser als jeder innere ihm gegenüber liegende, und

2) die Summe jeder zwei Winkel kleiner als zwei rechte.“

Beide lassen sich nun in den Satz zusammenziehen:

„Wenn sich zwei Geraden schneiden, so werden sie von jeder dritten Geraden in zwei Punkten dergestalt geschnitten, dass auf derjenigen Seite der Schneidenden, auf welcher ihr Durchschnittspunkt liegt, der äussere Winkel grösser als sein innerer Wechselwinkel und die Summe der inneren Gegenwinkel kleiner als zwei rechte ist, kurz, sie werden unter ungleichen Wechselwinkeln geschnitten.“

Daraus folgt demnach der anfangs aufgestellte Satz unmittelbar bloss durch einfache Contraposition ohne den weitwendigen Beweis Euklids.

---

*) Vergl. Knar Anfangsgründe der reinen Geometrie. Grätz. 1829. S. 42. §. 160.

Beispiel 2. Eben so folgt sein Satz:

„Wenn an den Berührungspunkt einer Geraden mit einer Kreislinie der Halbmesser gezogen wird, so muss dieser auf der berührenden Geraden senkrecht sein"

ohne den indirecten Beweis, den er giebt, aus dem nächst vorhergehenden Lehrsatze:

Die gerade Linie, welche auf dem Halbmesser in dem End punkte senkrecht errichtet wird, berührt die Kreislinie;

„jede andere Gerade aber, die durch eben diesen Punkt (also schief gegen den Halbmesser) gezogen wird, schneidet die Kreislinie noch in einem zweiten Punkte."

Denn hieraus folgt durch Contraposition unmittelbar:

„Wenn eine Gerade eine Kreislinie in einem Punkte nicht schneidet, sondern berührt, so steht sie nicht schief auf dem Halbmesser dieses Punktes"

und dieser Satz ist dem zu erweisenden gleichgeltend.

3. Oft kommt zu erweisen, dass unter mehreren möglichen Gegenständen einer Art nur ein einziger eine beschriebene Eigenschaft besitze. In einem solchen Falle umgeht man den indirecten Beweis, wenn man darthut, dass, sobald man sich ausser jenem ausgezeichneten Gegenstande noch was immer für einen dieser Art denken will, er die angeführte Eigenschaft nicht, oder das Gegentheil derselben besitzt. Zuweilen ist dazu erforderlich, die Definition dieser Eigenschaft und ihres Gegentheils in dem zu erweisenden Lehrsatze zu wiederholen.

Beispiel 1. Soll der Satz bewiesen werden:

„Jede begrenzte Linie hat nur Einen Halbirungspunkt",

so zeigt man, dass jeder andere Punkt, den man sich ausser dem angenommenen Halbirungspunkte denken will, die Linie in zwei Theile zerschneidet, von denen einer kleiner, der andere grösser als die Hälfte ist, die also ungleich sind.

Beispiel 2. Den Satz:

„Durch einen Punkt ist auf eine Gerade nur eine einzige Senkrechte möglich"

beweist man, indem man durch diesen Punkt ausser der angenommenen Senkrechten noch eine beliebige andere gerade Linie führt und von ihr nachweist, dass sie mit der gegebenen ungleiche Nebenwinkel bildet, also nicht senkrecht, sondern schief auf dieser steht.

4. Häufig hat man zu beweisen, dass irgend einem Gegenstande, z. B. einer Linie, insbesondere einer geraden, oder einer Fläche, insbesondere einer ebenen, mehrere solche Eigenschaften zugleich zukommen, von denen jede, an und für sich allein betrachtet, nur einem einzigen derartigen Gegenstande anhaften kann. In einem solchen Falle denkt man sich, nebst dem angenommenen mit einer derlei Eigenschaft begabten einzig möglichen Gegenstande, noch einen weiteren mit einer solchen Eigenschaft, von der bereits nachgewiesen ist, dass mit ihr nothwendig auch jede der übrigen, also auch jene vorausgesetzte, verknüpft ist; und schliesst dar-

aus, dass jener Gegenstand mit diesem ganz identisch sein muss, folglich dass auch ihm alle übrigen genannten Eigenschaften zukommen.

Man habe nämlich allgemein folgende zwei Urtheile bereits festgestellt:

1) „Nur ein einziges Subject kann jedesmal eines der Merkmale a, b, c, d.... einzeln besitzen."

2) „Wenn unter gewissen Umständen ein solches Subject das Merkmal a besitzt, so kommen ihm auch alle übrigen Merkmale b, c, d.... vereint zu."

Dann gilt auch das folgende Urtheil:

„Wenn unter denselben Umständen ein Subject S eines der letzteren Merkmale b, c, d.... ohne a besitzt, so besitzt es auch alle übrigen,

d. h. wenn S, b ist, so ist auch S, acd....
wenn S, c ist, so ist auch S, abd....
wenn S, d ist, so ist auch S, abc....
u. s. f."

kurz die Merkmale a, b, c, d... können unter diesen Umständen nicht von einander getrennt, sondern nur vereint bestehen; sie stehen und fallen mit einander.

Es genügt hier nur den einen Satz:

„Wenn S, b ist, so ist auch S, acd..."

zu erweisen, da die übrigen ihm analog sind.

Man denke sich unter den hier stets bedungenen Umständen das einzig mögliche Subject S', dem das Merkmal a zukommt; dann besitzt es auch das Merkmal b, vermöge des zweiten als erwiesen vorausgesetzten Satzes. Allein dieses Merkmal b kommt zufolge der Annahme dem Subjecte S zu und kann nach dem ersten, als bereits für gültig anerkannten Satze, nur einem einzigen Subjecte eigen sein; folglich muss das Subject S mit S' einerlei, ganz das nemliche Eine sein; mithin kommt diesem Subjecte S auch das Merkmal a und daher, gemäss dem zweiten Satze, auch die weiteren Merkmale c, d.... zu.

Beispiel 1. Die Planimetrie erweist folgenden Satz:

„Jede Gerade, die in einem Dreiecke zu einer Seite parallel geführt wird, zerschneidet die beiden anderen Seiten proportional" (d. i. so, dass die von einer gemeinsamen Spitze aus auf ihnen abgeschnittenen Stücke den übrig bleibenden Stücken und den ganzen Seiten selbst direct proportional sind).

Dieser Satz umgekehrt lautet:

„Eine Gerade, die zwei Seiten eines Dreieckes proportional zerschneidet, ist zur dritten Seite parallel" und wird gewöhnlich indirect, auf folgende Weise aber auch direct erwiesen.

Jede begrenzte Linie kann von einem angewiesenen Grenzpunkte zum anderen hin in einem angegebenen Verhältnisse nur auf Eine Weise, d. i. durch einen einzigen Punkt, in zwei Theile getheilt werden. Man kann daher den Einschnitt der Geraden in die erste Seite entweder frei, oder erst durch dieses Verhältniss bestimmt ansehen; dann theilt auch nur Ein Punkt die zweite

Seite in demselben Verhältnisse, in welchem die erste bereits getheilt ist. Durch zwei Punkte ist nur Eine Gerade denkbar; also hier auch nur Eine Gerade, welche die zwei Seiten in gleichem Verhältnisse zerschneidet. Durch einen Punkt ist zu einer Geraden nur Eine parallele Gerade möglich; also durch jenen Theilungspunkt der ersten Seite auch bloss Eine parallele Gerade zur dritten Seite. Diese parallele zerschneidet aber die beiden anderen Seiten in gleichem Verhältnisse. Mithin ist jene proportional zerschneidende Gerade mit dieser parallelen identisch, d. h. selbst parallel zur dritten Seite.

Beispiel 2. In jedem Dreiecke hat *a*) jeder Winkel nur Eine Halbirungslinie, *b*) aus jeder Spitze lässt sich auf die gegenüber stehende Seite nur Eine Senkrechte fällen, *c*) jede Spitze kann nur durch Eine Gerade mit dem Halbirungspunkte der Gegenseite verbunden werden, und *d*) in dem Halbirungspunkte jeder Seite lässt sich nur Eine Gerade auf die Seite senkrecht aufstellen.

Nun kommt aber im gleichschenkligen Dreiecke am Scheitel desselben derjenigen Geraden, welche die erste Eigenschaft besitzt, auch jede der drei übrigen zu; mithin sind in diesem besonderen Falle die angeführten 4 Eigenschaften unzertrennlich mit einander verbunden, jede einzelne zieht die drei übrigen nach sich. Darnach ergeben sich als vollkommen begründet die bekannten 4 Sätze von der Halbirungslinie des Winkels am Scheitel im gleichschenkligen Dreiecke.

5. Zuweilen hilft man sich auch schon damit, dass man den zu erweisenden Satz nicht im voraus vollständig in Zeichen darstellt, die ihn erläuternde geometrische Figur nicht ganz auszeichnet, sondern erst im Beweise die nöthigen Zeichen oder räumlichen Gegenstände einführt. So z. B. lässt sich der Satz:

„die Mitte der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks liegt von den Spitzen desselben gleich weit ab",

den Euklid indirect erweist, direct erweisen, wenn man den rechten Winkel durch eine Richtung so zertheilt, dass diese mit jeder Kathete einen eben so grossen Winkel als die Hypotenuse bildet. Denn diese Richtung schneidet in die Hypotenuse ein, an jeder Kathete liegen gleiche Winkel, also in den entstandenen beiden Dreiecken diesen Winkeln gegenüber gleiche Seiten. Mithin ist jener Einschnittspunkt in die Hypotenuse von allen drei Spitzen des Dreiecks gleich weit entfernt, und also auch die Mitte der Hypotenuse.

6. Andere Wege, auf denen man in besonderen Fällen die indirecten Beweise umgeht, gestatten endlich nicht wohl eine allgemeine Darlegung.

So z. B. der Satz:

„Wenn zwei in einer Ebene enthaltene unendliche Geraden von einer dritten unter gleichen Wechselwinkeln geschnitten werden, so schneiden sie sich nicht",

wird bewiesen, indem man die zu beiden Seiten der Schneidenden gelegenen Paare von Richtungen, was hier möglich ist, zur Deckung bringt und nun statt des hier gewöhnlichen indirecten Beweises

direct, wie folgt, schliesst *). Wenn zwei Paare gerader Linien mit einander zusammenfallend gedacht werden können, so müssen, wenn die Geraden des einen Paares sich schneiden, auch die des anderen Paares sich schneiden, und wenn jene von einander getrennt bleiben, auch diese überall aus einander bleiben. Daher müssen die beiden betrachteten unbegrenzten Geraden entweder zu beiden Seiten der Schneidenden getrennt bleiben oder auf beiden Seiten zusammentreffen. Das Letztere ist jedoch undenkbar, weil zwei Gerade höchstens Einen Punkt gemein haben können; mithin gilt das Erstere, nämlich die Geraden treffen sich nirgends.

IV.

Ueber die Vermeidung der inductorischen Beweise in der Mathematik.

1. Die Inductions-Beweise werden, wegen ihrer zu grossen Weitläufigkeit, in der Mathematik nur als Nothbehelfe verwendet, wo andere präcise Beweise mangeln Denn vorerst muss aus mehreren einzelnen, an oder nach einander gereihten Fällen das Gemeinsame oder allgemein Gültige abstrahirt und als in einigen ersten Fällen gültig nachgewiesen werden. Dann ist zu erweisen, dass sobald dies als wahrscheinlich hingestellte Gesetz bis zu einem gewissen Falle gültig ist, es auch noch bis zu dem nächst folgenden Falle gelten müsse. Dadurch erst erlangt man die Ueberzeugung, dass das aufgestellte Gesetz oder der zu beweisende Satz allgemeine Gültigkeit besitzt; und der Inductionsbeweis heisst so fort vervollständigt. Nicht bloss, dass dadurch der Zug des Beweises sich sehr verlängert, so erfährt man durch ihn auch nur, wie jeder folgende Fall mit dem nächst früheren zusammenhängt, keineswegs aber gewinnt man eine helle Einsicht in den nothwendigen Zusammenhang des zu erweisenden Satzes mit seinen Beweisgründen; die Kraft des Beweises, der *nervus probandi*, wird gleichsam verdunkelt oder versteckt gehalten.

2. Wo daher der inductorische Beweis sich vermeiden lässt, da sollte man ihn immer durch einen auf sein Ziel gerade losgehenden directen Beweis ersetzen.

Beispiel 1. So wurde sonst der binomische Lehrsatz in der Algebra für ganze absolute Exponenten inductorisch erwiesen, wie er selbst durch Induction entdeckt worden war. Allein wie vollständig und richtig der Beweis auch hingestellt werden mag, so gewährt er doch dem denkenden Geiste keine deutliche und lebendige Ueberzeugung, weil man nicht den nothwendigen Zusammenhang des Bildungsgesetzes der Coefficienten der einzelnen Glieder mit dem Bau der Potenzen einsieht. Heut zu Tage, wo die Combinationslehre auf den hinreichenden Grad ausgebildet ist, wird jener inductorische Beweis durch den directen combinatorischen als den überzeugendsten ersetzt.

---

*) Vergl. De Veley éléments de géométrie. 3 édit. Genéve 1830. pag. 24. num. 29. Ohm. M. ebene Raumgrössenlehre. 2 Aufl. Berlin. 1835. S. 111. §. 22.

Beispiel 2. Eben so kann der Satz:

„Das Product mehrerer Zahlen gibt durch jede Zahl getheilt denselben Rest, wie das Product der Reste der Factoren nach dem nemlichen Theiler"

inductorisch erwiesen werden, befriedigender aber direct auf folgende Weise.

Geben die Factoren des Productes durch den Theiler t getheilt die Quoti $a, b, c, \ldots . m$ und die Reste $\alpha, \beta, \gamma, \ldots . \mu$, so sind die nach einander folgenden Factoren $at+\alpha$, $bt+\beta$, $ct+\gamma, \ldots . mt+\mu$, daher das Product selbst

$$(at+\alpha)\;(bt+\beta)\;(ct+\gamma)\ldots .(mt+\mu).$$

Denkt man sich nun die Multiplication ausgeführt und das Endresultat nicht reducirt, so liefert in jedes Theilproduct dieses nicht reducirten Endproductes jeder der zweigliedrigen Factoren ein Glied, sein erstes oder sein zweites; daher muss es ein, und zwar nur ein einziges, Theilproduct geben, welches bloss die zweiten Glieder der Factoren, also gar kein erstes Glied eines Factors, in sich vereint und daher $= \alpha\beta\gamma \ldots \mu$ ist. Jedes der übrigen Theilproducte aber muss wenigstens aus Einem Factor das erste Glied in sich aufnehmen, folglich sowie dieses erste Glied selbst durch den Theiler t theilbar sein; mithin nimmt es auf den Rest des ganzen Productes gar keinen Einfluss, sondern bloss jenes einzige Theilproduct $\alpha\beta\gamma \ldots . \mu$, nemlich das Product der Reste der einzelnen Factoren.

3. Die neuere höhere Analysis nimmt es mit der Induction gewöhnlich nicht sehr genau und dies nicht ganz ohne Recht. Sehr oft ersieht man nämlich an den Gliedern einer Reihe, an mehreren nach einander folgenden Ausdrücken oder Gleichungen, welche aus einer Untersuchung nach und nach sich entwickeln, ein bestimmtes Bildungsgesetz so deutlich ausgesprochen, dass es für nutzlose Weitläufigkeit gehalten würde, wenn man die vollkommene Gültigkeit dieses Gesetzes erst noch umständlich nachweisen wollte, da man doch den Gang der successiven Entwickelung leicht überschaut und an der Richtigkeit der ohne Mühe hinzustellenden allgemeinen Formen solcher Ausdrücke oder Gleichungen auch nicht den mindesten Anstand findet. Belege hiezu geben z. B. die Reihenentwickelungen der Exponentiellen, Logarithmen, Sinus, Cosinus u. dgl. mittels der Methode der unbestimmten Coefficienten.

V.

Ueber die Umgehung der logischen Divisionen und Distinctionen in mathematischen Beweisen.

Die logische Division fordert die vollständige Aufzählung aller einem höheren Begriffe untergeordneten und einander selbst beigeordneten Begriffe. Von ihr wird in der Mathematik häufig Gebrauch gemacht, wenn die Gültigkeit eines Theorems für alle verschiedenen möglichen Fälle erwiesen werden soll. Es lässt sich jedoch nicht verkennen, dass dadurch der Beweis weitläufig und mühsamer

zu übersehen ausfällt. Darum bleibt es vortheilhaft, dergleichen Eintheilungen und Unterscheidungen überall, wo es ohne Beeinträchtigung der Strenge und Allgemeinheit des Beweises geschehen kann, bei Seite zu lassen. Wie dies in einzelnen Fällen zu leisten sei, soll hier gezeigt werden.

Beispiel 1. Ein in der Mathematik, besonders in der Geometrie, oft vorkommender Fall ist der, wo die Gleichheit zweier Grössen A und B indirect zu erweisen ist. Hier schliesst man gewöhnlich also: „Könnte A nicht $= B$ sein, so müsste entweder $A > B$ oder $A < B$ sein." Und dann zeigt man, dass weder jenes noch dieses bestehen kann. Allein immer lässt sich der Nachsatz hier so wenden: „Wären die Grössen A und B ungleich, so müsste eine aus ihnen die grössere sein; sei diese die A, nämlich $A > B$." Hat man dann nur dieses Eine, dass die zwei Grössen nicht ungleich sein können, erwiesen, so müssen sie nothwendig einander gleich sein.

Beispiel 2. Der planimetrische Satz:

„Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen sind gleich"

wird von Euklid erwiesen, indem er die Parallelogramme auf einerlei Grundlinie zwischen dieselben zwei parallelen Geraden stellt und dabei die hier möglichen drei Fälle unterscheidet, je nachdem ein Grenzpunkt der zur Grundlinie parallelen Seite entweder zwischen die Grenzpunkte oder auf einen Grenzpunkt oder endlich ausserhalb beider Grenzpunkte der analogen Seite im andern Parallelogramm zu liegen kommt. Man bedarf jedoch dieser Unterscheidung gar nicht, wenn man die Parallelogramme nicht als Summen, sondern als Unterschiede congruenter Trapeze und Dreiecke darstellt *), indem man bloss die beiden Dreiecke, deren Congruenz man jedesmal erweisen muss, von dem entstandenen ganzen Trapeze abzieht, wornach theils das eine, theils das andere Parallelogramm übrig bleibt. Aehnlich verfährt man auch, wenn man erweisen will, dass Parallelepipede von gleichen Grundebenen und Höhen gleich sind **).

---

*) Vergl. Leslie T. Geometrical Analysis, Vega Vorles. über Mathematik. 7 Aufl., herausgegeben von Matzka. Wien 1835.

**) Vergl. Nr. IV. meines Aufsatzes im Archiv. Bd. 4. Heft 4. S. 362.

XLV.

Goniometrische Auflösung dreier Gleichungen von der Form $ax+by+cz=i$, $a_1x+b_1y+c_1z=i_1$, $x^2+y^2+z^2=1$.

Von
dem Herausgeber.

Wegen der dritten der drei aufzulösenden Gleichungen ist man berechtigt

$$1)\quad \begin{cases} x=\cos\varphi\cos\psi, \\ y=\sin\varphi\cos\psi, \\ z=\sin\psi \end{cases}$$

zu setzen, und hat dann bloss die beiden folgenden Gleichungen aufzulösen:

$$2)\quad \begin{cases} a\cos\varphi\cos\psi+b\sin\varphi\cos\psi+c\sin\psi=i, \\ a_1\cos\varphi\cos\psi+b_1\sin\varphi\cos\psi+c_1\sin\psi=i_1. \end{cases}$$

Bringt man diese Gleichungen auf die Form

$$3)\quad \begin{cases} (a\cos\varphi+b\sin\varphi)\cos\psi+c\sin\psi=i, \\ (a_1\cos\varphi+b_1\sin\varphi)\cos\psi+c_1\sin\psi=i_1; \end{cases}$$

und bestimmt aus denselben $\sin\psi$ und $\cos\psi$ durch gewöhnliche algebraische Elimination, so erhält man:

$$4)\quad \begin{cases} \sin\psi=\dfrac{(ai_1-ia_1)\cos\varphi+(bi_1-ib_1)\sin\varphi}{(ac_1-ca_1)\cos\varphi+(bc_1-cb_1)\sin\varphi}, \\ \cos\psi=-\dfrac{ci_1-ic_1}{(ac_1-ca_1)\cos\varphi+(bc_1-cb_1)\sin\varphi}. \end{cases}$$

Weil nun $\sin\psi^2+\cos\psi^2=1$ ist, so ist, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned} 5)\quad &\{(ac_1-ca_1)^2-(ai_1-ia_1)^2\}\cos\varphi^2 \\ &+\{(bc_1-cb_1)^2-(bi_1-ib_1)^2\}\sin\varphi^2 \\ &-2\{(ai_1-ia_1)(bi_1-ib_1)-(ac_1-ca_1)(bc_1-cb_1)\}\sin\varphi\cos\varphi \\ &=(ci_1-ic_1)^2, \end{aligned}$$

aus welcher Gleichung φ bestimmt werden muss. Setzt man aber in derselben

$\cos\varphi^2 = \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)$, $\sin\varphi^2 = \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)$, $\sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi$;

so erhält sie folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}6)\ & 2\{(ai_1 - ia_1)(bi_1 - ib_1) - (ac_1 - ca_1)(bc_1 - cb_1)\}\sin 2\varphi \\ & -\{(ac_1 - ca_1)^2 - (bc_1 - cb_1)^2 - (ai_1 - ia_1)^2 + (bi_1 - ib_1)^2\}\cos 2\varphi \\ & = (ac_1 - ca_1)^2 + (bc_1 - cb_1)^2 - (ai_1 - ia_1)^2 - (bi_1 - ib_1)^2 \\ & \qquad - 2(ci_1 - ic_1)^2.\end{aligned}$$

Berechnet man jetzt den Hülfswinkel Θ mittelst der Formel:

$$7)\ \operatorname{tang}\Theta = \frac{(ac_1 - ca_1)^2 - (bc_1 - cb_1)^2 - (ai_1 - ia_1)^2 + (bi_1 - ib_1)^2}{2\{(ai_1 - ia_1)(bi_1 - ib_1) - (ac_1 - ca_1)(bc_1 - cb_1)\}},$$

so erhält man nach einigen leichten Reductionen zur Berechnung von φ den folgenden Ausdruck:

$$8)\ \sin(2\varphi - \Theta) = \frac{(ac_1 - ca_1)^2 + (bc_1 - cb_1)^2 - (ai_1 - ia_1)^2 - (bi_1 - ib_1)^2 - 2(ci_1 - ic_1)^2}{2\{(ai_1 - ia_1)(bi_1 - ib_1) - (ac_1 - ca_1)(bc_1 - cb_1)\}}\cos\Theta.$$

Nach einer sehr bekannten arithmetischen Transformation ergeben sich aber hieraus zur Berechnung von φ die folgenden Ausdrücke. Man berechne zuerst die Hülfsgrössen A, B, C mittelst der Formeln:

$$9)\ \begin{cases} A = \dfrac{\{a(c_1 + i_1) - a_1(c+i)\}\{a(c_1 - i_1) - a_1(c-i)\}}{2\{(ai_1 - ia_1)(bi_1 - ib_1) - (ac_1 - ca_1)(bc_1 - cb_1)\}}, \\ B = \dfrac{\{b(c_1 + i_1) - b_1(c+i)\}\{b(c_1 - i_1) - b_1(c-i)\}}{2\{(ai_1 - ia_1)(bi_1 - ib_1) - (ac_1 - ca_1)(bc_1 - cb_1)\}}, \\ C = \dfrac{(ci_1 - ic_1)^2}{(ai_1 - ia_1)(bi_1 - ib_1) - (ac_1 - ca_1)(bc_1 - cb_1)}; \end{cases}$$

dann hat man zur Berechnung von Θ und φ die folgenden Ausdrücke:

$$10)\ \begin{cases} \operatorname{tang}\Theta = A - B, \\ \sin(2\varphi - \Theta) = (A + B - C)\cos\Theta. \end{cases}$$

Die Grösse ψ findet man, nachdem man φ gefunden hat, mittelst der Formeln 4), oder besser mittelst der aus denselben fliessenden Gleichung:

$$11)\ \operatorname{tang}\psi = -\frac{ai_1 - ia_1}{ci_1 - ic_1}\cos\varphi - \frac{bi_1 - ib_1}{ci_1 - ic_1}\sin\varphi.$$

Setzt man

$$12)\ \operatorname{tang}\omega = \frac{bi_1 - ib_1}{ai_1 - ia_1},$$

so ist

$$13)\ \tang \psi = -\frac{ai_1 - ia_1}{ci_1 - ic_1} \cdot \frac{\cos(\varphi - \omega)}{\cos \omega}.$$

Die Möglichkeit der Auflösung hängt, wie sogleich aus den Gleichungen 10) geschlossen wird, davon ab, dass der absolute Werth der Grösse

$$(A+B-C)\cos\Theta$$

nicht grösser als die Einheit ist, eine Bedingung, die wir daher von jetzt an im Folgenden als erfüllt voraussetzen wollen.

Bezeichnen wir nun durch u den, absolut genommen, kleinsten Werth, welchen $2\varphi - \Theta$ der zweiten der Gleichungen 10) zufolge haben kann, so ist bekanntlich, wenn k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, entweder

$$2\varphi - \Theta = u + 2k\pi$$

oder

$$2\varphi - \Theta = (2k+1)\pi - u;$$

und folglich entweder

$$2\varphi = u + \Theta + 2k\pi$$

oder

$$2\varphi = (2k+1)\pi - (u - \Theta);$$

also entweder

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(u+\Theta) + k\pi$$

oder

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(\pi - u + \Theta) + k\pi.$$

Daher ist entweder

$$\sin\varphi = (-1)^k \sin\tfrac{1}{2}(u+\Theta),\quad \cos\varphi = (-1)^k \cos\tfrac{1}{2}(u+\Theta)$$

oder

$$\sin\varphi = (-1)^k \sin\tfrac{1}{2}(\pi - u + \Theta),\quad \cos\varphi = (-1)^k \cos\tfrac{1}{2}(\pi - u + \Theta).$$

Folglich ist nach 4) entweder

$$\sin\psi = \frac{(ai_1 - ia_1)\cos\frac{1}{2}(u+\Theta) + (bi_1 - ib_1)\sin\frac{1}{2}(u+\Theta)}{(ac_1 - ca_1)\cos\frac{1}{2}(u+\Theta) + (bc_1 - cb_1)\sin\frac{1}{2}(u+\Theta)},$$

$$\cos\psi = -(-1)^k \frac{ci_1 - ic_1}{(ac_1 - ca_1)\cos\frac{1}{2}(u+\Theta) + (bc_1 - cb_1)\sin\frac{1}{2}(u+\Theta)}$$

oder

$$\sin\psi = \frac{(ai_1 - ia_1)\cos\frac{1}{2}(\pi - u + \Theta) + (bi_1 - ib_1)\sin\frac{1}{2}(\pi - u + \Theta)}{(ac_1 - ca_1)\cos\frac{1}{2}(\pi - u + \Theta) + (bc_1 - cb_1)\sin\frac{1}{2}(\pi - u + \Theta)},$$

$$\cos\psi = -(-1)^k \frac{ci_1 - ic_1}{(ac_1 - ca_1)\cos\frac{1}{2}(\pi - u + \Theta) + (bc_1 - cb_1)\sin\frac{1}{2}(\pi - u + \Theta)}.$$

Also ist entweder

$$x = \cos\varphi\cos\psi$$

$$= -\frac{(ci_1 - ic_1)\cos\frac{1}{2}(u+\Theta)}{(ac_1 - ca_1)\cos\frac{1}{2}(u+\Theta) + (bc_1 - cb_1)\sin\frac{1}{2}(u+\Theta)},$$

$$y = \sin\varphi\cos\psi$$

$$= -\frac{(ci_1 - ic_1)\sin\frac{1}{2}(u+\Theta)}{(ac_1 - ca_1)\cos\frac{1}{2}(u+\Theta) + (bc_1 - cb_1)\sin\frac{1}{2}(u+\Theta)},$$

$$z = \sin\psi$$

$$= \frac{(ai_1 - ia_1)\cos\frac{1}{2}(u+\Theta) + (bi_1 - ib_1)\sin\frac{1}{2}(u+\Theta)}{(ac_1 - ca_1)\cos\frac{1}{2}(u+\Theta) + (bc_1 - cb_1)\sin\frac{1}{2}(u+\Theta)}$$

oder

$$x = \cos\varphi\cos\psi$$

$$= -\frac{(ci_1 - ic_1)\cos\frac{1}{2}(\pi - u + \Theta)}{(ac_1 - ca_1)\cos\frac{1}{2}(\pi - u + \Theta) + (bc_1 - cb_1)\sin\frac{1}{2}(\pi - u + \Theta)},$$

$$y = \sin\varphi\cos\psi$$

$$= -\frac{(ci_1 - ic_1)\sin\frac{1}{2}(\pi - u + \Theta)}{(ac_1 - ca_1)\cos\frac{1}{2}(\pi - u + \Theta) + (bc_1 - cb_1)\sin\frac{1}{2}(\pi - u + \Theta)},$$

$$z = \sin\psi$$

$$= \frac{(ai_1 - ia_1)\cos\frac{1}{2}(\pi - u + \Theta) + (bi_1 - ib_1)\sin\frac{1}{2}(\pi - u + \Theta)}{(ac_1 - ca_1)\cos\frac{1}{2}(\pi - u + \Theta) + (bc_1 - cb_1)\sin\frac{1}{2}(\pi - u + \Theta)}.$$

Aus dieser Betrachtung geht, weil überhaupt

$$x = \cos\varphi\cos\psi = -\frac{(ci_1 - ic_1)\cos\varphi}{(ac_1 - ca_1)\cos\varphi + (bc_1 - cb_1)\sin\varphi},$$

$$y = \sin\varphi\cos\psi = -\frac{(ci_1 - ic_1)\sin\varphi}{(ac_1 - ca_1)\cos\varphi + (bc_1 - cb_1)\sin\varphi},$$

$$z = \sin\psi = \frac{(ai_1 - ia_1)\cos\varphi + (bi_1 - ib_1)\sin\varphi}{(ac_1 - ca_1)\cos\varphi + (bc_1 - cb_1)\sin\varphi}$$

ist, unzweideutig hervor, dass man zur Erreichung völliger Allgemeinheit bloss

$$14) \quad \varphi = \begin{cases} \frac{1}{2}(u+\Theta) \\ \frac{1}{2}(\pi - u + \Theta) \end{cases}$$

zu setzen braucht.

Wenn man ψ mittelst der Formel 13) berechnet, und den, absolut genommen, kleinsten Werth von ψ durch v bezeichnet, so ist,

indem k wieder eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet,

$$15) \quad \psi = v + k\pi,$$

und folglich

$$\sin\psi = (-1)^k \sin v, \quad \cos\psi = (-1)^k \cos v,$$

woraus man sieht, dass die, geraden und ungeraden Werthen von k entsprechenden Werthe von sin ψ und von cos ψ immer entgegengesetzte Vorzeichen haben. Ob man nun für k eine gerade oder ungerade, übrigens an sich willkührliche, ganze Zahl setzen muss, ist nach den Vorzeichen zu beurtheilen, welche sin ψ und cos ψ in Folge der Formeln 4) haben müssen.

XLVI.
Ueber die Genauigkeit der Ketten-Messungen.
(Dritter Nachtrag zur Ausgleichungsrechnung *).

Von dem
Herrn Professor Dr. Gerling zu Marburg.

In meiner Ausgleichungs-Rechnung (S. 44) habe ich darauf aufmerksam gemacht, dass wir noch im Dunkeln darüber seien, wie der mittlere Fehler der Kettenmessungen mit der Länge der gebrauchten Kette und der Länge der gemessenen Linie zusammenhänge; und dass also hier verdienstliche Untersuchungen noch anzustellen blieben.

Diesem Geschäft hat sich Herr W. Handschuh aus Fulda nun unterzogen, welcher, nachdem er bereits längere Zeit als Kataster-Geometer gearbeitet, jetzt hier studirt. Derselbe überbrachte mir nämlich bei seiner Herkunft eine Reihe von 200 Messungen, welche er, veranlasst durch jene Bemerkung, im vorigen Herbst im Fuldaischen angestellt hatte, und deren Ergebniss ich den Praktikern im Folgenden mittheile.

Hr. Handschuh hatte in einem nach dem Augenmaass ebenen Wiesen-Thal mit ziemlich festem Untergrund fünf Linien abgesteckt,

von 20,3; 49,5; 65,0; 79,9 und 100,0 Ruthen,

und jede derselben zehnmal mit der fünfruthigen, mit der dreiruthigen und der zweiruthigen Kette gemessen, indem er bei jeder einzelnen Messung die letzten Ueberschüsse an einem Zollstab ablas, und nach je zehn Messungen seine Kette an einer Normal-Ruthe revidirte, sie auch, wenn sich Abänderungen zeigten, sammt den Messungen berichtigte.

Zu diesen 150 Messungen hatte er nun aber noch weitere 50 hinzugefügt, zu dem Zweck eines entscheidenden Versuchs über das Verhältniss der Genauigkeit in den Ketten-Messungen und den Maass-Stab-Messungen. Jede der obigen Linien wurde nämlich auch

---

*) Die beiden ersten siehe Theil VI. Heft 2. S. 141.

zehnmal mit zwei Ruthen-Stäben durchgemessen, so dass der eine auf dem horizontalen Boden angedrückt gehalten und der andere dann vorsichtig daran gestossen wurde.

Ich lasse nun zuerst die Original-Beobachtungen hier folgen:

Original-Beobachtungen.

	Erste Linie.	Zweite Linie.	Dritte Linie.	Vierte Linie.	Fünfte Linie.
	20,324	49,506	64,934	79,910	100,000
	20,322	49,517	64,985	79,880	99,991
	20,353	49,500	64,956	79,912	100,030
	20,327	49,512	65,000	79,891	100,000
Fünfruthige Kette.	20,330	49,468	65,034	79,895	100,030
	20,330	49,460	65,000	79,850	100,050
	20,342	49,450	64,970	79,844	100,010
	20,331	49,477	64,955	79,850	100,020
	20,346	49,450	64,925	79,885	100,030
	20,334	49,440	64,930	79,851	100,000
	20,360	49,467	64,900	79,860	100,065
	20,340	49,490	64,920	79,850	100,115
	20,340	49,480	64,900	79,860	100,050
	20,340	49,510	64,910	79,873	100,025
Dreiruthige Kette.	20,345	49,490	64,960	79,860	99,965
	20,315	49,500	64,900	79,850	100,065
	20,330	49,530	64,890	79,875	100,070
	20,320	49,535	64,920	79,860	100,120
	20,335	49,550	64,960	79,855	100,037
	20,320	49,490	64,960	79,850	99,960
	20,355	49,490	64,880	79,885	100,000
	20,330	49,470	64,920	79,885	100,001
	20,320	49,440	64,860	79,900	100,004
	20,350	49,445	64,875	79,875	99,996
Zweiruthige Kette.	20,320	49,460	64,880	79,915	100,020
	20,330	49,453	64,870	79,880	99,990
	20,340	49,435	64,910	79,862	100,005
	20,335	49,443	64,905	79,856	99,995
	20,330	49,465	64,890	79,850	99,991
	20,330	49,485	64,880	79,865	100,000
	20,360	49,544	65,000	80,000	100,180
	20,360	49,540	64,996	80,012	100,180
	20,360	49,541	64,990	80,013	100,180
	20,355	49,543	64,989	80,012	100,160
Maass-Stäbe.	20,357	49,542	64,996	80,006	100,176
	20,353	49,543	64,990	80,003	100,160
	20,356	49,542	64,991	80,006	100,163
	20,355	49,549	65,000	80,003	100,170
	20,356	49,543	64,993	80,004	100,160
	20,360	49,543	64,987	80,006	100,165

Wir haben nun diese Messungen gemeinschaftlich in Rechnung genommen auf folgende Weise.

Zuerst nahmen wir die arithmetischen Mittel aus je zehn Messungen und fanden:

fünfruthige Kette	20,3339	49,4780	64,9689	79,8768	100,0161
dreiruthige „	20,3345	49,5042	64,9220	79,8593	(100,0472)
zweiruthige „	20,3340	49,4586	64,8870	79,8743	100,0002
Maass-Stäbe	20,3572	49,5430	64,9932	80,0065	100,1694.

Hiezu ist zweierlei zu bemerken. *a*) Die Messungen der fünften Linie mit der dreiruthigen Kette wurden „nach dem Erfolg ausgeschlossen“, weil sich für die Abweichung der protocollarische Grund fand, dass ein eingetretenes Regenwetter den Boden erweichte und die Genauigkeit beeinträchtigte. Oben ist deshalb das betreffende Mittel in Parenthesen eingeschlossen. *b*) Die Mittel aus den Maass-Stab-Messungen zeigen sich sämmtlich etwas grösser als die aus den Ketten-Messungen. Diese Erscheinung erklärt sich wahrscheinlich aus dem kleinen Unterschied der hier gebrauchten Maass-Stäbe von dem Normal-Stab, worauf die Ketten regulirt waren, oder auch daraus, dass die Ketten bei der Regulirung nicht ganz dieselbe Spannung hatten, welche die Kettenzieher ihnen nachher im Felde gewohnheitsmässig gaben. Sie ist aber für den Zweck der Vergleichung der Genauigkeit offenbar ganz unschädlich, indem es hiebei nicht auf das absolute Maass ankommt.

Die gewonnenen Mittel benutzten wir nun zur Berechnung des mittleren Fehlers (*m* nach §. 16. und §. 20.) für die einzelne Messung in der einzelnen Linie, und fanden

fünfruthige Kette	0,0100	0,0286	0,0357	0,0260	0,0188
dreiruthige „	0,0136	0,0265	0,0276	0,0083	
zweiruthige „	0,0115	0,0189	0,0190	0,0211	0,0085
Maass-Stäbe	0,0026	0,0024	0,0046	0,0044	0,0088.

Hieraus scheinen nun drei **Thatsachen** hervorzugehen, die wir, bis weitere Beobachtungen darüber etwa anders bestimmen, für **entschieden** halten müssen. Nämlich:

1) Es ist irrig, wenn man glaubt, der mittlere Fehler sei unabhängig von der Länge der Kette. Im Gegentheil zeigt sich hier, dass die Genauigkeit im Allgemeinen abnimmt, wenn man mit einer längern Kette misst.

2) Es ist irrig, wenn man den mittleren Fehler der Länge der gemessenen Linie proportional setzt. Im Gegentheil zeigt sich hier, dass er in längeren Linien geringer sein kann als in kürzeren.

3) Es ist auch irrig, wenn man glaubt, die Ketten-Messung sei im Allgemeinen der Maass-Stab-Messung beim Auflegen auf den Boden vorzuziehen. Im Gegentheil zeigt sich, dass ein in beiderlei Messungen **gleich** geübter Geometer mit dem Maass-Stab auch bei unmittelbarem Auflegen auf den Boden **bedeutend** genauer misst als mit der Kette.

Um die Verschiedenheiten der obigen mittleren Fehler besser zu übersehen verzeichneten wir nun 4 Curven, bei welchen die

gemessenen Längen der Linien als Abscissen, jene m als Ordinaten aufgetragen waren. Hiebei zeigt sich für die Maass-Stab-Messungen ein langsames, beinahe stetiges Ansteigen; so dass man in erster Annäherung wohl den mittleren Fehler der gemessenen Länge proportional setzen darf. Dagegen findet sich bei den Ketten-Messungen ein ziemlich gleichförmiges Ansteigen nur bis zu 65 Ruthen gemessener Länge; von da an fällt die Curve für die dreiruthige Kette rasch, die für die fünfruthige Kette langsam, die für die zweiruthige Kette aber steigt noch ein wenig, um nachher auch namhaft zu fallen. Demnach sollte es beinahe scheinen, als sei der mittlere Fehler von der gemessenen Länge periodisch abhängig. Offenbar sind aber der Beobachtungen viel zu wenig, als dass man berechtigt wäre, ein so auffallendes Resultat dadurch schon für entschieden zu halten, wenn gleich andererseits es auch nicht geradezu für absurd erklärt werden darf.

Von dem Anschliessen einer Formel an diese Curven mussten wir abstehen, indem sie dazu weder ausgedehnt noch regelmässig genug schienen. Doch wurden uns zwei Umstände bei dieser Gelegenheit klar, welche, wenn sie früher schon zur Sprache hätten kommen können, Herrn Handschuh veranlasst haben würden, die Messungen etwas anders einzurichten, und deshalb für den möglichen Fall einer Wiederholung dieser Arbeit hier angeführt zu werden verdienen. Nämlich

a) Es würde gewiss bequemer für die Bearbeitung und vielleicht auch sicherer für das Resultat gewesen sein, wenn die Längen der gemessenen Linien näher in arithmetischer Progression gestanden hätten. Ich würde also, wenn die Arbeit jetzt erst zu machen wäre, vorschlagen, für die fünfruthige und die zweiruthige Kette die Linien, statt der obigen Längen, möglichst genau zu

20; 40; 60; 80 und 100 Ruthen

zu nehmen, für die dreiruthige Kette aber zu

21; 39; 60; 81 und 99 Ruthen.

b) Bei den Ketten-Messungen haben wir es eigentlich wenigstens mit zwei verschiedenen Fehlern zu thun, welche einzeln zu untersuchen bleiben, dem der vollen Kettenlänge, welcher sich so oft wiederholt als die Kette ausgelegt wird, und dem des Ueberschusses über die letzte Auslegung. Bezeichnet man nun ersteren Fehler mit m_t, letzteren mit m_u, die Anzahl der vollen Auslegungen mit a, den mittleren Fehler der gemessenen Längen mit m_l; so gilt bekanntlich (siehe S. 71, 82 und 90) die Formel

$$m_l = \sqrt{a m_t m_t + m_u m_u}.$$

Demnach war es nicht dem Zwecke vollständig entsprechend, dass in den verschiedenen Linien die Ueberschüsse verschieden waren. Hr. Handschuh würde gewiss aus diesem Grunde, wenn er die Arbeit jetzt erst zu machen hätte, lieber solche Linien wählen, die entweder bis auf einen kleinen, mit dem Zollstock zu messenden Unterschied, runde Summen von Kettenlängen darstellten oder die doch alle einerlei Ueberschuss hätten.

So wie die Sache jetzt aber lag, probirten wir erst, ob sich die Hypothese rechtfertigen lasse, dass das m_u bei diesen Beob-

achtungen als constante Grösse betrachtet werden dürfe, indem wir die drei betreffenden m_t und das m_u aus den sämmtlichen obigen m_l mittelst der vorstehenden Formel nach der Methode der kleinsten Quadrate suchten. Dies führte aber zu dem Widerspruch, dass $m_u m_u$ negativ ausfiel.

Wir begnügten uns also damit, das $m_u = 0$ zu setzen, und dann die m_t einzeln su suchen. Dies gab uns

für die fünfruthige Kette $m_t = \pm 0,006830$
„ „ dreiruthige „ „ $\pm 0,004644$
„ „ zweiruthige „ „ $\pm 0,002726$.

Mit diesen Werthen berechneten wir nun rückwärts die m_l und erhielten statt der obigen unmittelbar aus den arithmetischen Mitteln abgeleiteten

für die fünfruthige Kette	0,0137	0,0205	0,0246	0,0265	0,0305
„ „ dreiruthige „	0,0114	0,0186	0,0213	0,0237	
„ „ zweiruthige „	0,0086	0,0134	0,0154	0,0170	0,0193.

Die Abweichung zeigt sich hier aber ungefähr noch eben so gross, als wenn man aus den obigen m für jede Kette, ohne Rücksicht auf die Verschiedenheit der gemessenen Längen, wieder das arithmetische Mittel genommen hätte. Man wird also ausser den drei oben angeführten Thatsachen nur noch als *genähertes Resultat* angeben können:

dass die mittleren Fehler der drei Ketten-Längen sich wie 7:5:3 zu verhalten scheinen.

Bei Messung einer und derselben Linie verhält sich nun die Anzahl der Auslegungen wie $\frac{1}{5}:\frac{1}{3}:\frac{1}{2}$. Durch Multiplication mit den Quadratwurzeln dieser Zahlen fände man also das Verhältniss der mittleren Fehler der Messungen nahe wie 31:29:21 oder wie 8:7:5.

Es mag sein, dass die Resultate noch sehr verschieden ausfielen, wenn die Arbeit mit Benutzung dieser ersten, durch Herrn *Handschuhs* Verdienst gewonnenen Erfahrung wiederholt würde, jedenfalls glaubte ich diese selbst aber den Praktikern vorerst mittheilen zu müssen.

XLVII.

Disquisitiones de congruentiis omnium graduum et residuis ordinis cujuscunque.

Auctore Friderico Arndt,

Praeceptore Gymnasii Sundensis.

1.

In commentatione ea, quae inscribitur: De Potestatum periodis etc. (Archiv der Mathematik und Physik. Tom II. p. 1.) argumentatus sum, congruentiam t^{ti} gradus $x^t \equiv 1$ secundum modulum, qui est numeri primi imparis potestas aliqua vel ejus duplum, tot admittere radices diversas, quot unitates sint divisori communi maximo numerorum t et $p^{n-1}(p-1)$.

Nunc quidem restat, ut disquisitionem hanc ad modulos extendam, qui sunt numeri 2 potestates. Primum igitur quaestio sese offert, quot radices sint congruentiae $x^t \equiv 1$ (mod. 2^n), ubi exponentem n numero 2 majorem accipere proderit.

Perspicuum est, radicem numerum imparem esse oportere, quem forma exhiberi licet $2^m h \pm 1$, ita ut sit m unitate major atque h numerus impar. Congruentia autem, quam nobis proposuimus, resolvi possit necne, ex forma pendebit, quam potestas t^{ta} radicis induat. Quam ut reperiamus, sit primum t impar eritque ex theoremate binomiali

$$(2^m h \pm 1)^t = 2^{tm} h^t \pm t_1 . 2^{(t-1)m} h^{t-1} + t_2 . 2^{(t-2)m} h^{t-2} \pm \text{etc.} + t . 2^m h \pm 1,$$

unde manat

$$(2^m h \pm 1)^t = 2^m h (2^{(t-1)m} h^{t-1} \pm t_1 . 2^{(t-2)m} h^{t-2} + \text{etc.} + t) \pm 1,$$

denotantibus t_1, t_2, t_3, etc. coefficientes binomiales, quos integros esse constat. Quum autem numerus uncis conclusus sit impar, potestas $(2^m h \pm 1)^t$ formae erit $2^m h' \pm 1$, denotante h' numerum imparem.

Sit deinde t numerus par vel formae $2^{\lambda} f$, ubi f impar, quofacto erit $(2^m h \pm 1)^t = \{(2^m h \pm 1)^f\}^{2^{\lambda}}$; atqui $(2^m h \pm 1)^f$ est formae $2^m h' \pm 1$, ubi h' impar, ergo restat disquiramus formam potestatis $(2^m h' \pm 1)^{2^{\lambda}}$. Jam vero quadratum radicis formam induit $2^{2m} h'^2 \pm 2^{m+1} h' + 1$ vel hanc $2^{m+1} h' (2^{m-1} h' \pm 1) + 1$, ubi $2^{m-1} h' \pm 1$ est impar, quoniam $m - 1 > 0$, ergo forma quadrati haec erit $2^{m+1} h'' + 1$ denotante h'' numerum imparem. Simili modo quadratum hujusce numeri i. e. potestas 4ta numeri $2^m h' \pm 1$ erit formae $2^{m+2} h''' + 1$, quadratum hujusce i. e. potestas 8va numeri propositi $2^m h' \pm 1$ erit formae $2^{m+3} h^{IV} + 1$ etc., ita ut sint h''', h^{IV} etc. numeri impares.

Ex quo sequitur, potestatem $(2^m h \pm 1)^t$, si t sit par $= 2^{\lambda} f$, formam induere $2^{m+\lambda} h + 1$, denotante h numerum aliquem imparem.

2.

Quodsi in congruentia

$$x^t \equiv 1 \pmod{2^n}$$

t est numerus impar, si radicem x statuas formae $2^m h \pm 1$, erit (1.) $2^m h' \pm 1 \equiv 1$, ergo, si superius signum accipias, $2^m h' \equiv 0$, si vero inferius, $2^m h' - 2 \equiv 0$.

Nunc licet radicem modulo minorem accipere vel $2^m h \pm 1 < 2^n$; si igitur radix est formae prioris $2^m h + 1$, semper debet esse $m < n$; si vero radix formae posterioris $2^m h - 1$, id certe contendi potest, numerum m exponentem n non superare, tumque modo ei aequalem esse posse, quando $h = 1$.

Supponamus primum, numerum h non evanescere, quo facto pro signo superiore congruentia $2^m h' \equiv 0 \pmod{2^n}$ locum habere nequit, quia $m < n$ atque etiam h' non evanescit.

Deinde si h evanescit, radix erit 1 manifestoque congruentiae propositae satisfacit. Quod denique attinet ad signum inferius, non potest esse $2^m h' - 2 \equiv 0 \pmod{2^n}$; haberetur enim $2^{m-1} h' - 1 \equiv 0 \pmod{2^{n-1}}$, q. e. a. quoniam $m - 1 > 0$ ideoque $2^{m-1} h' - 1$ numerus impar.

Ex his omnibus potest, congruentiam unam solummodo radicem, nempe 1, admittere, quando exponens t sit impar.

Si vero t est numerus par $= 2^{\lambda} f$, ubi f impar, sequitur ex §§. 22. 10. Commentationis jam commemoratae, exponentem, ad quem numerus impar pertineat secundum modulum 2^n, numeros t et 2^{n-2}, ergo etiam horum divisorem communem maximum metiri, quo designato per 2^{δ} omnes numeri modulo minores ad eumque primi inter exponentes $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots 2^{\delta}$, ad quos pertineant, distributos fore.

Ad exponentem 1 autem unus modo numerus pertinet nempe 1, ad exponentem 2 tres numeri, qui sunt $2^{n-1} - 1$, $2^{n-1} + 1$, $2^n - 1$,

ad exponentem 2^2 pertinent 2^2 numeri, et in genere ad exponentem 2^Θ pertinent totidem numeri, si modo $\Theta > 1$. Hinc multitudo omnium radicum congruentiae $x^t \equiv 1$ (mod. 2^n) aequiparabit summam

$$1+3+2^2+2^3+\ldots+2^\delta,$$

quae valorem obtinet $2^{\delta+1}$, quam ob rem

Congruentia $x^t \equiv 1$ (mod. 2^n), si exponens est par, tot radices habet, quot unitates duplum divisoris communis maximi numerorum t et 2^{n-2}.

Casus denique, in quo mudulus est 2 vel 4, breviter jam perstringendus est.

Congruentia manifesto $x^t \equiv 1$ (mod. 2) unam modo radicem admittit, nempe 1, nec minus haec $x^t \equiv 1$ (mod. 4) quando t impar, quando vero par, duas nempe 1 et 3.

Exempl. 1. Sunt 4 radices congruentiae $x^6 \equiv 1$ (mod. $2^5 = 32$) nempe 1, 15, 17, 31, quarum 1 ad exp. 1 pertinet, tres reliqui ad 2.

Exempl. 2. Congruentia $x^{12} \equiv 1$ (mod. $2^4 = 16$) admittit 8 radices, quae sunt 1, 3, 5, 7, 11, 13, 9, 15, quarumque 1 pertinet ad exponentem 1; 7, 9, 15 ad 2 atque 3, 5, 11, 13 ad 4.

3.

Quando congruentia $x^t \equiv A$ (mod. m), denotante A numerum ad modulum primum, resolubilis est, semper totidem admittet radices, quot radices simplicior haec $x^t \equiv 1$ (mod. m). Hujus etenim radices sint

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4,\ \omega_5 \text{ etc.}$$

atque ω radix quaelibet congruentiae prioris, tum dico primum producta

$$\omega\omega_1,\ \omega\omega_2,\ \omega\omega_3,\ \omega\omega_4, \text{ etc.}$$

vel eorum residua minima radices fore congruentiae $x^t \equiv A$.

Nam quum sit $\omega^t \equiv A$, atque ex. gr. $\omega_1{}^t \equiv 1$, erit $(\omega\omega_1)^t \equiv A$, i. e. $\omega\omega_1$, radix sicque deinceps.

Deinde sunt omnia illa producta incongrua vel eorum residua minima inaequalia; nam si haberetur in genere $\omega\omega_\lambda \equiv \omega\omega_\mu$, esset $\omega\,(\omega_\lambda - \omega_\mu) \equiv 0$, ergo $\omega_\lambda - \omega_\mu \equiv 0$, quoniam ω ad modulum primus est. Sed illud suppositioni repugnat, ergo $\omega\omega_\lambda$ et $\omega\omega_\mu$ sunt incongrua.

Vice versa, quando z est radix congruentiae propositae, z alicui productorum, quae modo dixi, congruus fiet. Quoniam scilicet m ad ω primus est, numerus exstat Θ talis, ut sit $\omega\Theta \equiv z$, vel talis, ut sit $(\omega\Theta)^t \equiv z^t$ i. e. $(\omega\Theta)^t \equiv A$. Jam vero est $\omega^t \equiv A$, ideoque erit $\Theta^t \equiv 1$. Qua re hic Θ congruentiae satisfacit $x^t \equiv 1$, vel Θ debet congruus fieri alicui radicum ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, etc. Ex quo $\omega\Theta$ vel z alicui productorum $\omega\omega_1$, $\omega\omega_2$ etc. congruus fiet.

Unde colligitur, productis illis omnes omnino radices congruentiae $x^t \equiv A$ exhiberi, ita ut totidem hujus sint, quot illius $x^t \equiv 1$.

Itaque congruentia $x^t \equiv A$ (mod. 2^n) unam solummodo radicem habebit, quando t est numerus impar; quando vero par, tot radices, quot unitates habet duplum divisoris communis maximi numerorum t et 2^{n-2}.

4.

Residuum ordinis cujusvis t intelligimus numerum, qui potestati alicui exponentis t secundum modulum propositum congruus fit. Itaque a vocatur residuum ordinis t pro modulo m, quando numerus aliquis α inveniri potest, ita ut sit $\alpha^t \equiv a$ (mod. m). Residua trium primorum ordinum dicuntur residua quadratica, cubica et biquadratica.

Quodsi quaerantur residua minima potestatum exponentis t, quarum radices sint omnes ad modulum primae eoque minores, quaestio se offert, omnes tales potestates sint incongruae necne?

Tota autem haec disquisitio manifesto in eo vertitur, ut determinetur, quot radices admittat congruentia $x^t \equiv A$ (mod. m), denotante A residuum quodlibet ordinis t.

Sit enim multitudo radicum, quas dixi, Θ; quoniam ex his omnibus unum idemque gignitur residuum A, patet, multitudinem omnium residuorum ordinis t ad modulum primorum eoque inferiorum aequiparare numerum $\frac{\varphi m}{\Theta}$ integrum, denotante φ_m multitudinem numerorum ad modulum m primorum eoque minorum.

Denotante igitur p numerum primum imparem, multitudo residuorum quadraticorum moduli p erit $\frac{1}{2}(p-1)$, quia congruentia $x^2 \equiv A$ (mod. p) duas admittit radices.

Quia congruentia $x^3 \equiv A$ (mod. p) unam modo habet radicem, quando p formae $3n+2$, tres vero, quando p formae est $3n+1$, multitudo residuorum cubicorum erit aut $p-1$ aut $\frac{1}{3}(p-1)$, prouti p est formae $3n+2$ vel illius $3n+1$.

Congruentia $x^4 \equiv A$ (mod. p) habet duas radices, quando p est formae $4n+3$, quattuor vero, quando p formae $4n+1$, ergo multitudo residuorum biquadraticorum erit aut $\frac{1}{2}(p-1)$ aut $\frac{1}{4}(p-1)$, prouti p est formae $4n+3$ aut illius $4n+1$.

Simili modo multitudo residuorum ordinis 5 erit aut $p-1$ aut $\frac{1}{5}(p-1)$, prouti p formam induit $5n+2$, $5n+3$, $5n+4$ aut hanc $5n+1$.

5.

Manifesto omne residuum biquadraticum erit etiam residuum quadraticum, quam propositionem convertere licet, quoties p est

formae $4n+3$. Quod ita demonstro. Quoniam omne non-residuum quadraticum etiam non-residuum biquadraticum est, perspicuum erit, residua biquadratica inter residua quadratica modo occurrere posse. Horum multitudo est $\frac{1}{2}(p-1)$, ex quo, si residua nonnulla quadratica exstarent, quae non essent biquadratica, multitudo residuorum biquadraticorum ipso $\frac{1}{2}(p-1)$ minor fieret. Atqui haec multitudo est $\frac{1}{2}(p-1)$, quoties p formae $4n+3$ (4), ergo omne residuum quadraticum est biquadraticum et vice versa pro modulo primo formae $4n+3$.

Clariss. Gauss (Theoria residuorum biquadraticorum pag. 4 sqq.) hoc theorema ita demonstrat:

Si a est residuum quadraticum ipsius p, statuamus $a \equiv bb$ (mod. p), ubi b vel residuum quadraticum ipsius p erit vel non-residuum; in casu priori $b \equiv cc$, unde $a \equiv c^4$, i. e. a erit residuum biquadraticum ipsius p; in casu posteriori $-b$ fiet residuum quadraticum, quoniam -1 est non-residuum numeri primi $4n+3$ atque productum ex duobus non-residuis residuum est, faciendoque $-b \equiv cc$, erit ut antea $a \equiv c^4$ atque a residuum biquadraticum ipsius p.

Porro si modulus est formae $4n+1$, exstant quidem $\frac{1}{2}(p-1)$ residua quadratica, sed $\frac{1}{4}(p-1)$ modo biquadratica, qua re dimidia pars quadraticorum erunt residua biquadratica, reliqua non-residua biquadratica. Itaque omnes numeri integri per modulum primum p non divisibiles in tres classes sunt distribuendi, ita ut in prima sint residua biquadratica, in secunda non-residua biquadratica, quae tamen sunt quadratica, in tertia denique non-residua biquadratica, quae sunt etiam non-residua quadratica. Et quidem prima classis complectitur $\frac{1}{4}(p-1)$ numeros, secunda $\frac{1}{4}(p-1)$ numeros, tertia vero $\frac{1}{2}(p-1)$ numeros.

6.

Sed redeat oratio, unde digressa est, quod totam rem ex altiori fonte considerare in animo est.

Secundum modulum 2^n, ubi $n > 2$, exstant 2^{n-1} residua ordinis t, quando t est impar, quando vero t par, multitudo residuorum est $\frac{2^{n-1}}{2\delta} = \frac{2^{n-2}}{\delta}$, designante δ divisorem communem maximum numerorum t et 2^{n-2}.

In priori casu enim congruentia $x^t \equiv A$ (mod. 2^n) habet unam modo radicem, in posteriori autem 2δ radices (3).

Exempli gratia sunt 8 residua ordinis 3 vel residua cubica moduli $2^4 = 16$; fit etenim

Potestas		congrua residuo
Potestas	1^3	congrua residuo 1
. . . .	3^3	 11
. . . .	5^3	 13
. . . .	7^3	 7
. . . .	9^3	 9
. . . .	11^3	 3
. . . .	13^3	 5
. . . .	15^3	. . . . 15.

Attamen non plures quam 2 exstant residua biquadratica moduli $32=2^5$. Hic enim est $\delta=4$, $2^{n-2}=8$, $\frac{2^{n-2}}{\delta}=2$. Quae residua sunt 1 et 17 potestatibus resp. 1^4 et 3^4 congrua.

Multitudo igitur residuorum quadraticorum moduli 2^n est 2^{n-3}, quod in §. 40. De Potestatum Periodis ex alio fonte petivimus.

7.

Postquam multitudinem tum radicum congruentiae $x^t \equiv A$ (mod. p^n, $2p^n$, 2^n), tum residuorum ordinis cujuscunque t determinavimus, progredimur ad locum multo difficiliorem, ubi dijudicandum est, utrum numerus aliquis propositus residuum sit ordinis cujusvis t, an non-residuum. Et sane in doctrina residuorum tres potissimum res in quaestionem veniunt, primum num numerus A sit residuum ordinis t an non-residuum, deinde si illud locum habet, quae sint radices congruentiae $x^t \equiv A$ (mod. m), postremo multitudo residuorum indaganda erit, quae tamen, uti in 4. ostendimus, ex multitudine radicum congruentiae nostrae facillime petitur.

Jam ut ad rem veniam, multitudinem numerorum ad modulum p^n vel $2p^n$ primorum, ubi p numerus primus impar, designem per $\varphi_m = p^{n-1}(p-1)$, atque per δ divisorem communem maximum numerorum t et φ_m. Tum dico

1. Si A sit residuum ordinis t secundum modulum p^n vel $2p^n$, semper congruentiam locum habere

$$A^{\frac{\varphi m}{\delta}} \equiv 1.$$

2. Vice versa, si congruentia $A^{\frac{\varphi m}{\delta}} \equiv 1$ locum habet, semper A erit residuum ordinis t.

Quas propositiones ita demonstro. Quod attinet ad primam, numerus aliquis α poterit inveniri ejusmodi, ut habeatur $\alpha^t \equiv A$, ex quo sequitur $(\alpha^t)^{\frac{\varphi m}{\delta}} \equiv A^{\frac{\varphi m}{\delta}}$ vel $\alpha^{\frac{t}{\delta}\cdot\varphi_m}$. Est vero $\frac{t}{\delta}$ numerus integer, unde $\frac{t}{\delta}\cdot\varphi_m$ multiplum ipsius φ_m, ideoque $\alpha^{\frac{t}{\delta}\cdot\varphi_m} \equiv 1$, vel $A^{\frac{\varphi m}{\delta}} \equiv 1$.

Secundo loco quicunque numerus ad m primus, qui est residuum ordinis t, congruentiae $x^{\frac{\varphi m}{\delta}} \equiv 1$ satisfaciet (ex prima parte); quam ob rem restat modo ad demonstrandum, non-residua ordinis t congruentiae illi satisfacere non posse. Sed hoc inde clarum, quod multitudo residuorum est $\frac{\varphi m}{\delta}$; totidem autem sunt radices congruentiae $x^{\frac{\varphi m}{\delta}} \equiv 1$ (mod. $m=p^n$, $2p^n$), quia divisor communis maximus numerorum $\frac{\varphi m}{\delta}$ et φ_m est $\frac{\varphi m}{\delta}$. Quodsi nonnulla etiam non-

residua radices essent congruentiae $x^{\frac{\varphi m}{\delta}} \equiv 1$, quia jam $\frac{\varphi m}{\delta}$ radices eaeque residua exstant, congruentia, quam dixi, plures quam $\frac{m}{\delta}$ radices haberet, q. f. n.

Ergo numerus quicunque A talis, ut sit $A^{\frac{\varphi m}{\delta}} \equiv 1$, in residuis ordinis t occurere debet.

8.

Hoc theorema rationem snppeditat inveniendi, num -1 sit residuum ordinis t an non-residuum moduli p^n vel $2p^n$. Sed simplicitatis gratia modulum esse primum imparem p supponamus.

E r i t e n i m -1 r e s i d u u m o r d i n i s t a u t n o n - r e s i d u u m, p r o u t i $\frac{p-1}{\delta}$ e s t n u m e r u s p a r a u t i m p a r, d e s i g n a n t e δ d i v i s o r e m c o m m u n e m m a x i m u m n u m e r o r u m t e t $p-1$.

Q u a n d o i g i t u r δ e s t n u m e r u s i m p a r, i d e o q u e $\frac{p-1}{\delta}$ p a r, s e m p e r -1 e r i t r e s i d u u m o r d i n i s t m o d u l i p r i m i p.

Quodsi exponens t est impar, etiam δ impar esse debet, ex quo sequitur theorema generale:

N u m e r u s -1 s e m p e r r e s i d u u m e s t o r d i n i s c u j u s - v i s i m p a r i s m o d u l i p r i m i i m p a r i s p; i t a q u e -1 e r i t s e m p e r r e s i d u u m c u b i c u m, r e s i d u u m q u i n t i, s e p t i m i, n o n i o r d i n i s e t c.

Pro exponente $t = 4$ erit δ aut 2 aut 4, prouti modulus p formam induit $4n + 3$ aut formam $4n + 1$. In priori casu $\frac{p-1}{\delta}$ est impar, in posteriori autem simul cum n par et impar. Quodsi n est par, modulus formam habebit $8m + 1$, formam vero $8m + 5$, quando n impar. Unde manat propositio:

-1 e s t n o n - r e s i d u u m b i q u a d r a t i c u m m o d u l i p r i m i f o r m a e $4n+3$ v e l f o r m a r u m $8n+3$, $8n+7$, a t q u e e t i a m m o d u l i $8n+5$ n o n - r e s i d u u m b i q u a d r a t i c u m e s t -1; m o d u l i a u t e m $8n+1$ s e m p e r r e s i d u u m b i q u a d r a t i c u m e r i t.

Aliam hujus propositionis demonstrationem, quae theoria residuorum potestatum nititur, cf. G a u s s T h e o r i a r e s i d u o r u m b i q u a d r a t i c o r u m. G o t t i n g a e. MDCCCXXVIII. pag. 10. sqq.

Postremo pro $t=6$ erit δ aut 2 aut 6 prouti p est formae $6n+5$ aut formae $6n+1$; in priori casu est $\frac{p-1}{\delta}$ par aut impar simul cum n, in posteriori casu idem valet; ergo pro $p=6n+5$ erit -1 residuum aut non-residuum sexti ordinis, prouti $\frac{1}{6}(p-5)$ par aut impar; at pro $p=6n+1$ erit -1 residuum aut non-residuum sexti ordinis, prouti $\frac{1}{6}(p-1)$ par aut impar.

Unde -1 est residuum sexti ordinis moduli cujusvis formae $12\lambda+1$, $12\lambda+5$; non-residuum vero moduli forma praediti $12\lambda+7$, $12\lambda+11$.

9.

1. Quicunque numerus impar residuum est ordinis imparis moduli 2^n.

Exstant enim (6.) 2^{n-1} residua ordinis imparis t, totidemque numeri ad modulum primi eoqae inferiores.

2. Quando vero t est par atque δ divisor communis maximus numerorum t et 2^{n-2}, semper congruentia locum habebit $A^{\frac{2^{n-2}}{\delta}} \equiv 1$ (mod. 2^n), si modo A est residuum ordinis t moduli 2^n.

Reperitur etenim numerus α talis, ut habeatur $\alpha^t \equiv A$, ergo talis, ut sit $(\alpha^t)^{\frac{2^{n-2}}{\delta}} \equiv \alpha^{\frac{t}{\delta}.2^{n-2}} \equiv A^{\frac{2^{n-2}}{\delta}}$. Jam vero $\frac{t}{\delta}$ est integer atque $\alpha^{2^{n-2}} \equiv 1$ (De Potest. Period. §. 22.), ideoque $A^{\frac{2^{n-2}}{\delta}} \equiv 1$.

3. Si numerus A congruentiae $x^{\frac{2^{n-2}}{\delta}} \equiv 1$ non satisfacit, A non potest esse residuum ordinis t moduli 2^n.

Exstare autem possunt non-residua moduli 2^n, quae tamen congruentiae $x^{\frac{2^{n-2}}{\delta}} \equiv 1$ satisfaciunt, ita ut propositionem in 2. convertere non liceat.

Nam quum multidudo residuorum ordinis t moduli 2^n sit $\frac{2^{n-2}}{\delta}$ (6.) omnesque congruentiae $x^{\frac{2^{n-2}}{\delta}} \equiv 1$ satisfaciant, radicum autem multitudo sit $2.\frac{2^{n-2}}{\delta} = \frac{2^{n-1}}{\delta}$ (3.) i. e. alterum tantum multitudinis residuorum, manifesto etiam $\frac{2^{n-2}}{\delta}$ non-residua erunt radices congruentiae nostrae. Multitudo omnium non-residuorum est $2^{n-1} - \frac{2^{n-2}}{\delta}$ vel $\frac{2^{n-2}}{\delta}(2\delta-1)$, quorum $\frac{2^{n-2}}{\delta}$ congruentiae satisfaciunt, ergo exstant $\frac{2^{n-2}}{\delta}.(2\delta-1) - \frac{2^{n-2}}{\delta}$ vel $\frac{2^{n-1}}{\delta}(\delta-1)$ non-residua ordinis t pro modulo 2^n, quae non sunt radices congruentiae $x^{\frac{2^{n-2}}{\delta}} \equiv 1$ (modulus 2^n). Hoc in causa est, cur omnes numeros integros impares modulo 2^n inferiores in tres classes distribuam, quarum prima complectitur residua t^{ti} ordinis omnia, secunda non-residua t^{ti} ordinis moduli 2^n, quae tamen congruentiae $x^{\frac{2^{n-2}}{\delta}} \equiv 1$ satisfaciant, tertia denique continet numeros, qui sunt non-residua, atque etiam con-

gruentiae, quam dixi, non satisfaciant. Multitudo numerorum primae classis est $\frac{1}{\delta}\cdot 2^{n-2}$, multitudo numerorum secundae classis est $\frac{1}{\delta}\cdot 2^{n-2}$, multitudo denique numerorum tertiae classis est $\frac{2^{n-1}}{\delta}(\delta - 1)$.

Nunc quidem quaeritur, ad quam classem numerus propositus impar secundum modulum 2^n $(n > 2)$ referendus sit? Facile autem quaestionem hanc decides, si ad sequentia animum attenderis.

10.

Quoniam δ numerum 2^{n-2} metiri debet, perspicuum est, ipsum δ potestati alicui numeri 2 aequalem fore, ex quo $\frac{2^{n-2}}{\delta}$ erit semper et ipse potestas numeri 2 aliqua, dummodo ne sit $2^{n-2} = \delta$.

Quodsi habetur $\delta = 2^{n-2}$, congruentiae manifesto $x^{\frac{2^{n-2}}{\delta}} = x \equiv 1$ satisfacere non potest A, nisi est $A = 1$, quumque esse oporteat t multiplum ipsius 2^{n-2}, erit pro quocunque x $x^t \equiv 1 \pmod{2^n}$, quam ob rem etiam congruentiae $x^t \equiv A$ satisfieri nequit, nisi est $A = 1$.

Unde manat theorema:

Q u i c u n q u e n u m e r u s i m p a r m o d u l o 2^n m i n o r u n i t a t i q u e i n a e q u a l i s s e m p e r a d t e r t i a m c l a s s e m r e f e r e n d u s e s t, s i o r d i n e m t s t a t u a s m u l t i p l u m n u m e r i 2^{n-2}.

Jam sit 2^{n-2} non $= \delta$ eritque $\frac{2^{n-2}}{\delta}$ potestas aliqua numeri 2, quam exhibeamus per 2^{Θ}, ubi Θ numerum $n - 3$ superare nequit.

Q u o d s i n u m e r u s a l i q u i s i m p a r A f o r m a e x h i b e t u r $2^k h \pm 1$, u b i h i m p a r a t q u e $k > 1$, c o n g r u e n t i a $A^{\frac{2^{n-2}}{\delta}} \equiv 1 \pmod{2^n}$ l o c u m n o n h a b e b i t, q u a n d o e s t $k + \Theta < n$.

S i v e r o $k + \Theta \geqq n$, r e v e r a e r i t $A^{\frac{2^{n-2}}{\delta}} \equiv 1$. Nam quum A sit $= 2^k h \pm 1$, erit (1.) $A^{2^{\Theta}}$ formae $2^{k+\Theta} h' + 1$, ubi h' impar, essetque si congruentia, quam dixi, locum haberet, $2^{k+\Theta} h' \equiv 0$. Atqui hoc fieri nequit, quum sit $k + \Theta < n$.

Deinde si esset $A^{2^{\Theta}} \equiv f \pmod{2^n}$, ita ut f unitati non esset congruus, haberetur $2^{k+\Theta} h' + 1 \equiv f$ vel $2^{k+\Theta} h' - (f - 1) \equiv 0$, ideoque $f - 1 \equiv 0$, quia $k + \Theta \geqq n$. Illud vero absurdum est, ergo revera est $A^{\frac{2^{n-2}}{\delta}} \equiv 1$.

H i n c s e q u i t u r (9.), q u e m v i s n u m e r u m i m p a r e m f o r m a e $2^k h \pm 1$, u b i h i m p a r e t $k > 1$, a d c l a s s e m t e r t i a m r e f e r e n d u m e s s e, q u a n d o h a b e a t u r $k + \Theta < n$, q u o f a c t o h i c n u m e r u s e t i a m n o n - r e s i d u u m o r d i n i s p a r i s t e r i t.

Si vero est $k+\Theta \overline{\overline{>}} n$, numerus A aut ad classem primam aut ad secundam pertinebit, prouti A est residuum aut non-residuum.

Sed num A in prima classe sit an in secunda, facile deciditur, si A est formae $4m-1$. Dico enim, quemvis numerum formae $4m-1$ nunquam residuum t^{ti} ordinis fore secundum modulum 2^n. t semper par intelligendus est.

Redigatur t sub formam $2^\lambda f$, ubi f impar, eritque, si radix congruentiae $x^t \equiv A$ exstet formae $2^k h \pm 1$, x^t formae $2^{k+\lambda} h' + 1$, ita ut sit h' impar. Hinc $2^{k+\lambda} h' + 1 \equiv 4m-1$, ideoque $2^{k+\lambda-1} h' - 2m + 1 \equiv 0 \pmod{2^{n-1}}$, q. f. n., quoniam $2^{k+\lambda-1} h' - 2m + 1$ est impar. Unde manat, si numerus aliquis A sit residuum paris ordinis secundum modulum 2^n, semper $-A$ fore non-residuum. Etenim A formam induere oportet $4m+1$, ergo $-A$ formam $2^n-(4m+1)$ vel hanc $4m-1$, ex quo $-A$ erit non-residuum.

Exemplum. Sit modulus $32=2^5$, ergo $n=5, t=6$. Erit $\delta=2$, $\frac{2^{n-2}}{\delta}=2^2$, $\Theta=2$.

Erit igitur solummodo $k+\Theta<5$, quando $k=2$, qua re ad tertiam classem pertinent numeri formae $4m\pm1$, ubi m impar, i. e. numeri 3, 5, 11, 13, 19, 21, 27, 29. Reliqui 1, 7, 9, 15, 17, 23, 25, 31 ad classes 1 et 2 referendi sunt, satisfaciuntque congruentiae $x^4 \equiv 1 \pmod{32}$.

11.

Jam vero in genere possumus determinare, ad quam classem numerus aliquis A formae $2^k h \pm 1$ referendus sit.

Etenim si $k+\Theta<n$, numerus A semper ad tertiam classem pertinet (10).

Si vero $k+\Theta$ ipso n non est minor, omnes numeri formae $2^k h+1$ in prima sunt classe, ii autem, qui formam induunt $2^k h-1$ in secunda erunt classe.

Nam omnes numeros formae $2^k h-1$ ad classem secundam pertinere ex 10. patet. Atqui manifesto totidem sunt formae $2^k h+1$ quot hujusce $2^k h-1$; si igitur nonnulli formae $2^k h+1$ ad secundam classem pertinerent, in secunda plures numeri exstarent, quam in prima classe, quod fieri nequit, quum (9.) totidem sint, nempe $\frac{1}{\delta}\cdot 2^{n-2}$, in ambabus classibus.

Unde manat, quemvis numerum A ejusmodi, ut sit formae $2^k h+1$ simulque $k+\Theta \overline{\overline{>}} n$ fore residuum ordinis paris t moduli 2^n

Quando $k+\Theta<n$, numerus propositus semper erit non-residuum; quando $k+\Theta \overline{\overline{>}} n$, etiamtum numerus non-residuum erit, si formam habet $2^k h-1$.

Licet manifesto accipere $k+\Theta=n$ vel $k=n-\Theta$, quo facto h potest esse numerus integer quicunque.

Jam vero est $2^\Theta=\frac{2^{n-2}}{\delta}$ ideoque $2^{n-\Theta} h+1=4\delta h+1$. Ex quo tandem sequitur theorema elegans, quod totam residuorum ordinis paris doctrinam pro modulo 2^n exhauriat:

Quivis numerus impar formae $4\delta h+1$ est residuum ordinis paris t moduli 2^n, reliqui vero numeri sunt non-residua, denotante h numerum integrum quemcunque et δ divisorem communem maximum numerorum t et 2^{n-2}.

Quicunque autem numerus impar residuum est ordinis imparis moduli 2^n (9.).

Exempli gratia pro $t=2$ erit $\delta=2$; ergo quando potestas aliqua numeri 2 altior quam secunda pro modulo assumitur, omnes numeri impares formae $8h+1$ erunt residua quadratica, reliqui vero non-residua. Cf. Comm. meam de Potestatum Periodis. pag. 29.

12.

Quod multitudo residuorum ordinis paris est $\frac{2^{n-2}}{\delta}$ (6.), pro h omnes numeri integri 0, 1, 2, 3, 4, ... ponendi sunt usque ad $\frac{2^{n-2}}{\delta}$ — 1; qua re simul residua reperimus ipsa. Sunt enim haec:

$$1,\ 4\delta+1,\ 8\delta+1,\ 12\delta+1,\ 16\delta+1,\ 20\delta+1 \text{ cett. } 4(2^{n-2}-\delta)+1.$$

13.

Ut omnia, quae ad hoc de residuis eruimus, complectamur, hae inde manant propositiones:

Congruentia $x^t\equiv A$ (mod. p^n, $2p^n$) tum modo resolvi potest, quando $A^{\frac{p^{n-1}(p-1)}{\delta}}$ unitati fit congrua exstantque δ radices diversae, denotante δ divisorem communem maximum numerorum t et $p^{n-1}(p-1)$. Multitudo residuorum ordinis t est $\frac{1}{\delta}\cdot p^{n-1}(p-1)$.

Congruentia $x^t\equiv A$ (mod. 2^n), ubi $n>2$, semper resolubilis est, quando t impar, exstatque una solummodo radix. Multitudo residuorum est 2^{n-1} eritque quivis numerus impar residuum. Si vero t est par, congruentia tum modo resolvi poterit, quando A formam induit $4\delta h+1$. Multitudo radicum erit 2δ multitudoque residuorum ordinis t aequiparabit numerum $\frac{2^{n-2}}{\delta}$.

Congruentiam denique $x^t\equiv A$ (mod. 4) semper resolvi posse, quando t impar, quando vero t par resolubilem esse aut non-resolubilem, prouti A formae sit $4m+1$ aut hujusce $4m-1$ per se patebit.

14.

Denotante z numerum aliquem imparem, si habetur $z=2^k h\pm1$, ubi h impar, atque $z<4\delta h+1$, manifesto erit $k<n-\Theta$ vel $k+\Theta<n$. Ex quo sequitur (11.)

Numerus quicunque impar z sub formam reductus $2^k h\pm1$ ita ut sit k impar, semper ad classem tertiam pertinet, si habetur $z<4\delta h+1$.

Si vero non est $z<4\delta h+1$, numerus z ad classem primam aut secundam referendus est, prouti formam induit $4\delta h'+1$ aut hanc $4\delta h'-1$, designante h' numerum quemcunque integrum.

Exempli gratia sit modulus $2^5=32$, ergo $n=5$, $t=6$, erit $\delta=2$, porro $z=27=4.7-1$, $h=7$, $4\delta h+1=57$, $27<57$. Ergo 27 in tertia classe reperitur. At vero pro $z=17$ erit $h=1$, $4\delta h+1=9$ atque z non $<4\delta h+1$. Ergo 17 ad primam pertinet classem, quia $17=4\delta h'+1$.

15.

Si autem t sub formam redigitur $2^\lambda f$, ita ut f sit impar, manifesto divisor communis maximus δ erit 2 pro $n=3$, 2^2 pro $n=4$, 2^3 pro $n=5$, 2^4 pro $n=7$ etc., $2^{\lambda-1}$ pro $n=\lambda+1$ atque 2^λ pro $n>\lambda+1$. Hinc erunt valores numeri $4\delta h\pm1$ pro

$$n=3 \ldots\ldots 2^3h\pm1,$$
$$n=4 \ldots\ldots 2^4h\pm1,$$
$$n=5 \ldots\ldots 2^5h\pm1,$$
$$n=6 \ldots\ldots 2^5h\pm1$$
etc.,
$$n=\lambda+1 \ldots\ldots 2^{\lambda+1}\,h\pm1,$$
$$n>\lambda+1 \ldots\ldots 2^{\lambda+2}\,h\pm1.$$

Si accipias signum superius, habebis numeros ad classem primam pertinentes, ad secundam vero, si sumas inferius. Reliqui numeri ad tertiam classem referuntur.

16.

Potest etiam periodus inveniri, quae omnia residua ordinis t moduli p^n vel $2p^n$ complectatur. Sit enim p^n vel $2p^n=m$, $\varphi m=p^{n-1}(p-1)$ atque g numerus aliquis ad exponentem $\frac{\varphi m}{\delta}$ pertinens, denotante δ divisorem communem maximum numerorum t et φm. Erit g residuum ordinis t; atque etiam $g^2, g^3, g^4, \ldots g^{\frac{\varphi m}{\delta}}$, quorum multitudo quum sit $\frac{\varphi m}{\delta}$ neque plures numeri residua esse possint, patet, illam periodum omnia residua involvere.

17.

Si doctrinam residuorum potestatum adhibere velis, theoremata art. 11. et 14. facilius ita probantur:

Sit indoles numeri f ea, ut habeatur $f^{\frac{2^{n-2}}{\delta}}\equiv1 \pmod{2^n}$, quaeriturque, num f ad classem primam pertineat an ad classem secundam, i. e. num f sit residuum ordinis paris t an non-residuum?

Pertinebit autem f ad exponentem, qui divisor est numeri $\frac{2^{n-2}}{\delta}$, quo designato per $2^{n-\varphi}$ erit f formae $2^{\varphi}k \pm 1$, denotante k numerum imparem (De Periodis Potest. §. 23.).

Debet autem φ ita determinari, ut sit $\frac{\frac{2^{n-2}}{\delta}}{2^{n-\varphi}}$ numerus integer vel ita ut sit $\frac{2^{\varphi}}{4\delta}$ integer, quo designato per h erit f formae $4\delta hk \pm 1$ vel hujusce $4\delta h \pm 1$, denotante h numerum integrum quencunque.

Satisfaciunt igitur numeri formae $4\delta h \pm 1$ congruentiae $x^{\frac{2^{n-2}}{\delta}} \equiv 1$ (mod. 2^n).

Formae autem $4\delta h - 1$ ad primam classem pertinere nequeunt (10); pertinent igitur ad secundam classem. Formae autem $4\delta h + 1$ ad primam classem pertinent, quia totidem numeri exstant formae $4\delta h + 1$ quot hujusce $4\delta h - 1$ atque multitudo numerorum in ambabus classibus eadem est (9).

18.

Designemus nunc classes, quas dixi, per A, B, C, ita ut A sit prima, B secunda, C tertia classis.

Productum manifesto ex A in A reperitur in A, quia $(4\delta h + 1)(4\delta h' + 1)$ denuo est formae $4\delta h + 1$.

Productum ex B in B debet occurrere in A, quia $(4\delta h + 1)(4\delta h' - 1)$ etiamnunc formam induit $4\delta h + 1$.

Productum ex numero aliquo classis A in numerum classis B necessario invenitur in B, quoniam est $(4\delta h + 1)(4\delta h' - 1)$ formae $4\delta h - 1$, quae characterem indicat classis B.

Quando C in A multiplicetur, habetur numerus ex C, idemque valet, quando C in B multiplicetur.

Si vero C in C multiplicetur, numerus inde ortus tum in A, tum in B, tum in C occurrere potest; in quam autem classem referendus sit, hoc modo investigo.

Primum observamus, omnes numeros classis C forma exhiberi $k + 4\delta h$, ita ut k sit numerus impar ipso 4δ minor, qui nullum horum $+1, -1$ aequiparat. Iam congruentia $x^{\delta} \equiv 1$ (mod. 4δ) admittit 2δ radices diversas (2.), quarum hae solummodo 1 et -1 formae sunt $4\delta h \pm 1$. Erunt igitur $2\delta - 2$ vel $2(\delta - 1)$ radices formae $4\delta h + k$, ita ut k ab 1 et -1 sit diversus; quam ob rem hae quidem radices ad classem C pertinebunt. Itaque ad classem C pertinebunt etiam numeri formae $4\delta h + k_1$, numeri formae $4\delta h + k_2$, numeri formae $4\delta h + k_3$, formae $4\delta h + k_4$ etc., designantibus k_1, k_2, k_3, k_4 etc. radices congruentiae $x^{\delta} \equiv 1$ (mod. 4δ) ab 1 et -1 diversas.

Debet autem esse in genere $4\delta h + k_\lambda < 2^n$, vel $h < \frac{2 - k_\lambda}{4\delta}$, $h < \frac{2^{n-2}}{\delta} - \frac{k_\lambda}{4\delta}$, ideoque summus valor, quem h obtineat, erit $\frac{2^{n-2}}{\delta} - 1$. Ergo forma $4\delta h + k_\lambda$ complectitur $\frac{2^{n-2}}{\delta}$ numeros; ex

quo, si pro k_λ ponuntur omnes radices congruentiae $x^\delta \equiv 1$ (mod. 4δ), habentur $\frac{2^{n-2}}{\delta}.2(\delta-1) = \frac{2^{n-1}}{\delta}(\delta-1)$ numeri ad classem C pertinentes.

Totidem autem in hac classe reperiuntur neque vero plures (9.); qua re omnes prodibunt numeri classis C, si methodum sequentem adhibeas:

Quaerantur radices congruentiae $x^\delta \equiv 1$ (mod. 4δ) ab 1 et -1 diversae, quarum qualibet designata per k_λ, omnes numeros exhiberi oportet formae $k_\lambda + 4\delta h$ modulo 2^n minores. Tum numeri classis C prodibunt omnes, si pro k_λ omnes radices congruentiae, quam dixi, ponuntur.

Sint igitur z, z' numeri propositi classis C determinenturque horum residua minima secundum modulum 4δ ita ut sit $z \equiv k_\lambda$ (mod. 4δ), $z' \equiv k_\mu$ (mod. 4δ) eritque $zz' \equiv k_\lambda k_\mu$ (mod. 4δ). Quodsi habetur $k_\lambda k_\mu \equiv 1$ (mod. 4δ), productum zz' ad A pertinet, ad B vero, si $k_\lambda k_\mu \equiv -1$, et ad C, quando $k_\lambda k_\mu \equiv f$, denotante f numerum ab 1 et -1 diversum.

19

Superest, ut radices congruentiae $x^t \equiv 1$ (mod. 2^n) inveniantur, ubi t est numerus par.

Quaevis radix ad exponentem pertinet, qui numeros t et 2^{n-2}, ergo etiam horum divisorem communem maximum 2^δ simul metiatur. Pertinebunt igitur radices partim ad 1, partim ad 2, partim ad 2^2,... partim ad 2^δ.

Iam vero omnes numeri ad exponentem 2^{n-m} pertinentes forma continentur $2^m h \pm 1$, denotante h numerum imparem, qui valores induere possit

$$1, 3, 5, 7, \ldots 2^{n-m}-1.$$

Quum vero differentia numerorum $2^m h \pm 1$ et $2^m(h-2) \pm 1$ sit 2^{m+1}, numeri ad 2^{n-m} pertinentes facillime ita computantur, ut in duas classes distribuantur, cujus in altera sint formae $2^m h + 1$, in altera formae $2^m h - 1$; in utraque autem classe numerum, qui aliquem proxime sequitur, habebis, si ad eum 2^{m+1} addideris.

Classes igitur hae sunt:

$$A \left\{ \begin{array}{l} a = 2^m - 1 \\ b = a + 2^{m+1} \\ c = b + 2^{m+1} \\ d = c + 2^{m+1} \\ \ldots\ldots \end{array} \right\} \qquad A' \left\{ \begin{array}{l} a' = 2^m + 1 \\ b' = a' + 2^{m+1} \\ c' = b' + 2^{m+1} \\ d' = c' + 2^{m+1} \\ \ldots\ldots \end{array} \right\}$$

Ad exponentem 2^{n-m} autem semper 2^{n-m} numeri pertinent, excepto casu, in quo exponens est 2. Tum enim 3 numeri exstant, nempe $2^{n-1}-1$, $2^{n-1}+1$, 2^n-1. Hae considerationes statim viam sternunt ad radices inveniendas.

Quaeratur enim divisor communis maximus numerorum t et 2^{n-2}, qui sit 2^δ, determinenturque adjumento classium A et A' numeri ad exponentes $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots 2^\delta$ pertinentes.

Exempli gratia congruentia $x^{20} \equiv 1$ (mod. 32.) habet 8 radices, quae ita inveniuntur:

Hic est $\delta = 2$, ideoque divisores ipsius 2^δ sunt 1, 2, 4. Ad exponentem 1 pertinet 1, ad 2 pertinent 2^4-1, 2^4+1, 2^5-1 vel 15, 17, 31. Ad 4 pertinent, quia $m=3$,

$$a = 2^3 - 1 = 7 \qquad a' = 2^3 + 1 = 9$$
$$b = a + 2^4 = 23 \qquad b' = a' + 2^4 = 25$$

Ergo radices sunt 1, 7, 9, 15, 17, 23, 25, 31.

20.

Inveni etiam aliam methodum radices indagandi, ex qua multa alia attentione haud indigna manabunt.

Dico enim, si ad exponentem t secundum modulum 2^n numerus a pertineat, etiam a^k ad eundem exponentem pertinere, si k sit numerus impar.

Primum patet, potestatem $(a^k)^t$ certe unitati sec. mod. 2^n congruam esse, qua re restat modo ad demonstrandum, $(a^k)^t$ esse infimam ipsius a^k potestatem unitati congruam vel potestates

$$a^k,\ a^{2k},\ a^{3k},\ \ldots\ a^{tk}$$

incongruas esse. Fac autem, ut habeatur $a^{\Theta k} \equiv a^{\Theta' k}$, ubi sunt Θ, Θ' numeri inter 1 et t siti, eritque $a^{(\Theta - \Theta')k} \equiv 1$, ideoque, quum a ad t pertineat, $(\Theta - \Theta')k \equiv 0$ (mod. t). Atqui t ad k primus est, ergo $\Theta - \Theta' \equiv 0$ (mod. t) q. e. a. Pertinet igitur a^k ad exponentem t.

Itaque residua minima numerorum

$$a,\ a^3,\ a^5,\ a^7,\ \ldots\ a^{t-1},$$

quorum multitudo $\frac{1}{2}t$, ad exponentem t pertinent omniaque sunt inaequalia.

Quum jam (De Potest. Period. §. 24.) semper t numeri ad t pertineant, exstabit unus certe numerus ad t pertinens, qui nulli illorum sit congruus, quem vocemus b. Unde ad t etiam pertinent residua inaequalia

$$b,\ b^3,\ b^5,\ b^7,\ \ldots\ b^{t-1}$$

quorum multitudo etiamnunc $\frac{1}{2}t$.

Nullam denique ipsius b potestatem alicui ipsius a congruam fore, ita demonstro.

Primum contendo, semper potestatem aliquam numeri a exstare congruentiae

$$x^\varphi \equiv a^\Theta \text{ (mod. } 2^n)$$

satisfacientem, ubi sunt φ, Θ aliqui ex his 1, 3, 5, 7, .. $t-1$.

Etenim quia φ tanquam impar ad t primus est, numerus μ ita semper potest determinari, ut habeatur $\varphi\mu \equiv \Theta$ (mod. t) vel $\varphi\mu - \Theta \equiv 0$ (mod. t). Est vero $a^t \equiv 1$ (mod. 2^n), ergo etiam $a^{\varphi\mu - \Theta} \equiv 1$ (mod. 2^n) vel $a^{\varphi\mu} \equiv a^\Theta$ (mod. 2^n), qua re potestas a^μ huic congruentiae $x^\varphi \equiv a^\Theta$ satisfacit.

Iam vero una solummodo radix ei satisfacit, quia φ impar; ergo si ex. gr. haberetur $b^\varphi \equiv a^\Theta$ (mod. 2^n), esset $b \equiv a^\mu$, contra ea quae supposuimus.

Itaque duas classes nacti sumus

$$(M) \; \ldots \; a, a^3, a^5, a^7 \ldots a^{t-1}$$
$$(M') \; \ldots \; b, b^3, b^5, b^7 \ldots b^{t-1},$$

quas per M et M' designavimus.

Ceterum observandum est, numerum b ea indole affectum ut sit $b + a \equiv 0$ (mod. 2^n), nulli postestatum classis M congruum fieri.

Nam primum est $b \equiv -a$, ideoque $b^t \equiv a^t \equiv 1$, quia t par. Porro nulla inferior ipsius b vel $-a$ potestas quam t^{ta} unitati fit congrua.

Potestates enim, quarum exponentes ambo pares vel ambo impares incongruas esse ex suppositione patet. Restat igitur, ut probemus, congruentiam locum habere non posse $a^\varphi \equiv -a^\psi$ vel $a^\varphi + a^\psi \equiv 0$, designante φ numerum parem, ψ vero imparem. Est vero si ponatur $a = 2^k h \pm 1$, ubi h impar, a^φ formae $2^{k+\lambda} h' + 1$, ubi $\varphi = 2^\lambda f$ atque f impar,; contra ea a^ψ formae $2^k h'' \pm 1$, ita ut sit h'' impar. Unde manat, quando signum superius accipias, $2^{k+\lambda-1} h'' + 2^{k-1} h' + 1 \equiv 0$ (mod. 2^{k-1}), q. f. n.; si vero signum inferius statuas, habetur $2^k (2^\lambda h'' + h') \equiv 0, 2^k \equiv 0, k \overline{\gtrless} n$. Sed etiam hoc fieri nequit, nisi $h=1$, quo in casu $2^n - 1$ ad exponentem 2 pertinet, quem excludimus. Pertinet igitur $-a$ ad exponentem t.

Unde classes habemus

$$(M) \; \ldots\ldots\ldots \; a, a^3, a^5, a^7 \ldots a^{t-1}$$
$$(M') \; \ldots\ldots \; -a, -a^3, -a^5, -a^7 \ldots -a^{t-1}.$$

Pro a quilibet numerus ad t pertinens accipi poterit.

Postremo nullus terminus classis (M') alicui classis (M) congruus erit. Nam si haberetur $a^\varphi \equiv -a^\psi$, ita ut φ, ψ ambo sint

impares, esset, si a statuas formae $2^k h \pm 1$, $2^{k-1}h'' + 2^{k-1}h' \pm 1 \equiv 0$ (mod. 2^{n-1}), q. f. n.

Ex quo tandem sequitur, omnes numeros ad exponentem t pertinentes classibus (M) et (M') contineri; nam multitudo terminorum est t, plures vero ad t non pertinent.

21.

Nunc tandem probabo, classem (A) congruere cum classe (M) et classem (A') cum classe (M').

Numeri classium (A) et (A') ita etiam possunt repraesentari

$$A. \left\{\begin{array}{r} 2^m - 1 \\ 3.\ 2^m - 1 \\ 5.\ 2^m - 1 \\ 7.\ 2^m - 1 \end{array}\right\} \qquad A'. \left\{\begin{array}{r} 2^m + 1 \\ 3.\ 2^m + 1 \\ 5.\ 2^m + 1 \\ 7.\ 2^m + 1 \end{array}\right\}$$

. . . .

ex quo patet, formas primae classis esse $2^m h - 1$, formas vero secundae $2^m h + 1$.

Iam numerus a in classe (M) sit formae $2^m h - 1$ eritque (1.) etiam a^φ formae $2^m h - 1$, denotante φ numerum integrum imparem. Hanc igitur formam induunt a^3, a^5, a^7, etc. neque vero alteram $2^m h + 1$; nam si haberetur simul $2^m h' + 1 = 2^{m'} h - 1$, esset $2^m h' - 2^{m'} h = 2$, $2^{m-1} h' - 2^{m'-1} h = 1$, q. e. a. Ergo classes (A) et (M) congruunt, similique modo classes (A') et (M').

22.

Relationes quaedam valde insignes inter terminos periodorum radicesque congruentiarum purarum.

1. Summa potestatum exponentis k omnium terminorum periodi numeri cujusvis a aut per modulum primum p divisibilis est aut exponenti, ad quem a pertinet, congrua, prouti t ipsum k non metitur aut metitur.

Demonstratio. Summa potestatum exponentis k terminorum

$$a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ \ldots\ a^t$$

est

$$a^k + a^{2k} + a^{3k} + a^{4k} + \ldots + a^{tk}$$

vel summa

$$s = a^k \cdot \frac{a^{tk} - 1}{a^k - 1},$$

ideoque

$$s(a^k - 1) = a^k (a^{tk} - 1), \quad \text{ergo} \quad s(a^k - 1) \equiv 0 \text{ (mod. } p).$$

Quodsi t ipsum k non metitur, esse nequit $a^k \equiv 1 \pmod{p}$, quam ob rem tum quidem s per p dividi poterit. Si vero t numerum k metitur, erit $a^k \equiv 1$, ergo $a^{2k} \equiv 1$, etc., atque $s \equiv t$.

Corollarium. Quando g ad exponentem $\frac{p-1}{\delta}$ pertinet, ubi est δ divisor communis maximus numerorum t et $p-1$, ex 16. sequitur, residua ordinis t sec. mod. p potestatibus exhiberi

$$g, g^2, g^3, g^4, \ldots g^{\frac{p-1}{\delta}}.$$

Residua igitur periodum constituunt, qua ex re etiam summa potestatum k^{tarum} omnium residuorum ordinis t secund. mod. p aut per p divisibilis erit aut numero $\frac{1}{\delta}(p-1)$ congrua, prouti k per t non divisibilis est aut divisibilis.

2. Designante etiam nunc δ divisorem communem maximum numerorum t et $p-1$, congruentia $x^t \equiv 1 \pmod{p}$ admittit δ radices diversas, quarum qualibet ad exponentem δ pertinens designata per ω omnes radices exhibentur potestatibus

$$\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \ldots \omega^\delta.$$

Ex quo sequitur propositio (1.):

Summa potestatum k^{tarum} omnium radicum congruentiae $x^t \equiv 1 \pmod{p}$ semper per p divisibilis est, si t ipsum k non metitur.

3. In comment. De Potestatum Periodis. §. 43. jam demonstravi, productum ex omnibus terminis periodi numeri cujusvis secundum modulum p^n vel $2p^n$ unitati congruum esse positive aut negative acceptae, prouti multitudo terminorum sit impar aut par.

Ergo ex 16. manat theorema:

Productum omnium residuorum ordinis t moduli p^n vel $2p^n$ unitati positive aut negative sumptae congruum est, prouti multitudo residuorum est impar aut par.

4. Quodsi radices congruentiae

$$x^t \equiv 1 \pmod{p},$$

sunt $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_\delta$, designaturque summa omnium radicum per $-A_1$, summa combinationum binarum radicum per A_2, summa combinationum ternarum per $-A_3$, summa combinationum quaternarum per A_4 etc.; deinde summa radicum per S_1, summa quadratorum per S_2, summa cuborum per S_3, summa biquadratorum per S_4 etc., ex theoremate Neutoniano habentur aequationes

$$\begin{cases} S_1 + A_1 = 0 \\ S_2 + A_1 S_1 + 2A_2 = 0 \\ S_3 + A_1 S_2 + A_2 S_1 + 3A_3 = 0 \\ S_4 + A_1 S_3 + A_2 S_2 + A_3 S_1 + 4A_4 = 0 \\ \quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ S_{\delta-1} + A_1 S_{\delta-2} + A_2 S_{\delta-3} + \ldots + (\delta-1) A_{\delta-1} = 0 \\ S_\delta + A_1 S_{\delta-1} + A_2 S_{\delta-2} + \ldots + A_{\delta-1} S_1 + \delta A_\delta = 0. \end{cases}$$

Iam vero (2.) summae S_1, S_2, S_3, S_4, etc. $S_{\delta-1}$ sunt $\equiv 0$, at $S_\delta \equiv \delta$, ergo adjumento aequationum erit $A_1 \equiv A_2 \equiv A_3 \ldots\ldots \equiv A_{\delta-1} \equiv 0$, at $\delta + \delta A_\delta \equiv 0$.

Hinc erit etiam

$$-A_1 \equiv 0,\; A_2 \equiv 0,\; -A_3 \equiv 0,\; A_4 \equiv 0, \text{ etc.}$$

Productum omnium radicum, quod per P designemus, erit $\mp A_\delta$ prouti δ est impar aut par, ergo resp. $P \equiv \pm 1$.

Hinc deducti sumus ad theorema elegans:

Summa omnium radicum congruentiae $x^t \equiv 1 \pmod{p}$, deinde summa combinationum binarum, ternarum, quaternarum etc. radicum semper per modulum primum p divisibilis est. Productum vero radicum unitati positive aut negative acceptae est congruum, prouti multitudo radicum est impar aut par.

4. Designetur summa combinationum m elementorum ad classem n^{tam} per ${}^nC_m$ eritque, quando ε significat elementum quodvis, ut ex theoria combinationum constat:

$${}^nC_m = {}^nC_{m-1} + \varepsilon\, {}^{n-1}C_{m-1}\,.$$

Quodsi habetur

$${}^1C_m \equiv 0,\; {}^2C_m \equiv 0,\; \ldots\; 1 + {}^mC_m \equiv 0$$

erit

$$\varepsilon + {}^1C_{m-1} \equiv 0,\; {}^2C_{m-1} + \varepsilon\, {}^1C_{m-1} \equiv 0,\; {}^3C_{m-1} + \varepsilon\, {}^2C_{m-1} \equiv 0,$$

etc., ideoque

$$\varepsilon \equiv -{}^1C_{m-1},\; {}^2C_{m-1} - ({}^1C_{m-1})^2 \equiv 0,$$

$${}^3C_{m-1} - ({}^1C_{m-1})^3 \equiv 0,\; {}^4C_{m-1} - ({}^1C_{m-1})^4 \equiv 0,$$

etc.,

$${}^{m-1}C_{m-1} - ({}^1C_{m-1})^{m-1} \equiv 0,\; {}^{m-1}C_{m-1}\, \varepsilon \equiv -({}^1C_{m-1})^m.$$

Unde manat, quum ${}^{m-1}C_{m-1}\,\varepsilon \equiv \pm 1$ sit, $({}^{1}C_{m-1})^m \equiv \mp 1$. Signo superiore utendum est aut inferiore, prouti m est impar aut par. Iam vero habetur ${}^{1}C_{m-1} \equiv -\varepsilon$, ergo $(-\varepsilon)^m \equiv \mp 1$ vel $\varepsilon^m \equiv 1$.

Ex quo habetur propositio:

Si summa numerorum secundum modulum primum p incongruorum, quorum multitudo m, deinde simul summa combinationum binarum, summa combinationum ternarum etc. per modulum divisibilis est, productum vero unitati positive aut negative acceptae congruum, prouti multitudo numerorum impar aut par, necessario quicunque illorum numerorum erit radix congruentiae $x^m \equiv 1$ (mod. p).

5. Finem huic commentationi imponam demonstratione propositionis, quae sequitur:

Productum omnium numerorum ad eundem exponentem pertinentium secundum modulum, qui potestas est aliqua numeri 2 altior quam secunda, semper unitati secundum hunc modulum congruum est.

Examinemus primum casum, in quo exponens t est 2. Tum vero ad t pertinent $2^{n-1}-1$, $2^{n-1}+1$, 2^n-1 productumque $P = (2^{2(n-1)}-1)(2^n-1)$, quod unitati secundum 2^n congruum esse, statim perspicietur.

Deinde sit $t>2$ pertinebuntque hi numeri ad exponentem t (20.)

$$a,\ a^3,\ a^5,\ a^7, \ldots\ a^{t-1};\ -a, -a^3, -a^5, \ldots -a^{t-1}$$

vel eorum residua minima. Quoniam ex supp. $\frac{t}{2}$ semper est numerus par, erit productum

$$P = (a.\,a^3.\,a^5 \ldots\ a^{t-1})^2 = (a^{1+3+5+\ldots+t-1})^2,$$

ideoque $P = a^{\frac{1}{2}t^2}$. Est vero $a^t \equiv 1$, ergo $(a^t)^{\frac{1}{2}t} \equiv 1$, i. e. $P \equiv 1$ (mod. 2^n), q. e. d.

XLVIII.

Ueber die Libelle oder das Niveau*).

Weil die Libelle oder das Niveau ein für alle Messinstrumente so wichtiges Werkzeug ist, so halte ich es für zweckmässig, den folgenden Aufsatz zu dessen weiterer Verbreitung, und weil derselbe wohl sonst nicht allen Lesern des Archivs zu Gesicht kommen möchte, in dieser Zeitschrift mitzutheilen. G.

Académie des Sciences de Bruxelles.

Séance du 2 novembre 1844.

Physique. — Un rapport fait dans cette séance par MM. Quetelet, Crahay et Stass, conclut à l'impression de la note suivante de M. Liagre, lieutenant du génie belge, sur les oscillations du niveau à bulle d'air et sur les moyens d'y remédier.

„On a fait jusqu'ici peu d'attention aux déplacements qu'éprouve la bulle d'un niveau fixé sur un plan horizontal immobile, lorsque l'une des extrémités de cette bulle vient à recevoir une température supérieure à celle de l'autre. J'ignore si des observations analogues ont déjà été publiées, mais, dans ce cas, elles doivent être très peu connues, car je n'ai vu cette particularité mentionnée dans aucun ouvrage**), et l'on est généralement d'accord aujourd'hui, lorsque l'on observe un changement quelconque dans l'indication du niveau adapté à un instrument, à en rendre responsable l'instrument lui-même, regardant comme infaillible la marche de la bulle. M. Quetelet, lorsque je lui ai parlé du fait

---

*) L'Institut, journal universel des sciences et des sociétés savantes en France et a l'Étranger. 1re Section. Treizième année. Nr. 590. 16. Avril 1845. p. 145.

**) J'ai consulté inutilement sur ce sujet les traités de physique et d'astronomie les plus récents et les plus estimés, notamment le *Physikalisches Wörterbuch* de Gehler, et l'*Astronomie physique* de M. Biot, qui a consacré quarante pages de son excellent ouvrage (tome II, 1844, chap. IX, sect. 2) à développer la construction, le maniement et les propriétés du niveau à bulle d'air. L.

en question, m'a appris qu'il avait observé le même phénomène il y a dix ans, pendant qu'il était occupé à déterminer la latitude de Bruxelles au moyen du cercle répétiteur, mais qu'il n'avait pas insisté sur cette singularité, parce qu'il croyait l'avoir vue rapportée dans un écrit dont le titre lui échappe aujourd'hui. Quoi qu'il en soit, mon but, en présentant cette note, n'est nullement d'établir mes droits de priorité à la découverte du phénomène que je signale, mais simplement de donner de la publicité à un fait que j'ai constaté pour ma part, et qui mérite d'être connu. Mon désir est d'être utile à ceux qui se servent du niveau à bulle d'air comme instrument de précision, en leur inspirant de la défiance dans son maniement, et de les mettre en garde contre des erreurs qui, dans des circonstances ordinaires, s'élèvent facilement à plusieurs secondes, et, dans des cas extrêmes, à une minute et au delà."

„En substance, ma remarque peut se formuler en ces quelques mots: „Un niveau à bulle d'air très bon et très sensible étant calé sur un plan invariable, si l'une des extrémités de sa bulle vient à se trouver en présence d'une température supérieure à celle de l'autre extrémité, la bulle tout entière marche du côté d'où émane la chaleur."

„Cette expérience est extrêmement facile à répéter, lorsque l'on possède un niveau un peu sensible. Il suffit de le caler, et de placer ensuite la main à un centimètre environ au-dessus d'une extrémité de la bulle. Au bout de cinq à six secondes (plus ou moins suivant la chaleur de la main et la sensibilité du niveau) on verra la bulle se déplacer lentement, marcher vers la main et suivre celle-ci dans tous ses mouvements. On rend cette action plus énergique en dirigeant l'haleine vers celui des deux bouts que l'on veut faire avancer. En moins de cinq secondes, j'ai déplacé ainsi de douze millimètres la bulle d'un niveau; chaque millimètre de l'échelle correspondait à un angle de quatre secondes."

„Cette observation est bien simple, et cependant je ne crois pas qu'on en ait jamais tiré aucune conséquence. Ne voit-on pas en effet tous les jours des ingénieurs, chargés de nivellements très précis, opérer avec le niveau cercle, sans même prendre la précaution de soustraire leur instrument à l'action directe des rayons du soleil, en sorte que tantôt l'une des extrémités de la bulle, tantôt l'autre est la plus échauffée? Si les erreurs que l'on commet forcément ainsi deviennent trop palpables, on se rejette alors sur les dilatations inégales de la monture de l'instrument, on s'en prend au mécanicien *), tandis que les mêmes irrégularités se seraient manifestées si l'on avait pu se servir d'une simple fiole sans aucune monture."

„Tout le monde connait les écarts inexplicables auxquels sont sujettes les observations de latitude faites à l'aide du cercle répétiteur. On voit, dans la *Base du système métrique* (2e vol., pages 262 et suiv.), des discordances frappantes entre des séries d'observations de latitude faites par Delambre avec des soins scrupu-

---

*) M. Beaulieu, mécanicien de l'observatoire de Bruxelles, auquel je parlais dernièrement de ce fait, m'a dit que plusieurs ingénieurs s'étaient plaints à lui de ce que ses niveaux se *dérangeaint au soleil.* J'ai montré à M. Beaulieu qu'un excellent niveau de Fortin, attaché au cercle répétiteur de l'observatoire, se dérangeait à la chaleur de sa main. L.

leux. Cet habile observateur se demande s'il est possible de les expliquer par des réfractions extraordinaires dues au grand froid qu'il faisait alors."

„Ces derniers mots suffisent pour me rendre compte des erreurs d'environ dix secondes que Delambre a pu faire sur des distances zénithales conclues à l'aide du niveau. Sans parler d'un feu de bivouac qui, par un temps si rigoureux, brûlait probablement à quelque distance de la station, ni des deux bougies qui servaient à éclairer le réticule et le niveau du cercle répétiteur, la chaleur rayonnée par le corps de l'observateur, dans un temps très froid, peut facilement dévier la bulle de 10″, d'autant plus que la disposition du niveau, pour la détermination des latitudes, est telle que l'un de ses bouts est tourné vers l'observateur, et l'autre dans une direction opposée. Ajoutons enfin que, par un grand froid, la bulle devient plus sensible, et que l'allongement considérable qu'elle prend permet aisément qu'une de ses extrémités s'échauffe plus que l'autre."

„Il faut donc éviter de faire de pareilles observations dans un lieu fermé, à travers une ouverture étroite; car il s'établit alors un courant d'air qui, venant frapper l'une des extrémités de la bulle du niveau, la déplace nécessairement."

„Pour bien m'assurer de l'effet que les variations de la température peuvent avoir sur un niveau exposé à l'air, j'ai opéré de la manière suivante. Sur une forte pierre de taille servant d'appui extérieur à une fenêtre de premier étage, j'ai placé deux niveux à bulle d'air. Les deux instrumens étaient situés sur le prolongement l'un de l'autre, et separés par un intervalle de vingt centimètres environ. L'extrémité de chacun d'eux était distante de 22 cent. du montant le plus voisin. Ils étaient exposés vers le sud, mais la direction de leur axe faisait avec la méridienne un angle de 40° comptés du nord en passant par l'ouest. Le niveau n° 1 a une longueur de 22 centimètres et un diamètre intérieur de 19^{mm}, 4; la plus petite longueur de sa bulle a été de 22^{mm}, 5 par une température de 36° environ; sa plus grande longueur de 74^{mm} par 12°,3. On voit qu'il renferme très peu d'air et que la majeure partie de sa bulle est formée de vapeur d'alcool. Le niveau n° 2 a la même longueur que le précédent, mais son diamètre n'est que de 14^{mm}, 7. Sa bulle varie de 17^{mm}, 5 à 50^{mm} aux températures respectives de 36° et 12°, 3. Les fioles en verre n'étaient garnies d'aucune armature ni support: je m'affranchissais par-la de toute cause d'erreur due aux dilatations inégales du métal par la chaleur, ou du bois par l'humidité. Elles etaient posées sur la pierre formant l'appui de la fenêtre, mais, pour les fixer, j'avais placé au-dessous de leurs extrémités deux petites couches de cire, épaisses d'un demi-millimètre environ, adhérentes à la fois à la pierre et aux fioles."

„Pour éviter qu'on atribue les oscillations de la bulle à un mouvement périodique de la pierre de support ou du bâtiment, causé par la chaleur du soleil, je ferai remarquer de suite que les deux bulles marchaient en sens inverse, c'est-à-dire qu'elles se rapprochaient pendant le jour et se fuyaient pendant la nuit. Ce fait, que j'avais prévu, est ce qui m'a engagé à opérer avec deux niveaux au lieu d'un seul. En effet, pendant la journée, les rayons solaires réfléchis par la couleur blanche du montant *a* concentraient

la chaleur vers le milieu de l'appui horizontal, et attiraient les deux bulles vers ce point milieu. La nuit, au contraire, les deux montants conservaient une température supérieure à celle de l'air ambiant, et attiraient les bulles à leur tour.“

„Mes observations ont commencé le 5 septembre et fini le 16: j'ai noté chaque jour, à 15 ou 16 époques differentes, la position du milieu de la bulle de chacun des deux niveaux. En regard de chaque résultat, j'indiquais la température donnée par un thermomètre centigrade placé à l'ombre du montant *b*. J'ai formé ainsi des tableaux où la marche des niveaux est comparée à celle du thermomètre, et je les ai trouvées toutes deux parfaitement concordantes. Enfin, pour permettre de mieux saisir d'un seul coup d'oeil la liaison intime qui existe entre les variations de la température et les déplacements des bulles, j'ai traduit graphiquement les résultats de mes tableaux.“

„J'ai cherché vainement à me donner à moi-même une explication complètement satisfaisante du phénomène qui fait l'objet de cette communication: c'est un sujet de recherche très intéressant, et qui, suivi avec soin et discuté avec sagacité, pourrait peut-être jeter un jour nouveau sur la théorie des ondes calorifiques.“

„Je me suis donc borné, après avoir bien constaté le fait, à tâcher de remédier à un défaut qui enlève une grande partie de ses avantages à un instrument précieux. Le moyen que je vais proposer me semble résoudre le problème aussi complètement que possible.“

„Un niveau à bulle d'air est enveloppé d'une seconde fiole, d'un diamètre double de la première. Les deux cylindres se touchent tout le long de la génératrice inférieure, en sorte que la génératrice supérieure du véritable niveau se confond avec l'axe de la fiole enveloppante. Celle-ci est remplie *entièrement* d'eau colorée en bleu: la teinte que l'on donne à l'eau doit être aussi foncée que possible, mais permettre cependant de faire la lecture des divisions tracées sur le niveau intérieur. Enfin, l'une des extrémités du tube enveloppant est fermée à l'aide d'un bouchon en caoutchouc, qui, par son élasticité, suit le liquide coloré dans ses contractions et dilatations, et empêche que la grande fiole éclate en été, ou qu'il s'y forme un vide en hiver. Par ce moyen, la bulle se trouve entourée de tous les côtés d'une égale quantité de liquide, au milieu duquel elle peut être considérée comme nageant, et elle est soustraite, dans toute sa longueur, aux brusques inégalités de température, par la conductibilité du liquide ambiant: la couleur bleue donnée à l'eau sert à absorber davantage le calorique rayonnant.“

„Pour m'assurer de l'efficacité du moyen que je viens d'indiquer, j'ai commencé par exposer un niveau ordinaire à la chaleur artificielle provenant d'une lampe à mèche cylindrique. Un écran, percé d'un trou circulaire, et interposé entre la lampe et le niveau, permettait de diriger la chaleur sur l'une des extrémités de la bulle. Je l'ai déplacée ainsi de 11 divisions en deux minutes.“

„J'ai ensuite enfermé le niveau dans une enveloppe semblable à celle que je viens de décrire, mais sans y introduire de liquide: l'effet de la chaleur a été plus énergique que dans le premier cas; la bulle s'est déplacée de 14 divisions en deux mi-

nutes. En effet, l'enveloppe cylindrique faisait fonction de lentille."

„En troisième lieu, j'ai rempli d'eau claire la grande fiole, et j'ai replacé tout le système dans les mêmes conditions que précédemment, c'est-à-dire que la même distance existait entre l'axe de la mèche et celui de la bulle. Un thermomètre placé près du niveau, mais soustrait par l'écran à l'action de la lampe, et un autre, exposé directement à cette action, indiquaient dans les deux cas les mêmes différences de température. Après quatre minutes, la bulle ne s'était déplacée que d'une division et un quart."

„Enfin j'ai coloré le liquide en bleu à l'aide du sulfate de cuivre ammoniacal, et j'ai dirigé pendant cinq minutes la chaleur de la lampe sur la même extrémité de la bulle. Au bout de ce temps, j'ai pu voir, en m'aidant de la loupe, que la bulle avait marché de huit dixièmes de division au plus. Ainsi, l'effet produit par la chaleur n'est plus, dans ce cas, que les trois centièmes de ce qu'il était sur le niveau ordinaire."

„Je crois donc devoir conseiller d'adapter la modification que je viens d'indiquer aux niveaux destinés à des mesures de précision: si elle rend l'instrument un peu plus lourd, elle a l'avantage de le rendre moins fragile; lorsqu'il lui arrivera un accident, presque toujours la fiole sera préservée, ce sera l'enveloppe qui se brisera, et celle-ci est bien facilement remplacée, car elle n'a pas besoin d'avoir une forme cylindrique parfaite."

„Je terminerai en recommandant à ceux qui se servent du niveau comme instrument de précision, non-seulement d'éviter qu'une des extrémités de sa bulle soit soumise à une température supérieure à celle de l'autre, mais encore de ne pas l'employer lorsqu'il vient d'être transporté d'un lieu chaud dans un lieu froid ou réciproquement. J'ai remarqué en effet que lorsque l'alcool de la fiole subit des dilatations ou des contractions rapides, la bulle parait ne pas se contracter ou se dilater également des deux côtés à partir de son point milieu, en sorte que son centre est réellement déplacé; et ce mouvement de transport de la bulle continue jusq'à ce qu'elle ait acquis une longueur constante. J'attribue ce fait à des courants intérieurs qui s'établissent dans le liquide pendant qu'il s'échauffe ou qu'il se refroidit."

Anmerkung. Aehnliche Erscheinungen wie die vorher besprochenen sind übrigens auch schon sonst beobachtet und auch ähnliche Mittel zu ihrer Beseitigung angewandt worden. M. s. z. B. die Abhandlung von C. A. F. Peters über den Ertelschen Vertikalkreis der Pulkowaer Sternwarte in dem Bulletin de la classe physico-mathématique de l'Académie J. de St. Petersbourg. Thl. II. 1844. p. 307. G.

XLIX.

Andeutungen zu planimetrischen Aufgaben aus der Curvenlehre.

Von

Herrn J. Katzfey,

Director des Gymnasiums zu Münstereifel.

Bei der Stundenzahl, worauf das Studium der Mathematik an den meisten Gymnasien beschränkt ist und wegen der übrigen Lehrfächer beschränkt bleiben muss, ist es rathsam und bereits vielfach verwirklicht, dass der Inhalt dieses Lehrgegenstandes auf sein Minimum reducirt und davon ausgeschieden bleibe, was immer ohne Nachtheil des Verständnisses und ohne Verkümmerung der Allgemeinbildung ausfallen kann. Hiernach ist auch die Lehre von den Kegelschnitten der Hochschule zu überlassen, ungeachtet des Bedürfnisses verschiedener Sätze dieser Lehre zur Behandlung der Physik. Lassen sich nun diese Sätze mit den interessantesten Eigenschaften dieser Curven auf rein planimetrischem Wege und leicht fasslich den Schülern mittheilen; so ist hiermit für die Wissenschaft viel gewonnen. Dass und wie dieses geschehen könne, habe ich in den Abhandlungen zu unsern Herbstprogrammen der Jahre 1826, 1833 und 1840, so wie in meinem Lehrbuche der Mathematik gezeigt. Einen andern Weg hierzu bieten die nachstehenden Andeutungen, nach welchen die Primaner in ihren häuslichen Aufgaben zur Kenntniss der Elemente der Curvenlehre gebracht und die Fleissigern zu einer angenehmen Selbstbeschäftigung angezogen werden können.

Genesis und Form der Curven zweiter Ordnung.

§. 1. Aufg. Man soll beliebig viele Punkte einer Linie bestimmen, welche einzeln von einem Punkte und einer Kreislinie oder einer geraden Linie in Einer Ebene gleiche Abstände haben.

Zur Auflösung. 1ster Fall. Der gegebene Punkt ist in der Kreis- oder geraden Linie. Die verlangten Punkte liegen in der geraden Linie, welche die gegebene Linie unter gleichen Winkeln schneidet. (Die Axenlinie).

2ter Fall. Der gegebene Punkt ist Mittelpunkt des gegebenen Kreises. Die verlangten Punkte liegen in einem concentrischen Kreise.

Bemerk. Von hier ab werde die gegebene gerade Linie als Kreislinie von unendlichem Durchmesser betrachtet.

3ter Fall. Der gegebene Punkt liege im Radius oder in der Verlängerung desselben. Sei der Axendurchmesser gh (Taf. V. Fig. 2, 3, 4.) und in dem Radius gc oder in dessen Verlängerung der gegebene Punkt b. Dann erhält man zuerst die Scheitelpunkte a, e mittelst $ga = ab$, $ge = eh$; jeden andern der verlangten Punkte mittelst br, cr, $bz = zr$ und $zn \perp br$.

Mittelst Verlängerung der Richtungslinie br erhält man auf der andern Seite der Axenlinie den Punkt v, wo $bv = sv$ wird.

§. 2. Lehrs. Wenn der feste Punkt b (erster Brennpunkt) im Radius des Bildungskreises (Direktrix) liegt (Taf. V. Fig. 2.); so liegen die fraglichen Punkte in einer Linie, welche in sich zurückläuft und zwischen Kreisen eingeschlossen ist, welche, um den ersten Brennpunkt b und um den Mittelpunkt der Direktrix c (zweiter Brennpunkt) beschrieben, sich in a berühren.

Bew. Es ist

$$bn > bz \text{ (Elem. I. 19.)};$$

$$\frac{bz > ba \; (br > bg);}{bn > ba.}$$

Somit $bn > bl$. (Wo l Schneidepunkt ist).

Ferner ist

$$ac < gc,$$
$$< rc.$$

Sei daher k Schneidepunkt; so ist

$$rk = ga$$
$$= ba;$$

aber

$$\frac{bn > ba}{bn > rk}$$
$$rn > \text{\&c.}$$

Erkl. Die Linie, in welcher &c. ist eine Ellipse.

§. 3. Lehrs. Wenn der erste Brennpunkt auf der Verlängerung des Durchmessers des Bildungskreises liegt, (Taf. V. Fig. 2.); so liegen die fraglichen Punkte in zwei Linien, welche in einer Winkelebene unendlich fortgehend sich den Schenkeln des Winkels (Asymptoten) allmälig nähern, ohne dieselben je zu erreichen.

Bew. Seien a, e (Taf. V. Fig. 5.) die Scheitelpunkte, b, c die Brennpunkte, bd, bt Tangenten der Direktrix; so halbire ae (die Hauptaxe) in o (der Curvenmittelpunkt) und ziehe

von o aus Lothe zu den Tangenten, die nach beiden Richtungen unendlich fortgesetzt werden können; seien $fk \perp bd$ in i und $pq \perp bt$. Dann lässt sich zeigen, dass die fraglichen Linien, durch a, e gehend, innerhalb der Winkel foq, pok unendlich fortgeführt werden können, ohne die Schenkel, denen sie sich allmälig nähern, je zu erreichen.

Zu diesem Zwecke nehme man auf der fk einen beliebigen Punkt s an, ziehe sc, welche die Direktrix in r schneide, bs, br, ds.

Nun ist

$$bs = ds \text{ (Elem. I. 4.);}$$

aber

$$\frac{ds > rs \text{ (Elem. III 8.)}}{bs > rs.}$$

Also liegt der dem Radius rc entsprechende Curvenpunkt in der Ebene des Winkels foq. Sei nun dieser Punkt n und bn gezogen, so ist $bn = rn$ (§. 1.) und wenn $nz \perp br$, so ist $bz = zr$; somit $bz < bi$. Darum wird die bi von der nz geschnitten, und zwar unter schiefen Winkeln, so dass zn, is, über n, s verlängert, convergiren.

Wird nun zwischen rc, dc ein Radius cw gezogen, dessen Verlängerung der zn vor dem Begegnen derselben mit if begegne, geschehe im Punkte v; so ist erweislich, dass $bv < cw$ ist, also der bezügliche Curvenpunkt zwischen zv und if liegt, somit der if näher ist als Punkt n.

Ebenso verhält sich's in Bezug auf die oq und ähnlich in Bezug auf die po und ok.

Da nun beim Fortrücken des Punktes s auf der unbegrenzten fk die Bestimmung des Punktes n möglich bleibt (weil cd parallel fk); so kann die fragliche Linie unendlich fortgesetzt werden.

Erkl. Die Linie, in welcher &c. ist eine Hyperbel.

§. 4. Lehrs. Wenn die Direktrix eine gerade Linie ist; so liegen die fraglichen Punkte in einer Linie, welche vom Scheitelpunkte aus zu beiden Seiten der Axenlinie in stetiger Abweichung von dieser und der Direktrix unendlich fortgesetzt werden kann.

Zum Beweise genügt das Δ brn. (Taf. V. Fig. 4.)

§. 5. Lehrs. Wenn zwei Kreise excentrisch in einander beschrieben sind, ohne sich zu berühren; so lassen sich zwei Ellipsen angeben, deren sämmtliche Punkte einzeln von beiden Kreisen gleiche Abstände haben.

Bew. Seien b, c (Taf. V. Fig. 6.) die Mittelpunkte der Kreise, welche die Axenlinie in i, k, f und g schneiden; so ziehe man einen beliebigen Radius cs und verlängere denselben um $ls = ib$. Beschreibe nun mit cl um c einen Kreis und in Bezug auf denselben die Ellipse, deren erster Brennpunkt b ist.

Sei nun n ein Punkt dieser Ellipse, so ziehe bn, welche die Kreislinie in r schneide.

Dann ist

$$bn = nl \text{ (Constr. g. §. 1.),}$$

$$\frac{br = ls \text{ (Ann.)}}{rn = ns \text{ \&c.}}$$

Zieht man nun die rs, welche verlängert die Punkte x, u, z giebt; dann cz, bu, welche über u verlängert die cz in v trifft; so ist wegen $\Delta\, scz \backsim snr \backsim bru \backsim uvz$ auch v ein Ellipsenpunkt und $uv = vz$.

Aus demselben Grunde ist bu parallel cs und $bu : cs = bx : cx$ &c.

Nun begegne bu verlängert dem Kreise um b in u'. Dann ziehe su', welche verlängert die Punkte x', r', z', gebe, und ferner ziehe $z'c$, $r'b$, welche verlängert der cs in n' begegne.

Hiernach ist

$$r'b : bu' = z'c : cs \text{ (Radien,}$$

und

$$\text{Winkel } r'u'b = z'sc \text{ (Corresp.);}$$

daher

$$\Delta\, r'bu' \backsim z'cs$$

und

$$r'b \text{ parallel } z'c;$$

somit

$$\Delta\, r'n's \backsim z'cs.$$

Folglich $r'n' = n's$; also n' von beiden Kreisen gleich weit abstehend.

Wird nun noch mit einem Radius $= cs - r'b$ um b ein Kreis beschrieben, der die cs in l' schneidet; so ist

$$r'b = l's.$$

Folglich

$$r'n' - r'b = n's - l's,$$

oder

$$bn' = n'l.$$

Also n' ein Ellipsenpunkt für die Brennpunkte b, c bezüglich auf den eben beschriebenen Kreis.

Andererseit der Axenlinie erhält man die Punkte v, v'.

Zus. Wenn die Kreise sich berühren; so geht die zweite Ellipse in die Hauptaxe über.

§. 6. Lehrs. Wenn zwei ungleiche Kreise in einer Ebene beschrieben sind, ohne sich zu berühren; so lassen sich zwei Hyperbeln angeben, &c. Alles nach Analogie des vor. Paragraphen.

Zus. 1. Wenn die Kreise sich berühren &c.

Zus. 2. Werden die Kreise einander gleich genommen &c.

§. 7. Lehrs. Wenn zwei ungleiche Kreise in einer Ebene sich schneiden; so lässt sich eine Ellipse und eine Hyperbel angeben, &c.

Zus. Wenn die Kreise einander gleich genommen werden; so &c.

§. 8. Lehrs. Wenn in einer Ebene ein Kreis und eine gerade Linie ausserhalb oder berührend gegeben sind; so lässt sich eine Parabel angeben, &c.

Zus. Wenn die gerade Linie Kreissekante wird; so erhält man zwei Parabeln, die dem Satze entsprechen.

L.

Ueber die Potenzen mit imaginären Exponenten.

Von

Herrn L. Ballauff,

Lehrer an der Bürgerschule zu Varel.

In einem frühern Aufsatze*) suchte ich die verschiedenen Grundbegriffe der allgemeinen Arithmetik auf eine, von der gewöhnlichen abweichende Weise darzustellen, liess aber damals die Potenzen mit imaginären Exponenten unberücksichtigt. Eine möglichst elementare Herleitung des Begriffs dieser Potenzen soll den Gegenstand der folgenden Abhandlung ausmachen.

Es sei a eine absolute, rationale oder irrationale Zahl, also ein Zeichen, welches eine solche Behandlung der Einheit vorschreibt, welche sich genau oder beliebig angenähert auf eine Theilung und Vervielfältigung derselben zurückführen lässt; die Bedeutung des Zeichens a^x ist dann in der erwähnten Abhandlung für den Fall erklärt, dass x eine positive oder negative, rationale oder irrationale Zahl ist. Die dort gegebene Definition erstreckt sich aber nicht auf den Fall, dass x eine imaginäre Zahl (von der Form $\varphi.\sqrt{-1}$) ist; dieselbe bedarf also für diesen Fall noch einer Erweiterung.

Dieser Erweiterung stellt sich aber eine eigenthümliche Schwierigkeit in den Weg. In a^x ist nämlich x kein Zeichen, welches unmittelbar eine Behandlung der Einheit vorschreibt, wie z. B. in $a+x$: sondern ein Zeichen, welches angiebt, auf welche Weise

---

*) Thl. V. Nr. XIX. S. 259.

die Einheit nach der Vorschrift von a behandelt werden soll. So schreibt das Zeichen 3 in a^3 nicht vor, dass die Einheit 3mal genommen werden soll, sondern dass die durch a angezeigte Behandlung dreimal wiederholt werden soll. Man sieht, dass sich diese Erklärung unmittelbar gar nicht auf den Fall ausdehnen lässt, dass der Exponent eine imaginäre Zahl ist. Es entsteht daher die Aufgabe, den Ausdruck a^x in einen andern umzuformen, in welchem x unmittelbar eine Behandlung der Einheit vorschreibt; dann kann die Erweiterung der Definition keiner Schwierigkeit mehr unterliegen. Diese Aufgabe ist durch den bekannten Satz: $a^x = \lim\limits_{\alpha=0} (1+\alpha \log a . x)^{\frac{1}{\alpha}}$ gelöst, in welchem Ausdrucke $\log a$ den natürlichen Logarithmus von a bezeichnet. Von diesem Satze soll hier zuerst eine einfache, und wie mir scheint, recht instruktive Herleitung gegeben werden.

Es sei zuerst $a>1$ und δ eine positive Zahl. Dann ist $a^\delta > 1$, also $a^\delta = 1 + \Delta$, wo Δ eine positive Zahl bezeichnet. Da Δ mit δ zugleich 0 wird, so kann man $\Delta = b.\delta$ setzen, wo b noch von δ abhängt und erhält dann:

$$a^\delta = 1 + b.\delta \ldots\ldots (1)$$

Es soll nun untersucht werden, was aus b wird, wenn δ unendlich klein wird. Aus (1) folgt:

$$b = \frac{a^\delta - 1}{\delta} \ldots\ldots (2)$$

und es fragt sich, ob sich dieser Ausdruck für $\delta = 0$ einer bestimmten Gränze nähert.

Man setze zuerst $\delta = \frac{1}{n}$, wo n eine unendlichgrosswerdende ganze Zahl bezeichnet und $\frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = u_n$. Dann ist

$$a^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{u_n}{n},$$

$$a = \left(1 + \frac{u_n}{n}\right)^n = 1 + u_n + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right).u_n^2 + \frac{1}{2.3}\left(1 - \frac{1}{n}\right).\left(1 - \frac{2}{n}\right)u_n^3 + \ldots$$

Man sieht, dass in dem Ausdrucke zur rechten Hand alle Glieder positiv sind und dass die Anzahl derselben, so wie die Koeffizienten der einzelnen Glieder um so grösser werden, je grösser n wird. Da aber die Summe aller Glieder immer $= a$ ist, so muss u_n mit wachsendem n immer kleiner werden. Die Glieder der unendlichen Reihe:

$$u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots u_n, \text{ in inf.}$$

sind alle positiv und jedes Glied ist kleiner als das vorherge-

hende; diese Reihe muss daher eine positive Gränze m besitzen, so dass

$$m = \overset{n=\infty}{\lim} \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$$

ist.

m ist aber zugleich der Werth von $\overset{\delta=0}{\lim} \frac{a^\delta - 1}{\delta}$. Um sich hiervon zu überzeugen, überlege man, dass $\frac{a^\delta - 1}{\delta}$ eine Funktion von δ ist, die nur für $\delta = 0$, ein Fall der bei unserer Betrachtung nicht vorkommt, eine Unterbrechung der Kontinuität erleiden kann. Für ein unendlich klein werdendes δ kann man nun $\frac{1}{n}$ so wählen, dass der Zahlwerth von $\delta - \frac{1}{n}$ kleiner ist als jede angebbare absolute Zahl. Dann kann aber, der Erklärung der Kontinuität gemäss, $\frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} - \frac{a^\delta - 1}{\delta}$ dem Zahlwerthe nach kleiner als jede noch so kleine absolute Zahl werden, und man hat

$$\lim \left\{ \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} - \frac{a^\delta - 1}{\delta} \right\} = 0;$$

oder

$$\overset{\delta=0}{\lim} \frac{a^\delta - 1}{\delta} = \overset{n=\infty}{\lim} \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = m.$$

Es ist daher, für $a > 0$ und ein unendlich kleines, positives δ:

$$a^\delta = 1 + m.\delta, \text{ wo } m = \overset{\delta=0}{\lim} \frac{a^\delta - 1}{\delta}$$

und eine bestimmte Zahl ist. Dieser Satz gilt aber auch für ein negatives δ und $a < 1$. Denn ist δ negativ und $= -\delta'$, so hat man

$$a^\delta = a^{-\delta'} = \frac{1}{1 + m\delta'} = 1 - m\delta' = 1 + m.\delta;$$

und ist $a < 1$, so ist

$$\left(\frac{1}{a}\right)^\delta = 1 + \delta \overset{\nu=0}{\lim} \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^\nu - 1}{\nu} = 1 + \delta \overset{\nu=0}{\lim} \frac{1 - a^\nu}{\nu . a^\nu}$$

$$= 1 + \delta . \overset{\nu=0}{\lim} \frac{1 - a^\nu}{\nu} : \overset{\nu=0}{\lim} a^\nu = 1 + \delta . \overset{\nu=0}{\lim} \frac{1 - a^\nu}{\nu} = 1 - m.\delta;$$

daher

$$a^{\delta}=\frac{1}{1-m\delta}=1+m\delta.$$

Es ist daher streng allgemein für jedes absolute a und jedes unendlich kleine, reelle δ:

$$a^{\delta}=1+m.\delta \ldots\ldots (4)$$

wo m eine bestimmte Zahl und

$$=\lim^{\delta=0}\frac{a^{\delta}-1}{\delta}$$

ist.

Ist x eine beliebige reelle Zahl und n eine unendlich grosse, ganze Zahl, so ist nach (4)

$$a^{\frac{x}{n}}=1+m.\frac{x}{n},$$

daher:

$$a^x=\lim^{n=\infty}\left(1+m\frac{x}{n}\right)^n \ldots\ldots (5)$$

Ist $\lim^{\delta=0}\frac{e^{\delta}-1}{\delta}=1$, so nennt man bekanntlich e die Basis der natürlichen Logarithmen. Es ist dann

$$e^x=\lim^{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \; e=\lim^{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ *)}$$

Da

$$a^x=e^{x\log a}=\lim^{n=\infty}\left(1+\frac{x.\log a}{n}\right)^n \ldots\ldots. (6)$$

so folgt aus der Vergleichung mit (5)

$$m=\log a.$$

In (6) ist nun a^x auf eine solche Weise umgeformt, dass in dem Werthe von a^x x unmittelbar eine Behandlung der Einheit vorschreibt. Die Gleichung (6) giebt dann unmittelbar folgende Erweiterung der Definition der Potenz:

---

*) Der Beweis, dass $(1+\frac{1}{n})^n$ für n unendlich werdend sich einer bestimmten Gränze nähert, ist schon früher im Archive Thl. I. Nr. XXVIII. S. 204. Thl. III. Nr. XXXVI. S. 327. gegeben. Ich halte es daher für überflüssig ihn hier zu wiederholen.

Es sei a eine beliebige absolute Zahl, x eine beliebige reelle oder imaginäre Zahl ($\varphi . \sqrt{-1}$), so bezeichnet man

$$\lim^{n=\infty} (1 + \frac{x . \log a}{n})^n \text{ mit } a^x .$$

Es muss nun noch gezeigt werden, wie die durch $a^{\varphi \sqrt{-1}}$ vorgeschriebene Behandlung der Einheit an einer Grösse wirklich ausgeführt wird. Es sei X ein Strahl, der von dem Anfangspunkte der Koordinaten aus nach der Richtung der ersten positiven Halbachse gezogen ist. Den durch $X . (1 + \frac{\varphi . i . \log a}{n})$ dargestellten Strahl erhält man, wenn man in dem Endpunkte von X nach der einen oder anderen Seite hin, je nachdem φ positiv oder negativ ist, eine Senkrechte errichtet, dieselbe $= \frac{\varphi . \log a}{n}$ macht, und den Endpunkt dieser Senkrechten mit dem Anfangspunkte der Koordinaten verbindet. Ist n unendlich gross, so erhält man einen Strahl, welcher der Länge nach $= X$ ist und mit demselben den beschriebenen Winkel $\frac{\varphi . \log a}{n}$ bildet. $X . a^{\varphi . i} = X . \lim^{n=\infty} (1 + \frac{\varphi . i \log a}{n})^n$ erhält man, wenn man dieses Verfahren n mal wiederholt. Obiger Ausdruck ist daher ein Strahl, welcher mit X gleiche Länge hat und mit demselben den beschriebenen Winkel $\varphi \log a$ bildet.

$a^{\varphi \sqrt{-1}}$ ist also ein Behandlungszeichen, welches vorschreibt, dass ein Strahl um den beschriebenen Winkel $\varphi . \log a$ gedreht werden soll. $e^{\varphi \sqrt{-1}}$ schreibt daher eine Drehung um den beschriebenen Winkel φ vor. $e^{\sqrt{-1}}$ ist also gleich demjenigen Behandlungszeichen, welches ich in meinem frühern Aufsatze mit ε bezeichnet habe.

Hieraus ergiebt sich auch unmittelbar, dass $X . e^{\varphi \sqrt{-1}} = X . \cos \varphi + X . \sin \varphi . \sqrt{-1}$, also $e^{\varphi \sqrt{-1}} = \cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1}$ ist. Da sich nun auf bekannte Weise $\lim^{n=\infty} (1 + \frac{\varphi . i}{n})^n = e^{\varphi . i}$ in eine unendliche Reihe entwickeln lässt, so erhält man durch Gleichsetzung der reellen und imaginären Theile mit Leichtigkeit die bekannten Reihen für $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$.

Die Definition der Potenz lässt sich nun auch auf den Fall erweitern, dass man für den Exponenten ein beliebiges Behandlungszeichen, wie $\frac{d}{dx}$ etc. setzt. Ist Δ ein solches, so hat man:

$$e^{\Delta} = \lim^{\Delta=\infty} (1 + \frac{\Delta}{n})^n ,$$

wo es dann freilich noch zweifelhaft bleibt, ob dieses Zeichen eine bestimmte Bedeutung hat oder nicht. Für diese Potenzen lassen sich dann mit Leichtigkeit diejenigen Sätze beweisen, die für gewöhnliche Potenzen gelten. So ist z. B.

$$e^{\Delta} = \overset{n=\infty}{\lim} (1+\frac{\Delta}{n})^n,$$

$$e^{\Delta'} = \overset{n=\infty}{\lim} (1+\frac{\Delta'}{n})^n;$$

daher:

$$e^{\Delta}.e^{\Delta'} = \overset{n=\infty}{\lim} (1+\frac{\Delta}{n})^n \times \overset{n=\infty}{\lim} (1+\frac{\Delta'}{n})^n$$

$$= \overset{n=\infty}{\lim} \left\{(1+\frac{\Delta}{n})^n . (1+\frac{\Delta'}{n})^n\right\}$$

$$= \overset{n=\infty}{\lim} \left\{(1+\frac{\Delta+\Delta'}{n} + \frac{1}{n^2}\Delta.\Delta'\right\}^n$$

$$= \overset{n=\infty}{\lim} (1+\frac{\Delta+\Delta'}{n})^n = e^{\Delta+\Delta'};$$

vorausgesetzt dass nicht $\Delta.\Delta'$ eine solche Behandlung der Einheit anzeigt, durch deren Ausführung eine unendlich grosse Grösse entsteht.

Die Erklärung solcher Potenzen, wie $a^{u+v\sqrt{-1}}$, $(a+b\sqrt{-1})^{u+v\sqrt{-1}}$, ist theils schon in dem Frühern enthalten oder muss auf die gewöhnliche Weise gegeben werden.

Die Konstruktion der imaginären Zahlen ist bekanntlich zuerst von Gauss gegeben worden. So viel ich weiss, ist von Gauss selbst Nichts darüber im Druck erschienen *). Ich kenne diese Untersuchungen nur durch eine kurze briefliche Mittheilung eines Freundes (des Herrn Dr. Wittstein) und durch die Abhandlung des verstorbenen Majors Müller im Archive (Thl. I. S. 397). Die Idee, die Zeichen $\frac{d}{dx}$, Δ_x u. s. w. wie Zahlen zu behandeln, ist von dem verstorbenen Doctor Eichhorn in seinen Principien einer allgemeinen Funktionenrechnung (Hannover 1834) vielleicht zuerst ausgesprochen. Cauchy hat von dieser Idee bekanntlich glänzende Anwendungen auf die Theorie des Lichts gemacht, nennt aber diese Rechnungen symbolische. Ich glaube, dass dieselben nicht mehr oder weniger symbolisch sind, als die Rechnungen mit unbenannten Zahlen überhaupt.

---

*) Die Abhandlung Thl. VI. Nr. XXXV. und deren Anhang konnte Herr Ballauff bei Abfassung des vorliegenden Aufsatzes noch nicht kennen.
G.

LI.
Ueber das ballistische Problem *).

Von dem
Herrn Doctor Dippe,
Oberlehrer am Gymnasium Fridericianum zu Schwerin.

In dem Programm des Gymnasium Fridericianum in Schwerin vom Jahre 1843 habe ich eine Lösung des ballistischen Problems auf die Annahme gestützt, dass der Widerstand der Luft der Geschwindigkeit des bewegten Körpers proportinal sei. Ich bin weit davon entfernt, diese Annahme für richtiger oder für weniger falsch zu halten, als die gewöhnliche Voraussetzung; allein ich glaube doch, dass diese Untersuchung nicht ohne einiges theoretische Interesse ist, indem theils das Gesetz jenes Widerstandes noch gar nicht mit hinlänglicher Sicherheit bekannt ist, theils die von mir zum Grunde gelegte Annahme die einzige ist, bei welcher man zu einer vollständigen Lösung des Problems gelangen kann. Selbst die Praxis scheint bei dieser Auflösung nicht ganz leer auszugehen, wenn man nur von den aufgestellten Formeln nicht mehr verlangt, als sie bei der Unwahrscheinlichkeit, dass die ihnen zu Grunde liegende Annahme richtig sei, leisten können.

Der Umstand, dass von unsern Programmen nur wenige Exemplare die Gränzen Mecklenburgs überschreiten, wird mir zur Entschuldigung dienen, dass ich das Wesentlichste aus jener Abhandlung hier mittheile.

§. 1.

Der bewegte Körper sei eine Kugel, und die beschleunigende Kraft des Widerstandes sei

$$\frac{gv}{k},$$

---

*) Ich halte es für meine Schuldigkeit, zu bemerken, dass der Abdruck dieses schon seit längerer Zeit in meinen Händen befindlichen Aufsatzes durch unvorhergesehene Hindernisse bis jetzt verzögert worden ist, glaube aber, dass derselbe auch nun nicht zu spät kommt, wenn auch der Gegenstand selbst nicht ganz neu ist. G.

wo k eine durch die Erfahrung zu bestimmende constante Geschwindigkeit ist, deren Werth von der Grösse und Dichtigkeit der Kugel, sowie von der Dichtigkeit und besondern Beschaffenheit des widerstehenden Mittels abhängt, während g die beschleunigende Kraft der Schwere in dem widerstehenden Mittel bedeutet, v aber die Geschwindigkeit des bewegten Körpers ist. Wenn G die beschleunigende Kraft der Schwere im leeren Raum ist, δ aber die Dichtigkeit des Mittels, d die Dichtigkeit der Kugel bedeutet, so hat man

$$g = G\left(1 - \frac{\delta}{d}\right).$$

Es wird g negativ, wenn $\delta > d$ ist; und in diesem Falle erhält auch k einen negativen Werth, damit der Quotient $\frac{g}{k}$ positiv bleibe. Da ferner der Widerstand um so geringer wird, je kleiner $\frac{\delta}{d}$ ist, so muss der Werth von k in der Weise von $\frac{\delta}{d}$ abhängen, dass k unendlich gross wird, wenn $\frac{\delta}{d}$ verschwindet, also wenn die Bewegung im leeren Raume erfolgt.

Um die Lösung des Problems zu vereinfachen, nehmen wir an, dass die widerstehende Flüssigkeit keine eigenthümliche Bewegung habe, dass ihre Dichtigkeit in der ganzen Ausdehnung der Kugelbahn constant, und die Richtung der Schwere mit dem durch einen Punkt A der Kugelbahn gezogenen Erdradius parallel sei. Die Bahn des Kugelmittelpunktes liegt alsdann in einer durch AB gelegten vertikalen Ebene, wenn AB die Richtung angiebt, welche die Kugel im Punkte A hat. In dieser Ebene legt man durch A die Abscissenachse AX horizontal und die Ordinatenachse AY darauf senkrecht, so dass die Ordinaten in der Richtung nach oben positiv genommen werden. Nach Verlauf der Zeit t sei die Kugel mit der Geschwindigkeit v in einem Punkte C angelangt, dessen Coordinaten x und y sind; der zwischen A und C liegende Theil ihrer Bahn sei s, und in C bilde die Richtung ihrer Bewegung mit AX den Winkel φ: dann sind nach bekannten Gesetzen der Mechanik

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{gv}{k}\cos\varphi,\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{gv}{k}\sin\varphi - g$$

die Differentialgleichungen, aus denen die Gesetze der Bewegung hergeleitet werden. Nun ist bekanntlich $v = \frac{ds}{dt}$, $\cos\varphi = \frac{dx}{ds}$, $\sin\varphi = \frac{dy}{ds}$; folglich hat man die Integration der Gleichungen

$$1)\ \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{k}\cdot\frac{dx}{dt},\quad 2)\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{g}{k}\cdot\frac{dy}{dt} - g$$

zu bewerkstelligen, und, wenn im Punkte A die Geschwindigkeit $= a$ ist, und mit AX den Winkel $BAX = \alpha$ bildet, die Con-

stanten so zu bestimmen, dass gleichzeitig $t=0$, $x=0$, $y=0$, $s=0$, $v=\frac{ds}{dt}=a$, $\frac{dx}{ds}=\cos\alpha$, $\frac{dy}{ds}=\sin\alpha$, mithin die horizontale Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}=a\cos\alpha$, die vertikale Geschwindigkeit $\frac{dy}{dt}=a\sin\alpha$ werde.

Man findet durch Integration der Gleichungen 1) und 2)

$$3)\quad \frac{dx}{dt}=a\cos\alpha-\frac{gx}{k},$$

$$4)\quad \frac{dy}{dt}=a\sin\alpha-\frac{gy}{k}-gt.$$

Aus der Gleichung 3) erhält man durch eine neue Integration

$$5)\quad t=\frac{k}{g}\text{ log. nat. }\frac{ak\cos\alpha}{ak\cos\alpha-gx},$$

oder

$$6)\quad x=\frac{ak\cos\alpha}{g}\left(1-e^{-\frac{gt}{k}}\right),$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet.

Eben so erhält man aus 4)

$$7)\quad t=\frac{k}{g}\text{ log. nat. }\frac{k+a\sin\alpha}{k+a\sin\alpha-\frac{gy}{k}-gt},$$

$$8)\quad y=k\left\{\frac{+a\sin\alpha}{g}\left(1-e^{-\frac{gt}{k}}\right)-t\right\}.$$

Durch Combination der Gleichungen 3) und 6) findet man die horizontale Geschwindigkeit:

$$9)\quad \frac{dx}{dt}=a\cos\alpha\, e^{-\frac{gt}{k}},$$

und aus 4) und 8) die vertikale Geschwindigkeit:

$$10)\quad \frac{dy}{dt}=(k+a\sin\alpha)\,e^{-\frac{gt}{k}}-k.$$

Endlich erhält man durch Verbindung der Gleichungen 5) und 7)

$$\frac{ak\cos\alpha}{ak\cos\alpha-gx}=\frac{k+a\sin\alpha}{k+a\sin\alpha-\frac{gy}{k}-gt};$$

und wenn wir aus 5) für t seinen Werth setzen und gehörig reduciren, so ergiebt sich die Gleichung der Kugelbahn:

$$11)\quad y=\frac{k+a\sin\alpha}{a\cos\alpha}x-\frac{k^2}{g}\text{ log. nat. }\frac{ak\cos\alpha}{ak\cos\alpha-gx},$$

oder noch einfacher:

$$12)\quad y = \frac{k + a\sin\alpha}{a\cos\alpha}\, x + \frac{k^2}{g} \text{ log. nat. } \left(1 - \frac{gx}{ak\cos\alpha}\right).$$

Es ist also die Bahn eine ebene Curve, deren Gleichung in der einfachen Gestalt

$$y = px + q \text{ log. nat. } (1 - rx)$$

erscheint, wenn man die constanten Factoren der Reihe nach mit p, q, r bezeichnet.

§. 2.

Eine nähere Untersuchung der obigen Formeln lehrt nun Folgendes. Die Gleichung (12) reducirt sich für $k = \infty$, also wenn die Bewegung im leeren Raume erfolgt, auf

$$y = \text{tang}\,\alpha \,.\, x - \frac{Gx^2}{2a^2 \cos^2\alpha},$$

das ist die Gleichung der Parabel, welche eine mit der anfänglichen Geschwindigkeit a unter dem Elevationswinkel α fortgeschleuderte Kugel im leeren Raume beschreiben würde.

Für die vertikale Geschwindigkeit erhält man den Werth

$$\frac{dy}{dt} = a\sin\alpha - g\frac{k + a\sin\alpha}{ak\cos\alpha}\, x,$$

wenn man die Formeln (4), (11), (5) in §. 1. combinirt. Dieser Werth wird Null, wenn

$$1)\quad x_1 = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{2g\left(1 + \frac{a\sin\alpha}{k}\right)}$$

ist, und dieser Werth verwandelt sich, wenn $k = \infty$, $g = G$ wird, d. h. wenn der Körper sich im leeren Raume bewegt, in die bekannte Formel

$$x = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{2\,G}.$$

Die Ordinate des höchsten Punktes der Kugelbahn findet man, wenn man den Werth (1) in die Gleichung (12) des §. 1. substituirt, nämlich

$$2)\quad y_1 = \frac{k^2}{g}\left(\frac{a\sin\alpha}{k} - \text{log. nat. } \left(1 + \frac{a\sin\alpha}{k}\right)\right).$$

Dieser Werth geht für $k = \infty$ über in

$$y_1 = \frac{a^2 \sin^2\alpha}{2\,G}.$$

Die vertikale Geschwindigkeit erhält von diesem Punkte an einen negativen Werth und wird immer grösser, während die Ordinate abnimmt, so dass die Kugel sich der durch A gelegten horizontalen Ebene wiederum nähert. Sie erreicht dieselbe, wenn $y=0$ wird; die Abscisse dieses Punktes oder die Wurfweite muss durch Auflösung der transscendenten Gleichung

$$3)\quad \frac{k+a\sin\alpha}{a\cos\alpha}\,x+\frac{k^2}{g}\,\text{log. nat.}\,\left(1-\frac{gx}{ak\cos\alpha}\right)=0$$

gefunden werden.

Nun hat aber die Auflösung einer transscendenten Gleichung von der Form

$$px+q\,\text{log. nat.}\,(1-rx)=0$$

keine bedeutenden Schwierigkeiten; es ist also die Wurfweite als bekannt anzusehen für jeden Elevationswinkel α und für jede Anfangsgeschwindigkeit a, sobald der Coefficient k bekannt ist. Dieser Coefficient kann aber gefunden werden, wenn man bei unveränderter Anfangsgeschwindigkeit unter verschiedenen Elevationswinkeln die Wurfweiten beobachtet hat.

Ferner lehrt die Gleichung (3) in §. 1., dass die horizontale Geschwindigkeit abnimmt und für die Abscisse

$$x_2=\frac{ak\cos\alpha}{g}$$

verschwindet. Setzen wir $x>x_2$, so finden wir nach (5) in §. 1. für t einen imaginären Werth, während $t=\infty$ wird für $x=x_2$; zugleich erkennen wir aus Gleichung (6), dass mit wachsendem t die Abscisse x sich dem Werthe x_2 in der Weise nähert, dass der Unterschied

$$x_2-x=\frac{ak\cos\alpha}{ge^{\frac{gt}{k}}}$$

kleiner wird, als jede beliebig kleine Grösse, indem $e^{\frac{gt}{k}}$ unendlich gross wird.

Folglich ist die mit der Ordinatenachse parallele gerade Linie

$$x=\frac{ak\cos\alpha}{g}$$

eine Asymptote für den auf der positiven Seite der Abscissen abwärts gehenden Zweig der Curve. Die Bewegung nähert sich also immer mehr einer geradlinigen vertikalen Bewegung; und da der Ausdruck der vertikalen Geschwindigkeit (Gl. (10) in §. 1.) sich dem Werthe $-k$ unbegränzt nähert, wenn man t zur Gränze ∞ wachsen lässt: so wird die Bewegung immer mehr gleichförmig. Von dem Augenblicke an, wo $\frac{dy}{dt}$

$=0$ war, nimmt die vertikale Geschwindigkeit in der Richtung von oben nach unten fortwährend zu, ohne den Werth $-k$ in endlicher Zeit zu erreichen oder jemals überschreiten zu können. Wir schliessen daraus, dass k die grösste Geschwindigkeit ist, welche die Kugel in dem widerstehenden Mittel erlangen kann, wenn sie ohne anfängliche Geschwindigkeit unter dem Einflusse der Schwere sich senkrecht abwärts bewegt.

Eine weitere Untersuchung der Gleichung unserer ballistischen Curve zeigt uns, dass der auf der negativen Seite der Abscissen liegende Zweig keine Asymptote hat.

Zuvörderst nämlich ist keine vertikale Linie Asymptote, weil y für einen beliebig grossen negativen Werth von x niemals imaginär wird. Verbindet man aber die Gleichung der geraden Linie

$$y=px$$

mit der Gleichung der Curve (vergl. (12) in §. 1.), so erhält man für $x=-\infty$ nach gehöriger Beseitigung der in $0\times\infty$ liegenden Unbestimmtheit

$$p=\frac{k+a\sin\alpha}{a\cos\alpha}.$$

Wenn also der auf der Seite der negativen Abscissen liegende Theil der Curve eine geradlinige Asymptote hat, so muss dieselbe der geraden Linie $y=\frac{k+a\sin\alpha}{a\cos\alpha}x$ parallel sein. Setzen wir aber

$$y=\frac{k+a\sin\alpha}{a\cos\alpha}x+q$$

in die Gleichung der Curve, so finden wir für $x=-\infty$ auch $q=\infty$, d. h. es ist keine Asymptote vorhanden.

§. 3.

Da unsere Annahme sich von dem wahren aber unbekannten Gesetze des Widerstandes noch weiter entfernt, als die gewöhnliche Voraussetzung: so können wir nicht erwarten, dass die gewonnenen Formeln die Resultate der Beobachtung darstellen und uns z. B. die wirklich beobachtete Wurfweite eines Geschützes bei dem Elevationswinkel α geben werden, wenn wir für a die wahre Anfangsgeschwindigkeit der Kugel, für k die wirkliche grösste Geschwindigkeit einsetzen wollten, welche diese Kugel beim Falle in der Luft erreichen kann. Es bleibt also nur übrig, zu untersuchen, ob die gewonnenen Formeln nicht zur angenäherten Berechnung der Wurfweiten für beliebige Elevationswinkel eines Geschützes dienen können, wenn man bei demselben Geschütze mit unveränderter Ladung durch Versuche die Wurfweiten x', x'' und die Flugzeiten t', t'' für die Elevationswinkel α', α'' gefunden hat.

Man kann ausgehen von den Gleichungen

$$x' = \frac{ak \cos\alpha'}{g}(1 - e^{-\frac{gt'}{k}}),$$

$$x'' = \frac{ak \cos\alpha''}{g}(1 - e^{-\frac{gt''}{k}}),$$

welche nach (6) in §. 1. gebildet sind. Hieraus ergiebt sich die Proportion

$$x' : x'' = \cos\alpha' (1 - e^{-\frac{gt'}{k}}) : \cos\alpha'' (1 - e^{-\frac{gt''}{k}}),$$

und daraus die Gleichung

$$1)\ e^{-\frac{gt'}{k}} - \frac{x' \cos\alpha''}{x'' \cos\alpha'} e^{-\frac{gt''}{k}} + \frac{x' \cos\alpha''}{x'' \cos\alpha'} - 1 = 0,$$

in welcher a nicht mehr vorkommt. Es sei $\frac{x' \cos\alpha''}{x'' \cos\alpha'} = b,\ e^{-\frac{g}{k}} = z.$ Dann hat man, um k zu bestimmen, die Gleichung

$$2)\ z^{t'} - bz^{t''} + b - 1 = 0$$

aufzulösen. Es wird hierbei immer genügen, für t' und t'' die ihnen zunächst liegenden ganzen Zahlen zu setzen, und dann Fourier's Näherungsmethode anzuwenden. Da $z = e^{-\frac{g}{k}}$ ist, und k nicht unendlich gross angenommen werden kann, so ist z immer ein positiver ächter Bruch.

Nachdem k gefunden ist, erhält man a durch eine der Formeln, von denen wir in diesem Paragraphen ausgegangen sind.

In la Fere hat man 1770 mit einem zwölfzölligen Mörser, dessen Bombe 142 Pfund wog, als Mittel aus je 4 Würfen folgende Werthe erhalten:

$\alpha' = 50^\circ$, $x' = 2982$ Pariser Fuss, $t' = 16$ Secunden,
$\alpha'' = 10^\circ$, $x'' = 1434$ „ „ $t'' = 4$ „

Unsere Gleichung wird für diese Werthe

$$z^{16} - 3{,}186\, z^4 + 2{,}186 = 0,$$

deren Wurzel ich $= 0{,}96013$ finde. Setzt man nun $g = 30{,}196$ Pariser Fuss, so wird

$$k = 742{,}24.$$

Darauf erhält man für α' die Anfangsgeschwindigkeit $a = 394{,}46$ und für α'' eben so $a = 394{,}47$.

Die wahren Anfangsgeschwindigkeiten sind wahrscheinlich viel grösser gewesen; diese sollen aber jetzt gar nicht ermittelt wer-

den. Nun ist nicht zu erwarten, dass die gefundenen Werthe von a und k die Gleichung der Kugelbahn befriedigen werden, wenn man in derselben $y=0$ und $x=\left.\begin{matrix}x'\\x''\end{matrix}\right\}$, $\alpha=\left.\begin{matrix}\alpha'\\\alpha''\end{matrix}\right\}$ setzt. Sie würden das nicht einmal thun, wenn die Theorie richtig wäre, weil sie aus Gleichungen bestimmt sind, in denen sie von der beobachteten Flugzeit abhängig sind. Sollen aber a und k so bestimmt werden, dass sie die Gleichungen

$$\frac{k+a\sin\alpha'}{a\cos\alpha'}x'+\frac{k^2}{g}\log.\text{nat.}\left(1-\frac{gx'}{ak\cos\alpha'}\right)=0,$$

$$\frac{k+a\sin\alpha''}{a\cos\alpha''}x''+\frac{k^2}{g}\log.\text{nat.}\left(1-\frac{gx''}{ak\cos\alpha''}\right)=0$$

befriedigen, von denen wir die erste mit $u'=0$, die zweite mit $u''=0$ bezeichnen wollen: so kann man die vorhin gefundenen Werthe als angenäherte betrachten, und durch Auflösung der Gleichungen

$$u'+\frac{du'}{da}\varDelta a+\frac{du'}{dk}\varDelta k=0,$$

$$u''+\frac{du''}{da}\varDelta a+\frac{du''}{dk}\varDelta k=0$$

$\varDelta a$, $\varDelta k$ bestimmen, so dass $a+\varDelta a$, $k+\varDelta k$ den wahren Werthen von a und k näher kommen. Man kann auch k als genau ansehen und a so bestimmen, dass $u'^2+u''^2$ möglichst klein werde; ja es wird sogar genügen können, k als genau bestimmt anzusehen, und a so zu bestimmen, dass entweder $u'=0$ oder $u''=0$ wird.

Wenn $u''=0$ werden soll, so wird auch $\frac{g}{k^2}u''=0$; sieht man also $\frac{g}{k^2}u''$ als Function von a an, und bezeichnet man dieselbe durch $f(a)$, so hat man

$$f(a)=\frac{gx''}{ak\cos\alpha''}+\frac{gx''\,\text{tang}\,\alpha''}{k^2}+\log.\text{nat.}\left(1-\frac{gx''}{ak\cos\alpha''}\right),$$

und die Gleichung $f(a)=0$ ist aufzulösen.

Man setze $\frac{gx''}{k\cos\alpha}=p$, $\frac{gx''\,\text{tang}\,\alpha''}{k^2}=q$, und bilde zugleich die Differentialquotienten von $f(a)$: dann ist

$$f(a)=\frac{p}{a}+q+\log.\text{nat.}\left(1-\frac{p}{a}\right),$$

$$f'(a)=\frac{p^2}{a^3\left(1-\frac{p}{a}\right)},$$

$$f''(a)=-\frac{p^2\left(3-\frac{2p}{a}\right)}{a^4\left(1-\frac{p}{a}\right)^2}$$

In dem Ausdrucke von $f(a)$ erhält log nat. $(1-\frac{p}{a})$ einen imaginären Werth, wenn $\frac{p}{a}>1$ gesetzt wird; man weiss also, dass $a>p$ sein muss. Dann behält aber $f''(a)$ für alle Werthe, die man für a setzen darf, immer dasselbe Vorzeichen, kann folglich bei der Auflösung der transscendenten Gleichung $f(a)=0$ als bestimmende Function angesehen werden. Die von Stern in Crelle's Journal Band XXII. mitgetheilte Methode, transscendente Gleichungen aufzulösen, ist bei unserer Gleichung äusserst einfach. Da für $a=p$ die beiden ersten Glieder in $f(a)$ den Werth $1+q$ annehmen, während log. $(1-\frac{p}{a})=-\infty$ wird, so ist für Werthe von a, die nur wenig grösser sind als p, der letzte Theil überwiegend und $f(a)$ negativ; für einen Werth dagegen, welcher grösser ist als die Wurzel a von $f(a)=0$, wird $f(a)$ positiv, während $f'(a)$, $f''(a)$ ihre Vorzeichen nicht ändern. Ist also $p<\alpha<\beta$, und zugleich $\alpha<a<\beta$, so sind die Zeichenreihen

	$f''(a)$	$f'(a)$	$f(a)$
α	$-$	$+$	$-$
β	$-$	$+$	$+$

Die obere Gränze α ist dann wegen der gleichen Vorzeichen von $f(\alpha)$ und $f''(\alpha)$ zugleich die äussere, und man findet die neuen Gränzen α', β' durch die Formeln

$$\alpha'=\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)},\ \beta'=\beta-\frac{f(\beta)}{f'(\alpha)},$$

und hieraus

$$\alpha''=\alpha'-\frac{f(\alpha')}{f'(\alpha')},\ \beta''=\beta'-\frac{f(\beta')}{f'(\alpha')}.$$

Hierbei ist immer

$$\alpha<\alpha'<\alpha''\ldots\ldots<a<\ldots\ldots\beta''<\beta'<\beta,$$

so dass man der Wurzel immer näher kommt.

In dem gewählten Beispiele setzen wir $k=742$, während $\alpha''=10^\circ$, $x''=1334$ Fuss ist. Man findet dann sehr schnell

$$f(376{,}25)=-0{,}00001,\ f(376{,}27)=+0{,}00001.$$

Da nun der Werth $a=376{,}27$ die Gleichung $f(a)=0$ auch befriedigt, wenn man α', x' statt α'', x'' substituirt, so ist hinreichend genau, um die beiden Versuche darzustellen:

$$k=742,\ a=376{,}27.$$

§. 4.

Soll nun die Wurfweite x berechnet werden, welche man mit demselben Geschütze und derselben Ladung bei dem Elevationswinkel α erhalten würde, so hat man in der Gleichung (3) in §. 2.

$$\frac{k+a\sin\alpha}{a\cos\alpha}\,x+\frac{k^2}{g}\log.\,\text{nat.}\,(1-\frac{gx}{ak\cos\alpha})=0$$

für k und a die eben gefundenen Werthe einzusetzen und dieselbe nach x aufzulösen. Multiplicirt man den Ausdruck mit $\frac{g}{k^2}$, und setzt man

$$\frac{g'}{ak\cos\alpha}=m,\ \frac{g\,\text{tang}\,\alpha}{k^2}=m',$$

so erhält man

$$(m+m')\,x+\log.\,\text{nat.}\,(1-mx)=0.$$

Nimmt man ferner $z=1-mx$ und bezeichnet man den Werth $1+\frac{m'}{m}$, das ist $1+\frac{a\sin\alpha}{k}$ mit n, so hat man die Gleichung

$$n\,(1-z)+\log.\,\text{nat.}\,z=0$$

aufzulösen, und findet dann die Wurfweite

$$x=\frac{1-z}{m}.$$

Man wird also nach folgenden Formeln zu rechnen haben:

$$m=\frac{g}{ak\cos\alpha},\ n=1+\frac{a\sin\alpha}{k},$$

$$\varphi(z)=n\,(1-z)+\log.\,\text{nat.}\,z,$$

$$\varphi'(z)=\frac{1}{z}-n,\ \varphi''(z)=-\frac{1}{z^2}.$$

Die Auflösung der Gleichung $\varphi(z)=0$ hat gar keine Schwierigkeit und wird noch dadurch erleichtert, dass z nur ein positiver ächter Bruch sein kann, indem $z=1-mx$ ist und $\log.\,(1-mx)$ nicht imaginär werden darf.

Wenn man für diejenigen Winkel die Rechnung ausführt, für welche in la Fere im Jahre 1770 Versuche angestellt sind *), so erhält man folgende Resultate:

Elevation in Graden.	Wurfweite in Par. Fuss		Differenz. Rechn. — Beob.
	berechnet	beobachtet	
10	1434	1434	0
20	2433	2488	— 51
30	3004	2994	+ 10
40	3170	3408	— 238
43	3149	3144	+ 5
45	3117	3090	+ 27
50	2982	2982	0

*) Gehler, Phys. Wörterb. I., p. 758.

Die Wurfweiten für 10° und 50° sind oben benutzt, um die Constanten a und k zu bestimmen. Für die Winkel über 50° werden die Differenzen der Rechnung und Beobachtung bedeutender, nämlich — 182, — 194, — 242 für die Elevationswinkel 60°, 70°, 75°.

Es scheint hiernach möglich, auf dem angezeigten Wege die Wurfweiten, welche den zwischen α_1 und α_2 liegenden Elevationswinkeln zugehören, mit hinreichender Sicherheit zu berechnen, wenn die zu den Winkeln α_1, α_2 gehörenden Wurfweiten durch Versuche gefunden sind und die Differenz $\alpha_1 - \alpha_2$ nicht zu gross ist.

§. 5.

Sollen endlich die Gesetze der Bewegung für den Fall ermittelt werden, dass die Widerstand leistende Flüssigkeit selbst in Bewegung ist, so gehen wir von der Annahme aus, dass unsere Kugel, wenn sie unter dem Einflusse einer gleichförmigen Strömung von der Geschwindigkeit V festgehalten wird, denselben Widerstand leiste, den sie selbst erfahren würde, wenn sie in der ruhenden Flüssigkeit sich mit der Geschwindigkeit V bewegte. Dann ist die durch die Wirkung dieser Strömung entstehende beschleunigende Kraft gleich $g\frac{V}{k}$.

Die Kugel habe in einem Punkte A die Geschwindigkeit C und gelange nach Verlauf der Zeit t zu einem Punkte B. Durch A lege man die drei auf einander senkrechten Coordinatenebenen XAY, XAZ, YAZ, von denen die erstere horizontal sei. Die Abstände des Punktes B von diesen Ebenen seien der Reihe nach z, y, x; der Bogen der beschriebenen Curve zwischen A und B sei s und die Tangente in B habe die Richtung BD. In der Richtung BD würde der Körper sich mit der Geschwindigkeit v weiter bewegen, wenn in dem durch t bezeichneten Augenblicke alle Kräfte zu wirken aufhörten und der Körper nur nach dem Gesetze der Trägheit weiter ginge.

Nun sei während der Zeit t der Körper einem Winde ausgesetzt, dessen Geschwindigkeit V ist und dessen Richtung die Linie BE angiebt. Man ziehe durch B die Linien BX', BY', BZ' parallel mit den Achsen AX, AY, AZ, und bezeichne die Winkel DBX', DBY', DBZ' der Reihe nach mit α_1, β_1, γ_1, sowie die Winkel EBX', EBY', EBZ' durch α_2, β_2, γ_2. Dann sind die Gesetze der Bewegung herzuleiten aus den Gleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{g}{k}\,(V\cos\alpha_2 - v\cos\alpha_1),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{g}{k}\,(V\cos\beta_2 - v\cos\beta_1),$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{g}{k}\,(V\cos\gamma_2 - v\cos\gamma_1) - g$$

Nun ist aber bekanntlich $\frac{ds}{dt}=v$, $\frac{dx}{ds}=\cos\alpha_1$, $\frac{dy}{ds}=\cos\beta_1$, $\frac{dz}{ds}=\cos\gamma_1$; wir erhalten also, wenn wir zugleich $\gamma_2=90^0$ setzen, uns also auf den Fall beschränken, dass der Wind horizontal weht:

$$1)\ \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{g}{k}\left(V\cos\alpha_2-\frac{dx}{dt}\right),$$

$$2)\ \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{g}{k}\left(V\cos\beta_2-\frac{dy}{dt}\right),$$

$$3)\ \frac{d^2z}{dt^2}=-\frac{g}{k}\frac{dz}{dt}-g.$$

Die Constanten der Integration bestimmen wir so, dass zu gleicher Zeit t, x, y, z Null werden, während $\frac{dx}{dt}=C\cos\alpha=a$, $\frac{dy}{dt}=C\cos\beta=b$, $\frac{dz}{dt}=C\cos\gamma=c$ sein soll. Der Kürze wegen setzen wir $V\cos\alpha_2=a'$, $V\cos\beta_2=b'$. Wir erhalten dann durch Integration der Gleichungen (1), (2), (3) folgende Formeln:

$$4)\ t=\frac{k}{g}\log\frac{a'-a}{a'-\frac{dx}{dt}},$$

$$5)\ t=\frac{k}{g}\log\frac{b'-b}{b'-\frac{dy}{dt}},$$

$$6)\ t=\frac{k}{g}\log\frac{k+c}{k+\frac{dz}{dt}};$$

welche mit Leichtigkeit in folgende umgewandelt werden:

$$7)\ \frac{dx}{dt}=a'-(a'-a)\,e^{-\frac{gt}{k}},$$

$$8)\ \frac{dy}{dt}=b'-(b'-b)\,e^{-\frac{gt}{k}},$$

$$9)\ \frac{dz}{dt}=(k+c)\,e^{-\frac{gt}{k}}-k.$$

Durch neue Integration leiten wir hieraus her:

$$10)\ x=a't-\frac{g}{k}(a'-a)\left\{1-e^{-\frac{gt}{k}}\right\},$$

$$11)\ y=b't-\frac{k}{g}(b'-b)\left\{1-e^{-\frac{gt}{k}}\right\},$$

$$12)\ z = \frac{k}{g}(k+c)\{1 - e^{-\frac{gt}{k}}\} - kt.$$

Durch Gleichsetzung der Werthe von t aus den Formeln (4) und (6) erhält man

$$\frac{a'-a}{a'-\frac{dx}{dt}} = \frac{k+c}{k+\frac{dz}{dt}}$$

woraus sich ergiebt

$$(a'-a)\frac{dz}{dt} + (k+c)\frac{dx}{dt} - (ak' + a'c) = 0.$$

Hieraus ergiebt sich durch Integration:

$$13)\ (a'-a)z + (k+c)x - (ak+a'c)t = 0.$$

Eben so erhalten wir aus (5) und (6)

$$14)\ (b'-b)z + (k+c)y - (bk+b'c)t = 0,$$

und aus (4) und (5)

$$15)\ (a'-a)y - (b'-b)x - (ba'-ab')t = 0.$$

Jetzt sind wir so weit vorgeschritten, dass wir die Gleichungen der Projectionen unserer Kugelbahn erhalten können. Wenn wir nämlich aus den Gleichungen (13), (14), (15) die drei Werthe von t nehmen und den ersten substituiren in (10) oder (12), den zweiten in (11) oder (12), den dritten in (10) oder (11): so erhalten wir die Gleichungen der drei Projectionen auf die Cordinaten-Ebenen, nämlich:

$$16)\ a'z + kx = \frac{k(ak+a'c)}{g}\{1 - e^{-\frac{g}{k}\cdot\frac{(a'-a)z+(k+c)x}{ak+a'c}}\},$$

$$17)\ b'z + ky = \frac{k(bk+b'c)}{g}\{1 - e^{-\frac{g}{k}\cdot\frac{(b'-b)z+(k+c)y}{bk+b'c}}\},$$

$$18)\ a'y - b'x = \frac{k(ba'-ab')}{g}\{1 - e^{-\frac{g}{k}\cdot\frac{(a'-a)y-(b'-b)x}{ba'-ab'}}\}.$$

Bringen wir die Exponentialfunction in jeder dieser Gleichungen auf eine Seite allein und gehen wir dann zu den natürlichen Logarithmen über, so erhalten wir die Gleichungen der Projectionen unter folgender Form:

$$19)\ z = \frac{k+c}{a-a'}x - \frac{k(ak+a'c)}{g(a-a')}\ \text{log. nat.}\ \frac{ak+a'c}{ak+a'c-\frac{ga'}{k}z-gx},$$

$$20)\ z = \frac{k+c}{b-b'}y - \frac{k(bk+b'c)}{g(b-b')}\ \text{log. nat.}\ \frac{bk+b'c}{bk+b'c-\frac{gb'}{k}z-gy},$$

$$21)\ y=\frac{b-b'}{a-a'}x-\frac{k(ba'-ab')}{g(a-a')}\log.\text{nat.}\frac{ba'+ab'}{ba'-ab'-\frac{ga'}{k}y+\frac{gb'}{k}x}.$$

Aus den gewonnenen Formeln ergeben sich die Eigenthümlichkeiten dieser Bewegung ohne grosse Schwierigkeit. Es ist ferner leicht, die Gleichung der ebenen Curve herzuleiten, welche beschrieben wird, wenn die Richtung des Windes und die Richtung der Geschwindigkeit im Punkte A in eine vertikale Ebene fallen. Endlich gelangt man zu der Gleichung (12) in §. 1. zurück, wenn man die Geschwindigkeit des Windes Null setzt.

LII.

Nachtrag zu dem Aufsatze über den Vortrag der Lehre von der Auflösung der Gleichungen des dritten Grades.

(Thl. VI. Nr. I. S. 1.)

Von

dem Herausgeber.

In dem vorher genannten Aufsatze habe ich ganz absichtlich mein Augenmerk vorzugsweise auf die reellen Wurzeln der cubischen Gleichungen gerichtet. Weil jedoch dieser Aufsatz nach einigen mir zugekommenen freundschaftlichen Mittheilungen nicht ganz ohne Beachtung geblieben und hin und wieder bei'm Unterrichte benutzt worden ist, so erlaube ich mir meinen früheren Entwickelungen jetzt noch die folgenden wenigen Bemerkungen über die imaginären Wurzeln hinzuzufügen.

Die imaginären Wurzeln erhält man, wenn man von der Voraussetzung ausgeht, dass in den früher gebrauchten Bezeichnungen nicht $q+q_1=0$ sei. Dann hat man zur Bestimmung der Grössen p, q, p_1, q_1 nach S. 2. bloss die vier folgenden Gleichungen:

$$1)\quad \begin{cases} pp_1 - qq_1 = \frac{1}{3}a,\ pq_1 + qp_1 = 0; \\ p^3 + p_1{}^3 - 3pq^2 - 3p_1q_1{}^2 = b, \\ q^3 + q_1{}^3 - 3p^2q - 3p_1{}^2q_1 = 0. \end{cases}$$

Aus der zweiten dieser vier Gleichungen folgt

$$2)\quad qp_1 = -pq_1.$$

Multiplicirt man die erste der vier in Rede stehenden Gleichungen mit q, so erhält man

$$pqp_1 - q^2q_1 = \frac{1}{3}aq,$$

also wegen der Gleichung 2):

$$3)\quad (p^2 + q^2)q_1 = -\frac{1}{3}aq.$$

Multiplicirt man die dritte der Gleichungen 1) mit q^3, so erhält man

$$p^3q^3 + q^3p_1{}^3 - 3pq^5 - 3q^3p_1q_1{}^2 = bq^3,$$

und folglich, weil wegen der Gleichung 2)

$$q^3p_1{}^3 = -p^3q_1{}^3,\ q^3p_1q_1{}^2 = -pq^2q_1{}^3$$

ist:

$$4)\quad p(p^2 - 3q^2)(q^3 - q_1{}^3) = bq^3.$$

Multiplicirt man die vierte der Gleichungen 1) mit q^2, so erhält man

$$q^2(q^3 + q_1{}^3) - 3p^2q^3 - 3q^2p_1{}^2q_1 = 0,$$

und folglich, weil wegen der Gleichung 2)

$$q^2p_1{}^2 = p^2q_1{}^2$$

ist:

$$5)\quad (q^2 - 3p^2)\ (q^3 + q_1\ ) = 0.$$

Weil aber nach der Voraussetzung nicht $q + q_1 = 0$, d. i nicht $q = -q_1$ ist, so ist auch nicht $q^3 = -q_1{}^3$, d. i. nicht $q^3 + q_1{}^3 = 0$, und wegen der Gleichung 5) ist folglich

$$6)\quad q^2-3p^2=0$$

Daher haben wir zwischen den drei Grössen p, q, q_1 jetzt die drei folgenden Gleichungen:

$$7)\quad \left\{\begin{array}{c} (p^2+q^2)q_1=-\frac{1}{3}aq, \\ p(p^2-3q^2)(q^3-q_1{}^3)=bq^3, \\ q^2-3p^2=0. \end{array}\right.$$

Aus der dritten Gleichung in diesem Systeme folgt

$$q^2=3p^2,$$

also

$$p^2+q^2=4p^2,\ p^2-3q^2=-8p^2;$$

und nach den zwei ersten der Gleichungen 7) haben wir daher die beiden folgenden Gleichungen:

$$8)\ 4p^2q_1=-\frac{1}{3}aq,\ 8p^3(q^3-q_1{}^3)=-bq^3;$$

oder

$$9)\quad a^3q^3=-1728p^6q_1{}^3,\ (b+8p^3)q^3=8p^3q_1{}^3.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die beiden folgenden:

$$a^3q^3=-1728p^6q_1{}^3,\ 216(b+8p^3)p^3q^3=1728p^6q_1{}^3;$$

also durch Addition:

$$10)\ \{a^3+216(b+8p^3)p^3\}q^3=0.$$

Ist nun nicht $q=0$, so ist

$$11)\ a^3+216(b+8p^3)p^3=0,$$

d. i.

$$12)\ p^6+\frac{1}{8}bp^3=-\frac{1}{1728}a^3.$$

Löst man diese Gleichung wie eine quadratische auf, so erhält man

$$13)\ p^3=-\tfrac{1}{16}\{b\mp\sqrt{b^2-\tfrac{4}{27}a^3}\},$$

also

$$14)\quad p = -\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b \mp \sqrt{b^2 - \frac{4}{27}a^3}}{2}}.$$

Nach der dritten der Gleichungen 7) ist

$$15)\quad q^2 = \tfrac{3}{4}\left(\sqrt[3]{\frac{b \mp \sqrt{b^2 - \frac{4}{27}a^3}}{2}}\right)^2,$$

und weil nun nach dem Obigen

$$p_1 = -\frac{pq_1}{q} = \frac{ap}{3(p^2+q^2)} = \frac{a}{12p},$$

$$q_1 = -\frac{aq}{12p^2} = -\frac{a}{4q}$$

ist; so hat man die folgenden Auflösungen:

$$p = -\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b - \sqrt{b^2 - \frac{4}{27}a^3}}{2}},\quad q = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\frac{b - \sqrt{b^2 - \frac{4}{27}a^3}}{2}};$$

$$p_1 = -\frac{a}{6\sqrt[3]{\frac{b - \sqrt{b^2 - \frac{4}{27}a^3}}{2}}},\quad q_1 = \mp\frac{a}{2\sqrt{3}.\sqrt[3]{\frac{b - \sqrt{b^2 - \frac{4}{27}a^3}}{2}}}$$

und

$$p = -\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b + \sqrt{b^2 - \frac{4}{27}a^3}}{2}},\quad q = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\frac{b + \sqrt{b^2 - \frac{4}{27}a^3}}{2}};$$

$$p_1 = -\frac{a}{6\sqrt[3]{\frac{b + \sqrt{b^2 - \frac{4}{27}a^3}}{2}}},\quad q_1 = \mp\frac{a}{2\sqrt{3}.\sqrt[3]{\frac{b + \sqrt{b^2 - \frac{4}{27}a^3}}{2}}}.$$

Weil nun bekanntlich

$$x = p + p_1 + (q + q_1)\sqrt{-1}$$

ist, so ist

$$16)\quad x = -\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b-\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}} - \frac{a}{6\sqrt[3]{\frac{b-\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}}$$

$$\pm\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\frac{b-\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}} - \frac{a}{2\sqrt{3}.\sqrt[3]{\frac{b-\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}}\right\}\sqrt{-1}$$

und

$$17)\quad x = -\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b+\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}} - \frac{a}{6\sqrt[3]{\frac{b+\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}}$$

$$\pm\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\frac{b+\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}} - \frac{a}{2\sqrt{3}.\sqrt[3]{\frac{b+\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}}\right\}\sqrt{-1}.$$

Durch leichte Rechnung überzeugt man sich, dass

$$\sqrt[3]{\frac{b-\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}.\sqrt[3]{\frac{b+\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}} = \tfrac{1}{3}a$$

ist, woraus man ferner ohne alle Schwierigkeit schliesst, dass die beiden letzten Werthe von x von den beiden ersten nicht verschieden sind, und man also, wie es erforderlich ist, für x nur zwei Werthe erhält.

Auch ergiebt sich leicht, dass man diese Werthe von x auf folgende Art ausdrücken kann:

$$18)\quad x = -\tfrac{1}{2}\left\{\sqrt[3]{\frac{b-\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{b+\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}\right\}$$

$$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\sqrt[3]{\frac{b-\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{b+\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}\right\}\sqrt{-1}$$

oder

$$19)\quad x=-\frac{a}{6}\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{b+\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}}+\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{b-\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}}\right\}$$

$$\pm\frac{a}{2\sqrt{3}}\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{b+\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}}-\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{b-\sqrt{b^2-\frac{4}{27}a^3}}{2}}}\right\}\sqrt{-1}.$$

Wenn $q=0$ ist, so ist wegen der dritten der Gleichungen 7) auch $p=0$, und wegen der ersten der Gleichungen 1) also $a=0$. Die dritte und vierte der Gleichungen 1) werden in diesem Falle

$$p_1(p_1^2-3q_1^2)=b,\ q_1(q_1^2-3p_1^2)=0.$$

Weil nun aber nach der Voraussetzung nicht $q+q_1=0$ ist, so ist nicht $q_1=0$, und folglich

$$q_1^2-3p_1^2=0,\ q_1^2=3p_1^2.$$

Führt man diesen Werth von q_1^2 in die erste der beiden vorhergehenden Gleichungen ein, so erhält man

$$p_1^3=-\tfrac{1}{8}b,\ \text{also}\ p_1=-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{b},$$

und folglich

$$q_1=\pm p_1\sqrt{3}=\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{b}.$$

Also ist in diesem Falle

$$20)\quad x=-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{b}\,.\,(1\pm\sqrt{3}\,.\sqrt{-1})$$

oder

$$21)\quad x=-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{b}\,.(1\pm\sqrt{-3}).$$

Ganz denselben Ausdruck von x erhält man z. B. aus 18), wenn man $a=0$ setzt, und sieht also, dass die Gleichung 18), so wie eben so jede der Gleichungen 16), 17), 19), ganz allgemein gültig ist, d. h. für jedes reelle a, auch für $a=0$, gilt.

Dass sich die vorhergehenden Ausdrücke auch aus der Gleichung 6) in meinem früheren Aufsatze herleiten lassen müssen, versteht sich von selbst, was aber füglich dem Leser überlassen werden kann. Meine Absicht im Vorhergehenden war nur, die in dem früheren Aufsatze bei der Bestimmung der reellen Wurzeln angewandte Methode noch etwas weiter zu verfolgen, aus welchem Gesichtspunkte man allein das Vorhergehende zu betrachten hat.

LIII.

Ueber bestimmte Integrale.

Von

Herrn F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

I.

Durch gewöhnliche Division erhält man die identische Gleichung

$$\frac{x^a}{1+x} = (-1)^n \sum_{n=0}^{n=n} x^{a+n} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{a+n+1}}{1+x}.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten durch dx, und integrirt von $x=0$ bis $x=1$, so entsteht

$$\int_0^1 \frac{x^a dx}{1+x} = (-1)^n \sum_{n=0}^{n=n} \frac{1}{a+1+n} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{a+n+1}\,dx}{1+x}.$$

Differenziirt man nun diese Gleichung nach a, die resultirende Gleichung wieder nach a u. s. f., so erhält man nach und nach

$$\int_0^1 \frac{x^a lx dx}{1+x}$$

$$= -(-1)^n . \sum_{n=0}^{n=n} \frac{1}{(a+1+n)^2} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{a+n+1}\, lx dx}{1+x},$$

$$\int_0^1 \frac{x^a (lx)^2 dx}{1+x}$$

$$= (-1)^n . 2 \sum_{n=0}^{n=n} \frac{1}{(a+1+n)^3} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{a+n+1}\,(lx)^2 dx}{1+x},$$

$$\int_0^1 \frac{x^a (lx)^3 dx}{1+x}$$

$$= -(-1)^n . 2.3 \sum_{n=0}^{n=n} \frac{1}{(a+1+n)^4} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{a+n+1} (lx)^3 dx}{1+x},$$

u. s. w., also allgemein

$$\int_0^1 \frac{x^a (lx)^{p-1}\,dx}{1+x}$$

$$=(-1)^{p-1}.2.3\ldots(p-1).(-1)^n \sum_{n=0}^{n=n} \frac{1}{(a+1+n)^p}$$

$$+(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{a+n+1}(lx)^{p-1}\,dx}{1+x},$$

oder

$$\frac{(-1)^{p-1}}{2.3\ldots(p-1)}\int_0^1 \frac{x^a(lx)^{p-1}\,dx}{1+x}$$

$$=(-1)^n \sum_{n=0}^{n=n} \frac{1}{(a+1+n)^p}+(-1)^{n+p}\int_0^1 \frac{x^{a+n+1}(lx)^{p-1}\,dx}{1+x}.$$

Untersuchen wir nun zunächst die Grenze, welcher sich das auf der Rechten angehängte Integral nähert, wenn n ins Unendliche zunimmt. Zu dem Ende wende man auf dasselbe den bekannten Satz an $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=(\beta-\alpha)f\{\alpha+\vartheta(\beta-\alpha)\}$, wo ϑ zwischen 0 und 1 liegt. In Bezug auf unsern Fall ist dann $\int_0^1 \frac{x^{a+n+1}(lx)^{p-1}\,dx}{1+x}=\frac{\vartheta^{a+n+1}(l\vartheta)^{p-1}}{1+\vartheta}$, und dieser Ausdruck verschwindet offenbar für $n=\infty$, wenn nicht etwa ϑ selbst verschwindet. Fände diess Statt, so hätte man die Grenze von $\vartheta^{a+n+1}(l\vartheta)^{p-1}$ für das unendlich abnehmende ϑ zu ermitteln, und nach bekannten Principien über die Auffindung der Grenzwerthe würde man Null als Grenze jener Quantität finden. Das obige Integral verschwindet also stets für ein unendliches n.

Was ferner die Summe $(-1)^n \sum_{n=0}^{n=n} \frac{1}{(a+1+n)^p}$ betrifft, so convergirt sie nach den Principien über die Convergenz der Reihen gegen eine bestimmte Grenze, welche durch $(-1)^n \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(a+1+n)^p}$ bezeichnet werden kann.

Nach dem Obigen ist daher

$$1)\quad \frac{(-1)^{p-1}}{2.3\ldots(p-1)}\int_0^1 \frac{x^a(lx)^{p-1}\,dx}{1+x}=(-1)^n \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(a+1+n)^p}.$$

Ganz ähnliche Betrachtungen ergeben die Gleichung

$$2)\quad \frac{(-1)^{p-1}}{2.3\ldots(p-1)}\int_0^1 \frac{x^a(lx)^{p-1}\,dx}{1-x}=\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(a+1+n)^p}.$$

In dieser Relation darf aber p nicht 1 sein, weil dann die Summe auf der Rechten unendlich wird. In 1) kann aber p diesen Werth haben, indem die betreffende Summe endlich ist.

Setzt man $-l\frac{1}{x}$ für lx, so gehen die entwickelten Gleichungen über in die folgenden:

$$3)\quad \frac{1}{2.3\ldots(p-1)}\int_0^1 \frac{x^a\left(l\frac{1}{x}\right)^{p-1}dx}{1+x} = (-1)^n \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(a+1+n)^p},$$

$$4)\quad \frac{1}{2.3\ldots(p-1)}\int_0^1 \frac{x^a\left(l\frac{1}{x}\right)^{p-1}dx}{1+x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(a+1+n)^p}.$$

Lassen wir nun a sich der Null nähern, und gehen zu den Grenzen über, so wird

$$5)\quad \frac{1}{2.3\ldots(p-1)}\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^{p-1}dx}{1+x} = (-1)^n \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(1+n)^p},$$

$$6)\quad \frac{1}{2.3\ldots(p-1)}\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^{p-1}dx}{1-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(1+n)^p}.$$

II.

Die Gleichung 1) wird für $p-1$ folgende:

$$\int_0^1 \frac{x^a dx}{1+x} = (-1)^n \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{a+1+n}.$$

Setzt man hierin $x = \operatorname{tang}\varphi^2$, so findet man nach einigen leichten Reductionen:

$$7)\quad \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \operatorname{tang}\varphi^a d\varphi = (-1)^n \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{a+1+2n}.$$

Nimmt man hierin für a der Reihe nach 0, 2, 4, 6, etc., so ergiebt sich:

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} d\varphi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \text{etc.},$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \operatorname{tang}\varphi^2 d\varphi = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{9} + \text{etc.},$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \operatorname{tang}\varphi^4 d\varphi = \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \text{etc.};$$

allgemein

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \operatorname{tang}\varphi^{2q} d\varphi = \frac{1}{2q+1} - \frac{1}{2q+3} + \frac{1}{2q+5} - \text{etc.}$$

Deshalb ist

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} d\varphi = \tfrac{1}{4}\pi,$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \operatorname{tang}\varphi^2 d\varphi = 1 - \tfrac{1}{4}\pi,$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \operatorname{tang}\varphi^4 d\varphi = \tfrac{1}{3} - 1 + \tfrac{1}{4}\pi,$$

u. s. w.; also allgemein

$$8)\quad \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \operatorname{tang}\varphi^{2q}\, d\varphi = \frac{1}{2q-1} - \frac{1}{2q-3} + \frac{1}{2q-5} - \text{etc.} + (-1)^q . \tfrac{1}{4}\pi.$$

Auf ganz ähnliche Art wird, wenn man für a succ. 1, 3, 5, 7, etc. setzt:

$$9)\quad \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \operatorname{tang}\varphi^{2q+1} d\varphi = \frac{1}{2q} - \frac{1}{2q-2} + \frac{1}{2q-4} - \text{etc.} + (-1)^q . \tfrac{1}{2}\log 2.$$

In beiden Formeln ist q eine positive ganze Zahl; man erhält dieselben auch durch Anwendung von Reductionsformeln.

III.

Setzt man überhaupt in der Gleichung 1) $x = \operatorname{tang}\varphi^2$, so entsteht nach einfachen Reductionen

$$10)\quad \frac{(-1)^{p-1}}{2.3....(p-1)} \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \operatorname{tang}\varphi^a (l \operatorname{tang}\varphi)^{p-1} d\varphi$$
$$= (-1)^n \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(a+1+2n)^p},$$

und wenn man a sich der Null nähern lässt:

$$11)\quad \frac{(-1)^{p-1}}{2.3...(p-1)} \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (l \operatorname{tang}\varphi)^{p-1} d\varphi$$
$$= (-1)^n \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(1+2n)^p}.$$

Setzt man in der Gleichung 2) $x = \sin\varphi^2$, so entsteht nach einfachen Reductionen

$$12)\quad \frac{(-1)^{p-1}}{2.3...(p-1)} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin\varphi^a (l \sin\varphi)^{p-1} d\varphi}{\cos\varphi}$$
$$= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(a+1+2n)^p},$$

und wenn man a sich der Null nähern lässt:

$$13)\quad \frac{(-1)^{p-1}}{2.3\ldots(p-1)}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(l\sin\varphi)^{p-1}d\varphi}{\cos\varphi}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(1+2n)^p}.$$

IV.

Die Summen in den Gleichungen 5), 6), 13) lassen sich bekanntlich durch Bernoullische Zahlen ausdrücken, wenn p eine gerade Zahl ist. Weiss man den Ausdruck für die Summe in 6), so können die Ausdrücke für die übrigen gedachten Summen daraus abgeleitet werden. Diess zu zeigen, sei

$$s=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(1+n)^{2q}}=\frac{1}{1^{2q}}+\frac{1}{2^{2q}}+\frac{1}{3^{2q}}+\text{ etc.},$$

$$s_1=(-1)^n\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(1+n)^{2q}}=\frac{1}{1^{2q}}-\frac{1}{2^{2q}}+\frac{1}{3^{2q}}-\text{ etc.},$$

$$\sigma=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(1+2n)^{2q}}=\frac{1}{1^{2q}}+\frac{1}{3^{2q}}+\frac{1}{5^{2q}}+\text{ etc.}$$

Man findet leicht die Relationen $s+s_1=2\sigma$, $s-s_1=\frac{s}{2^{2q-1}}$, aus denen sich ergiebt $\sigma=\frac{2^{2q}-1}{2^{2q}}s$, $s_1=\frac{2^{2q-1}-1}{2^{2q-1}}s$. Demnach hat man

$$14)\quad \begin{cases} s=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(1+n)^{2q}}=\frac{2^{2q-1}\overset{2q-1}{B}}{1.2.3..2q}\pi^{2q}, \\ s_1=(-1)^n\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(1+n)^{2q}}=\frac{(2^{2q-1}-1)\overset{2q-1}{B}}{1.2.3..2q}\pi^{2q}, \\ \sigma=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(1+2n)^{2q}}=\frac{(2^{2q}-1)\overset{2q-1}{B}}{2.1.2.3..2q}\pi^{2q}; \end{cases}$$

indem $\overset{2q-1}{B}$ die $q$te Bernoullische Zahl bedeutet.

Somit haben wir statt der Gleichungen 5), 6), 13) die folgenden.

$$15)\quad \begin{cases} \int_0^1\frac{(l\frac{1}{x})^{2q-1}dx}{1+x}=\frac{(2^{2q-1}-1)\overset{2q-1}{B}}{2q}\pi^{2q}, \\ \int_0^1\frac{(l\frac{1}{x})^{2q-1}dx}{1-x}=\frac{2^{2q-1}\overset{2q-1}{B}}{2q}\pi^{2q}, \\ \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(l\sin\varphi)^{2q-1}d\varphi}{\cos\varphi}=-\frac{(2^{2q}-1)\overset{2q-1}{B}}{2.2q}\pi^{2q}. \end{cases}$$

V.

Die Summe in der Gleichung 11) ist ein Secantencoefficient, wenn p **ungerade** ist, denn man weiss, dass

$$\sec x = \frac{2^2}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{1+2n}$$

$$+ \frac{2^4 x^2}{\pi^3} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(1+2n)^3}$$

$$+ \frac{2^6 x^4}{\pi^5} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(1+2n)^5}$$

$$+ \text{u. s. w}$$

Bezeichnet man also den $(q+1)$ten Secantencoefficienten durch $\overset{q+1}{C}$, so ist $\overset{q+1}{C} = \frac{2^{2q+2}}{\pi^{2q+1}} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(1+2n)^{2q+1}}$, also

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(1+2n)^{2q+1}} = \frac{\overset{q+1}{C} \pi^{2q+1}}{2^{2q+2}}.$$ Desshalb hat man nach 11)

$$16) \quad \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (l \tang \varphi)^{2q} d\varphi = \frac{1.2.3..2q.\overset{q+1}{C} \pi^{2q+1}}{2^{2q+2}}.$$

LIV.

Nachtrag zu der Abhandlung über Systeme von Linsengläsern.

(Thl. VI. Nr. X. S. 62.)

Von
dem Herausgeber.

Ueber ein Paar der in meiner vorher genannten Abhandlung bewiesenen Formeln erlaube ich mir in dem vorliegenden kurzen Aufsatze noch einige nachträgliche Bemerkungen zu machen.

Setzen wir der Kürze wegen

$$1)\quad J^{(i)}=\frac{M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}\ldots M^{(i)}}{\mathfrak{Z}^{(i-1)}}=\frac{M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}\ldots M^{(i)}}{\mathfrak{N}^{(i)}},$$

so haben wir nach 56) oder 57) der genannten Abhandlung die Gleichung

$$2)\quad (p^{(\ )}-F^{(i)})(p_1^{(i)}-F_1^{(i)})=(J^{(i)})^2.$$

Hat man nun aber überhaupt eine Gleichung von der Form

$$(x-a)(y-b)=z^2,$$

so lässt sich dieselbe nach einer wohl von Möbius zuerst gemachten Bemerkung immer auf die Form

$$\frac{1}{x+z-a}+\frac{1}{y+z-b}=\frac{1}{z},$$

oder auf die Form

$$\frac{1}{x-z-a}+\frac{1}{y-z-b}=-\frac{1}{z}$$

bringen, was sich leicht durch ganz einfache Rechnung beweisen lässt. Wenden wir dies auf die Gleichung 2) an, so erhalten wir die beiden folgenden Gleichungen:

$$3)\ \frac{1}{p^{(1)}-F^{(i)}+J^{(i)}}+\frac{1}{p_1^{(i)}-F_1^{(i)}+J^{(i)}}=\frac{1}{J^{(i)}}$$

und

$$4)\ \frac{1}{p^{(1)}-F^{(i)}-J^{(i)}}+\frac{1}{p_1^{(i)}-F_1^{(i)}-J^{(i)}}=-\frac{1}{J^{(i)}}.$$

Setzen wir nun

$$5)\ p^{(1)}-F^{(i)}+J^{(i)}=P^{(1)},\ p_1^{(i)}-F_1^{(i)}+J^{(i)}=P_1^{(i)}$$

und

$$6)\ p^{(1)}-F^{(i)}-J^{(i)}=\Pi^{(1)},\ p_1^{(i)}-F_1^{(i)}-J^{(i)}=\Pi_1^{(i)},$$

also

$$7)\ p^{(1)}=F^{(i)}-J^{(i)}+P^{(1)},\ p_1^{(i)}=F^{(i)}-J^{(i)}+P_1^{(i)}$$

und

$$8)\ p^{(1)}=F^{(i)}+J^{(i)}+\Pi^{(i)},\ p_1^{(i)}=F_1^{(i)}+J^{(i)}+\Pi_1^{(i)},$$

woraus leicht mit Hülfe der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten einem Jeden die eigentliche Bedeutung der Grössen $P^{(1)}$, $P_1^{(i)}$ und $\Pi^{(1)}$, $\Pi_1^{(i)}$ erhellen wird; so erhalten die Gleichungen 3) und 4) folgende Gestalt:

$$9)\ \frac{1}{P^{(1)}}+\frac{1}{P_1^{(i)}}=\frac{1}{J^{(i)}}$$

und

$$10)\ \frac{1}{\Pi^{(1)}}+\frac{1}{\Pi_1^{(i)}}=-\frac{1}{J^{(i)}}.$$

Für $P^{(1)}$ unendlich wird $P_1^{(i)}=J^{(i)}$, und eben so wird für $P_1^{(i)}$ unendlich $P^{(1)}=J^{(i)}$. Für $\Pi^{(1)}$ unendlich wird $\Pi_1^{(i)}=-J^{(i)}$, und eben so wird für $\Pi_1^{(i)}$ unendlich $\Pi^{(1)}=-J^{(i)}$. Weitere Folgerungen aus den beiden vorhergehenden Gleichungen zu ziehen, gehört hier um so weniger zu meinem Zweck, weil dieselben eines Theils schon aus den Arbeiten anderer Mathematiker hinreichend bekannt sind, andern Theils ich selbst bald ein grösseres selbstständiges Werk über diese Gegenstände zu veröffentlichen beabsichtige.

In Betreff der Gleichung 66) in meiner oben gedachten Abhandlung, nämlich der Gleichung

$$\frac{q^{(1)}}{q_1^{(i)}}=(-1)^{i-1}\cdot\frac{\mathfrak{Z}_1^{(i)}+\mathfrak{N}_1^{(i)}(p^{(1)}-f^{(1)})}{M^{(1)}M^{(2)}M^{(3)}M^{(4)}\ldots M^{(i)}},$$

bemerke ich, was früher mit Unrecht unterlassen worden ist, dass dieselbe sich noch wesentlich vereinfachen lässt, wenn man statt der Grösse $f^{(1)}$ die Grösse $F^{(i)}$ einführt.

Weil nämlich nach 37) und 64) meiner früheren Abhandlung

$$F^{(i)}-f^{(1)}=-\cfrac{(M^{(1)})^2}{N^{(1)}-\cfrac{(M^{(2)})^2}{N^{(2)}-\cfrac{(M^{(3)})^2}{N^{(3)}-\ldots-\cfrac{(M^{(i-1)})^2}{N^{(i-1)}}}}}$$

und

$$\frac{\mathfrak{Z}_1(i)}{\mathfrak{N}_1(i)} = \frac{(M(1))^2}{N(1) - \frac{(M(2))^2}{N(2) - \frac{(M(3))^2}{N(3) - \ldots - \frac{(M(i-1))^2}{N(i-1)}}}}$$

ist, so ist

$$F(i) - f(1) = -\frac{\mathfrak{Z}_1(i)}{\mathfrak{N}_1(i)},\quad f(1) = F(i) + \frac{\mathfrak{Z}_1(i)}{\mathfrak{N}_1(i)},$$

woraus leicht

$$\mathfrak{Z}_1(i) + \mathfrak{N}_1(i)(p(1) - f(1)) = \mathfrak{N}_1(i)(p(1) - F(i)),$$

also nach dem Obigen

$$11)\quad \frac{q(1)}{q_1(i)} = (-1)^{i-1} \cdot \frac{\mathfrak{N}_1(i)(p(1) - F(i))}{M(1)\,M(2)\,M(3)\,M(4)\ldots M(i)}$$

folgt.

Nach den beiden Gleichungen 53) meiner früheren Abhandlung, in Verbindung mit den Gleichungen 52), erhält man die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{Z}(0) = 1,\\
&\mathfrak{Z}(1) = N(1),\\
&\mathfrak{Z}(2) = \mathfrak{Z}(1)\,N(2) - \mathfrak{Z}(0)\,(M(2))^2,\\
&\mathfrak{Z}(3) = \mathfrak{Z}(2)\,N(3) - \mathfrak{Z}(1)\,(M(3))^2,\\
&\mathfrak{Z}(4) = \mathfrak{Z}(3)\,N(4) - \mathfrak{Z}(2)\,(M(4))^2,
\end{aligned}$$

u. s. w.

Vergleicht man nun diese Gleichungen mit den auf S. 84. bewiesenen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{N}_1(1) = 1,\\
&\mathfrak{N}_1(2) = N(1),\\
&\mathfrak{N}_1(3) = \mathfrak{N}_1(2)\,N(2) - \mathfrak{N}_1(1)\,(M(2))^2,\\
&\mathfrak{N}_1(4) = \mathfrak{N}_1(3)\,N(3) - \mathfrak{N}_1(2)\,(M(3))^2,\\
&\mathfrak{N}_1(5) = \mathfrak{N}_1(4)\,N(4) - \mathfrak{N}_1(3)\,(M(4))^2,
\end{aligned}$$

u. s. w.

so ergiebt sich auf der Stelle

$$\mathfrak{N}_1(1) = \mathfrak{Z}(0),\ \mathfrak{N}_1(2) = \mathfrak{Z}(1),\ \mathfrak{N}_1(3) = \mathfrak{Z}(2),\ \mathfrak{N}_1(4) = \mathfrak{Z}(3), \ldots;$$

also allgemein

$$12)\quad \mathfrak{N}_1(i) = \mathfrak{Z}(i-1).$$

Weil nun aber nach der zweiten der Gleichungen 53) meiner früheren Abhandlung

$$\mathfrak{Z}(i-1) = \mathfrak{N}(i)$$

ist, so ist auch

$$13)\ \mathfrak{N}_1(^i) = \mathfrak{N}(^i),$$

und man kann also die Gleichung 11) auch auf folgende Art ausdrücken:

$$14)\ \frac{q(^1)}{q_1(^i)} = (-1)^{i-1} \cdot \frac{\mathfrak{Z}(^{i-1})(p(^1) - F(^i))}{M(^1)M(^2)M(^3)M(^4)\ldots M(^i)},$$

oder

$$15)\ \frac{q(^1)}{q_1(^i)} = (-1)^{i-1} \cdot \frac{\mathfrak{N}(^i)(p(^1) - F(^i))}{M(^1)M(^2)M(^3)M(^4)\ldots M(^i)}.$$

LV.

Ueber eine Methode zur Bestimmung der Ausdehnung der Körper durch die Wärme.

Von

dem Herausgeber.

An die eine Wagschale einer genauen Wage, deren Wagschalen auf gewöhnliche Weise unten mit Häkchen versehen sind, hänge man mittelst eines feinen Fadens einen festen Körper, senke denselben in eine ihn nicht auflösende Flüssigkeit bei drei möglichst von einander verschiedenen Temperaturen t_1, t_2, t_3, die bei jedem der drei Versuche mit einem genauen Thermometer bestimmt werden müssen, ein, und lege jedesmal in die andere Wagschale so viele Gewichte G_1, G_2, G_3, dass die Wage im Gleichgewichte steht, beachte auch, dass bei jedem der drei Versuche ein gleich grosser Theil des Fadens, an welchem der feste Körper hängt, in die Flüssigkeit eingetaucht wird.

Bezeichnen wir nun das Gewicht einer Volumeneinheit der Flüssigkeit bei der Temperatur 0 durch Γ, und die cubische Ausdehnung der Flüssigkeit für jeden Grad des Thermometers durch $\varkappa$; so sind, wie leicht erhellen wird, die Gewichte einer Volumeneinheit der Flüssigkeit bei den Temperaturen t_1, t_2, t_3 respective

$$\frac{\Gamma}{1+\varkappa t_1},\ \frac{\Gamma}{1+\varkappa t_2},\ \frac{\Gamma}{1+\varkappa t_3}.$$

Bezeichnen wir also ferner die Volumina des in die Flüssigkeit eingetauchten festen Körpers bei den Temperaturen t_1, t_2, t_3

respective durch V_1, V_2, V_3; so sind die Gewichte der bei den drei Versuchen von dem eingetauchten Körper aus der Stelle vertriebenen Flüssigkeitsvolumina:

$$\frac{\Gamma V_1}{1+\varkappa t_1}, \frac{\Gamma V_2}{1+\varkappa t_2}, \frac{\Gamma V_3}{1+\varkappa t_3};$$

und wenn wir nun das Gewicht des Fadens durch g, den Gewichtsverlust des in die Flüssigkeit eingetauchten Theils desselben in der Flüssigkeit, welchen wir wenigstens mit grosser Annäherung bei allen drei Versuchen werden als gleich annehmen können, durch γ bezeichnen; so sind offenbar

$$G_1+\frac{\Gamma V_1}{1+\varkappa t_1}-(g-\gamma),$$

$$G_2+\frac{\Gamma V_2}{1+\varkappa t_2}-(g-\gamma),$$

$$G_3+\frac{\Gamma V_3}{1+\varkappa t_3}-(g-\gamma)$$

nach einem bekannten hydrostatischen Satze drei Ausdrücke für das wirkliche Gewicht des in die Flüssigkeit eingetauchten festen Körpers, wodurch wir die Gleichungen

$$G_1+\frac{\Gamma V_1}{1+\varkappa t_1}-(g-\gamma)$$

$$=G_2+\frac{\Gamma V_2}{1+\varkappa t_2}-(g-\gamma)$$

$$=G_3+\frac{\Gamma V_3}{1+\varkappa t_3}-(g-\gamma)$$

oder

$$G_1+\frac{\Gamma V_1}{1+\varkappa t_1}=G_2+\frac{\Gamma V_2}{1+\varkappa t_2}=G_3+\frac{\Gamma V_3}{1+\varkappa t_3}$$

erhalten. Bezeichnen wir nun aber die cubische Ausdehnung unsers festen Körpers für jeden Grad des Thermometers durch μ, und dessen Volumen bei der Temperatur 0 durch V, so ist

$$V_1=(1+\mu t_1)\,V,\ V_2=(1+\mu t_2)\,V,\ V_3=(1+\mu t_3)\,V;$$

folglich nach dem Vorhergehenden

$$G_1+\frac{1+\mu t_1}{1+\varkappa t_1}\,\Gamma V=G_2+\frac{1+\mu t_2}{1+\varkappa t_2}\,\Gamma V=G_3+\frac{1+\mu t_3}{1+\varkappa t_3}\,\Gamma V.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich

$$G_1-G_2=-\left(\frac{1+\mu t_1}{1+\varkappa t_1}-\frac{1+\mu t_2}{1+\varkappa t_2}\right)\Gamma V,$$

$$G_1-G_3=-\left(\frac{1+\mu t_1}{1+\varkappa t_1}-\frac{1+\mu t_3}{1+\varkappa t_3}\right)\Gamma V;$$

also

$$\frac{G_1-G_2}{G_1-G_3}=\frac{\frac{1+\mu t_1}{1+\varkappa t_1}-\frac{1+\mu t_2}{1+\varkappa t_2}}{\frac{1+\mu t_1}{1+\varkappa t_1}-\frac{1+\mu t_3}{1+\varkappa t_3}},$$

oder

$$\frac{1+\varkappa t_2}{1+\varkappa t_3}\cdot\frac{G_1-G_2}{G_1-G_3}=\frac{(1+\mu t_1)(1+\varkappa t_2)-(1+\varkappa t_1)(1+\mu t_2)}{(1+\mu t_1)(1+\varkappa t_3)-(1+\varkappa t_1)(1+\mu t_3)};$$

also, wie man nach leichter Entwickelung findet:

$$\frac{1+\varkappa t_2}{1+\varkappa t_3}\cdot\frac{G_1-G_2}{G_1-G_3}=\frac{\mu-\varkappa}{\mu-\varkappa}\cdot\frac{t_1-t_2}{t_1-t_3},$$

d. i.

$$\frac{1+\varkappa t_2}{1+\varkappa t_3}\cdot\frac{G_1-G_2}{G_1-G_3}=\frac{t_1-t_2}{t_1-t_3}.$$

Aus dieser nur die eine unbekannte Grösse $\varkappa$ enthaltenden Gleichung erhält man ohne Schwierigkeit

$$1)\ \varkappa=-\frac{(t_1-t_2)(G_1-G_3)-(t_1-t_3)(G_1-G_2)}{t_3(t_1-t_2)(G_1-G_3)-t_2(t_1-t_3)(G_1-G_2)}$$

oder

$$2)\ \varkappa=-\frac{(t_2-t_3)G_1+(t_3-t_1)G_2+(t_1-t_2)G_3}{t_1(t_2-t_3)G_1+t_2(t_3-t_1)G_2+t_3(t_1-t_2)G_3},$$

mittelst welcher Formel also $\varkappa$ berechnet werden kann.

Nimmt man statt des Fadens, an welchem der bei den Versuchen gebrauchte feste Körper aufgehängt wurde, einen feinen Draht, legt den festen Körper, nachdem man $\varkappa$ bestimmt hat, in die Wagschale, an welcher derselbe vorher aufgehängt wurde, lässt den Draht wieder eben so weit wie bei den ersten Versuchen in die Flüssigkeit hineinhängen und legt nun in die andere Wagschale so viele Gewichte G, bis die Wage im Gleichgewichte steht, so ist, insofern man, wenn der Körper nur klein ist, seinen Gewichtsverlust in der Luft als unmerklich vernachlässigen kann, sein wirkliches Gewicht offenbar $G-(g-\gamma)$, und wir haben daher nach dem Obigen die drei folgenden Gleichungen:

$$G-(g-\gamma)=G_1+\frac{\Gamma V_1}{1+\varkappa t_1}-(g-\gamma),$$

$$G-(g-\gamma)=G_2+\frac{\Gamma V_2}{1+\varkappa t_2}-(g-\gamma),$$

$$G-(g-\gamma)=G_3+\frac{\Gamma V_3}{1+\varkappa t_3}-(g-\gamma);$$

also, wenn man für V_1, V_2, V_3 ihre aus dem Obigen bekannten Ausdrücke setzt:

$$G = G_1 + \frac{1 + \mu t_1}{1 + \varkappa t_1} \Gamma V,$$

$$G = G_2 + \frac{1 + \mu t_2}{1 + \varkappa t_2} \Gamma V,$$

$$G = G_3 + \frac{1 + \mu t_3}{1 + \varkappa t_3} \Gamma V.$$

Also ist

$$\frac{G - G_1}{G - G_2} = \frac{1 + \varkappa t_2}{1 + \varkappa t_1} \cdot \frac{1 + \mu t_1}{1 + \mu t_2},$$

$$\frac{G - G_1}{G - G_3} = \frac{1 + \varkappa t_3}{1 + \varkappa t_1} \cdot \frac{1 + \mu t_1}{1 + \mu t_3};$$

oder

$$\frac{1 + \mu t_1}{1 + \mu t_2} = \frac{1 + \varkappa t_1}{1 + \varkappa t_2} \cdot \frac{G - G_1}{G - G_2},$$

$$\frac{1 + \mu t_1}{1 + \mu t_3} = \frac{1 + \varkappa t_1}{1 + \varkappa t_3} \cdot \frac{G - G_1}{G - G_3};$$

also

$$3) \begin{cases} \mu = -\dfrac{(1 + \varkappa t_1)(G - G_1) - (1 + \varkappa t_2)(G - G_2)}{t_2 (1 + \varkappa t_1)(G - G_1) - t_1 (1 + \varkappa t_2)(G - G_2)}, \\[2ex] \mu = -\dfrac{(1 + \varkappa t_1)(G - G_1) - (1 + \varkappa t_3)(G - G_3)}{t_3 (1 + \varkappa t_1)(G - G_1) - t_1 (1 + \varkappa t_3)(G - G_2)}. \end{cases}$$

Hat man bei irgend einer bestimmten Temperatur τ das Volumen $\mathfrak{V}$ des bei den Versuchen angewandten festen Körpers durch wirkliche Abmessungen ermittelt, so ist

$$\mathfrak{V} = (1 + \mu\tau) V, \text{ also } V = \frac{\mathfrak{V}}{1 + \mu\tau};$$

folglich nach dem Obigen, wie man leicht findet:

$$4) \begin{cases} \Gamma = (1 + \mu\tau) \dfrac{1 + \varkappa t_1}{1 + \mu t_1} \cdot \dfrac{G - G_1}{\mathfrak{V}}, \\[2ex] \Gamma = (1 + \mu\tau) \dfrac{1 + \varkappa t_2}{1 + \mu t_2} \cdot \dfrac{G - G_2}{\mathfrak{V}}, \\[2ex] \Gamma = (1 + \mu\tau) \dfrac{1 + \varkappa t_3}{1 + \mu t_3} \cdot \dfrac{G - G_3}{\mathfrak{V}}; \end{cases}$$

wodurch also auch das Gewicht einer Volumeneinheit der Flüssigkeit bei der Temperatur 0 bestimmt ist.

Wie man aus der cubischen Ausdehnung die lineare findet, braucht hier nicht weiter erörtert zu werden.

LVI.

Miscellen.

Wenn die Grössen R, φ, ψ aus den drei Gleichungen $A=R\cos\varphi\cos\psi$, $B=R\sin\varphi\cos\psi$, $C=R\sin\psi$ bestimmt werden sollen, so wird dabei gewöhnlich noch die Erfüllung der Bedingung verlangt, dass R positiv werde. Soll diese Bedingung erfüllt werden, so muss man die Winkel φ, ψ auf eine bestimmte Weise nehmen. Da sichere Regeln hierfür gemeiniglich nicht gegeben werden, so wollen wir dieselben hier einmal im Folgenden zusammenstellen, indem wir dabei zugleich von der Annahme ausgehen, dass φ immer positiv und von 0 bis 360°, dagegen ψ positiv und negativ, aber rücksichtlich seines absoluten Werths nur von 0 bis 90° genommen werden soll. Wollte man auch ψ stets positiv und von 0 bis 360° nehmen, so würden die Regeln anders ausfallen, werden sich aber, nach Anleitung des Folgenden, immer leicht aufstellen lassen, was auch zu zweckmässigen Uebungen im Gebrauche der Zeichen beim trigonometrischen Unterrichte Veranlassung geben kann.

Zur Bestimmung von φ hat man die Formel

$$\tang\varphi=\frac{B}{A}.$$

Zur Bestimmung von ψ hat man

$$\tang\psi=\frac{C}{A}\cos\varphi=\frac{C}{B}\sin\varphi,$$

und R ergiebt sich mittelst der Formeln

$$R=\frac{A}{\cos\varphi\cos\psi}=\frac{B}{\sin\varphi\cos\psi}=\frac{C}{\sin\psi}.$$

Soll nun R positiv werden, so müssen die Winkel φ, ψ unter den oben gemachten Voraussetzungen auf folgende Art genommen werden:

A,	B,	C	
+	+	+ :	$0<\varphi<90^0,\ 0<\psi<+90^0$;
+	+	− :	$0<\varphi<90^0,\ 0>\psi>-90^0$;
−	+	+ :	$90^0<\varphi<180^0,\ 0<\psi<+90^0$;
−	+	− :	$90^0<\varphi<180^0,\ 0>\psi>-90^0$;
−	−	+ :	$180^0<\varphi<270^0,\ 0<\psi<+90^0$;
−	−	− :	$180^0<\varphi<270^0,\ 0>\psi>-90^0$;
+	−	+ :	$270^0<\varphi<360^0,\ 0<\psi<+90^0$;
+	−	− :	$270^0<\varphi<360^0,\ 0>\psi>-90^0$.

Nach einer Bemerkung des Herrn J. A. Serret in Liouville's Journal de Mathématiques. T. IX. p. 436. kann das im Archiv. Thl. IV. S. 116. besprochene bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}\,dx$$

sehr leicht auf folgende Art gefunden werden.

Man setze $x=\operatorname{tang}\varphi$, so ist $\varphi=\operatorname{Arctang}x$, und folglich

$$d\varphi=\frac{dx}{1+x^2}.$$

Also ist offenbar

$$\int_0^1\frac{l(1+x)}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{1}{4}\pi}l(1+\operatorname{tang}\varphi)\,d\varphi=\int_0^{\frac{1}{4}\pi}l\frac{\cos(\frac{1}{4}\pi-\varphi).\sqrt{2}}{\cos\varphi}\,d\varphi$$

$$=\tfrac{1}{2}l2.\int_0^{\frac{1}{4}\pi}d\varphi+\int_0^{\frac{1}{4}\pi}l\cos(\tfrac{1}{4}\pi-\varphi)\,d\varphi-\int_0^{\frac{1}{4}\pi}l\cos\varphi\,d\varphi.$$

Aus der Natur der bestimmten Integrale erhellet aber sehr leicht, dass

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi}l\cos\varphi\,d\varphi=\int_0^{\frac{1}{4}\pi}l\cos(\tfrac{1}{4}\pi-\varphi)\,d\varphi$$

ist. Also ist

$$\int_0^1\frac{l(1+x)}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{8}l2,$$

wie a. a. O. gefunden worden ist.

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

XXI.
Literarischer Bericht.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Jahn, G. A.: Wörterbuch der angewandten Mathematik. gr. 8. 3te Lief. Leipzig. 1844. 18 ggr.
(Wird nächstens ausführlicher angezeigt werden.)

Kries, Fr.: Lehrbuch der reinen Mathematik. 7te Aufl. Mit 225 Holzschnitten. Jena. 1844. 1 Thlr. 18 ggr.

Die Elemente der Arithmetik, Algebra und rechnenden Geometrie. Von Prof. J. Rogg. Mit lith. Tafeln. Ulm. 1844. 20 ggr.

Montferrier, A. S. de: Dictionnaire des sciences mathématiques pures et appliquées. Deuxième édition. Trois volumes in 4. plus 80 planches. Paris. 1844. 36 fr.

Arithmetik.

Schenkel: praktisches Rechenbuch für Schüler in Volksschulen und in den unteren Klassen der Realschulen. Nebst Resultaten. 8 Braunschweig. 1844. 10 ggr.

Schenkel, J.: Elementare Arithmetik, theoretisch und praktisch dargestellt für Lehrer. Braunschweig. 1844. 8. 14 ggr.

Hauschild, J. W.: die Arithmetik. Ein Handbuch für alle Stände Nordhausen. 1844. 8 ggr.

Sass, J. B.: Proportionen und kaufmännisches Rechnen. Erste Abtheilung der Fortsetzung des „Rechenbuchs für Volksschulen". 8. Altona. 1844. $\frac{1}{2}$ Thlr.

Derselbe: Resultate dazu. $\frac{1}{4}$ Thlr.

Humpoltz, L.: Handbuch der Arithmetik in einer gründlichen und leichtfasslichen Darstellung, mit vorzüglicher Rücksicht auf praktische Anwendung. Prag. 1844. gr. 8. 1 Thlr. 12 ggr.

Preyssinger, P.: Leitfaden zum Unterricht in der niederen, reinen und angewandten Arithmetik. 2te Aufl. gr. 8. Ulm. 1844. 18 ggr.

Hartmann, Dr. F. F. G.: arithmetischer Kursus für die oberen Gymnasial-Klassen, enthaltend die Grund-, Rang- und Ordnungsoperationen mit vielen Uebungsaufgaben. 1ste Abth.: Die Grundoperationen. 2te Abth.: Die Rangoperationen. 8. 1844. Hildesheim. $1\frac{2}{3}$ Thlr.

Anleitung, leichtfassliche, zum Gebrauch des Rechenstabes bei Multiplication, Division, verkehrter und gerader Regel de tri, Gesellschaftsrechnung, Quadriren, Wurzelausziehen, Bestimmung des geometr. Mittels, Verwandlung von Vierecken und Dreiecken, Kreisumfangs- und Flächenrechnungen, Ellipsen, Kugeloberflächen, Berechnungen des freien Falles, dann der Körperinhalte von Würfeln, Prismen, Cylindern, Kugeln, Pyramiden und Kegeln, endlich der Auflösung rechtwinkeliger Dreiecke. Eingerichtet für Solche, welche nur im Besitze der gewöhnlichen Elementarkenntnisse sind. 8. Wien. 1844. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Lehrbuch der Arithmetik von J. G. Brehmer, Doctor der Philosophie, Oberlehrer der Mathematik und Physik am Pädagogium zu Putbus auf Rügen. Stralsund. 1844. 8.

Der Verfasser hat sich in dieser Schrift vorzüglich eine streng systematische Entwickelung der Arithmetik aus einem Principe, nämlich aus dem Principe des Zählens, welches der Verfasser als besonderes oder determinirtes Princip der Arithmetik bezeichnet, heraus zur Aufgabe gemacht, weshalb in derselben auch das Streben nach einer philosophischen Behandlung der Arithmetik sehr deutlich hervortritt, worin daher auch ihre Eigenthümlichkeit vorzüglich zu suchen sein dürfte.

Nach einer Einleitung in die gesammte Mathematik wird S. 12 die folgende Erklärung der Arithmetik gegeben:

„Der Gegenstand der Arithmetik ist die Zahlgrösse, ihr Princip das Zählen, welches sich sofort als Zuzählen oder Wegzählen darstellt; die Arithmetik ist die Wissenschaft von der discreten Veränderung einer Zahlgrösse und deren Folgen, sie untersucht 1) die discreten Veränderungen selbst, welchen eine Zahlgrösse unterliegt, betrachtet 2) das in Folge solcher Veränderungen immer mögliche Verhältniss zwischen zwei oder mehreren gegebenen Grössen, und bestimmt 3) die Zahlgrösse, welche zu einer gegebenen Zahlgrösse ein gegebenes Verhältniss hat.

Jede Veränderung, welche mit einer Zahlgrösse vorgenommen wird, heisst auch eine Operation oder Rechnung."

Auf S. 14 wird hierauf die folgende Uebersicht des ganzen Systems gegeben:

Erstes Buch. Erste Zählstufe.
- Cap. 1. Erste Operationsstufe.
- Cap. 2. Erste Verhältnissstufe.
- Cap. 3. Erste algebraische Stufe.

Zweites Buch. Zweite Zählstufe.
- Cap. 4. Zweite Operationsstufe.
- Cap. 5. Zweite Verhältnissstufe.
- Cap. 6. Zweite algebraische Stufe.

Drittes Buch. Dritte Zählstufe.
- Cap. 7. Dritte Operationsstufe.
- Cap. 8. Dritte Verhältnissstufe.
- Cap. 9. Dritte algebraische Stufe.
- Anhang. Beweis, dass nicht mehr Zählstufen möglich sind.

Viertes Buch. Verhältnisse zwischen mehreren Grössen.
- Cap. 10. Diese Verhältnisse nach der ersten Zählstufe.
- Cap. 11. Desgleichen nach der zweiten Zählstufe.
- Cap. 12. Desgleichen nach der dritten Zählstufe.

Das Weitere über diese für sich freilich nicht ganz verständliche Eintheilung muss man in dem Buche selbst nachlesen, da uns zu weiteren Erläuterungen hier leider der Raum fehlt.

Jedenfalls verdient das, so wie in dieser, auch in mehreren anderern neueren Schriften, deutlich hervortretende Streben nach einer streng systematischen Entwickelung der Arithmetik aus einem Principe, wozu dieselbe unter den mathematischen Disciplinen vorzugsweise geeignet ist, alle Anerkennung. Uebrigens aber können wir den Lesern des Archivs die Versicherung geben, dass die vorliegende Schrift sich keineswegs, wie manche andere vorzüglich nach einer sogenannten philosophischen Darstellung strebende Schriften, in ein mystisches Dunkel hüllt, sondern vielmehr überall sich eine völlig klare und deutliche Darstellung zur besondern Aufgabe macht, weshalb deren Inhalt auch unter der Leitung eines geschickten Lehrers Schülern an höhern Unterrichtsanstalten ohne alle Schwierigkeit recht wohl zu völligem Verständniss wird gebracht werden können. Zugleich ist, ohne sich irgendwo auf ein blosses vages philosophisches Raisonnement einzulassen, was namentlich bei dem mathematischen Unterrichte auf Schulen sehr gefährlich sein würde, überall die strenge mathematische Form der Beweise festgehalten, und eine hinreichende Anzahl erläuternder Beispiele beigegeben worden, was der Schrift ebenfalls nur zur Empfehlung gereichen kann.

Lehrbuch der Arithmetik mit Einschluss der Algebra. Für höhere Lehranstalten und zum Selbstunterricht. Von Dr. K. G. Reuschle, Professor am Gymnasium zu Stuttgart. Erster Theil: Arithmetik. Stuttgart. 1844. 8. 1 Thlr. 3 ggr.

Bei der Abfassung dieses deutlich geschriebenen Lehrbuchs hat sich der Verfasser vorzüglich an Ohm gehalten, und stellt als leitende Grundsätze seiner Behandlung in der Vorrede die drei folgenden auf: 1) die Zahl ist keine Grösse; 2) alles Rechnen ist

nichts anderes, als ein Umformen von Zahlenverbindungen; 3) alle Zahlenverbindungen kommen letzlich auf sieben Arten zurück, zwei Zahlen mit einander zu verbinden. Uebrigens hat sich der Verfasser keineswegs sklavisch an sein Vorbild gehalten, sondern ist in mehrfachen Beziehungen seinen eignen Weg gegangen. Ob es übrigens nicht hin und wieder zur Abkürzung und Deutlichkeit der Beweise beigetragen haben würde, wenn der Gebrauch allgemeiner Symbole nicht, wie es scheint, absichtlich vermieden worden wäre, wollen wir dahin gestellt sein lassen.

Sass, J. B.: Buchstabenrechnung und Algebra. 2te Abtheilung der Fortsetzung des „Rechenbuchs für Volksschulen". 8. Altona. 1844. 1 Thlr.

Derselbe: Resultate dazu. Ebend. $\frac{1}{4}$ Thlr.

Sachs: Auflösungen der in Meier-Hirsch's Sammlung von Beispielen etc. enthaltenen Gleichungen und Aufgaben. Zum Selbstunterricht bestimmt. Sechste Auflage. 8. Berlin. 1844. $1\frac{2}{3}$ Thlr.

Baltshausen, H.: Die Grundlehren der Algebra, theoretisch entwickelt und mit einer grossen Anzahl von Beispielen und Aufgaben zur praktischen Einübung derselben versehen. Mit besonderer Rücksicht auf den Gebrauch in Schulen. gr. 8. 1844. Solothurn. 1 Thlr.

Derselbe: Der Schlüssel zu den Aufgaben. 10 ggr.

Prochaska, L.: Kurze und leichtfassliche Anleitung, Gleichungen des 1. und 2. Grades aufzusetzen und aufzulösen. 8. Wien. 1844. 8 ggr.

Ingram and Trotter, Elements of Algebra, Theoretical and Practical: for the use nf Schools and Private Students; containing the Fundamental Rules, Fractions, Involution and Evolution, Surds, Equations of all Degrees, Progressions, Series, Logarithms and their Applications, Properties of Numbers, Continued Fractions and their Uses, the Indeterminate or Diophantine Analysis, Probabilities, Life Annuities etc.: with numerous Exercises under each Head, and a large Collection of Miscellaneous Questions. 12. Edinburgh. 1844. 4 sh.

Götz, J.: Lehrbuch der Mathematik. 2ter Theil: Differential- und Integralrechnung. gr. 8. 1844. Leipzig. 20 ggr.

(Bis jetzt ist dieses Buch noch nicht in unsere Hände gelangt, und wird später ausführlicher angezeigt werden.)

Bell. A.: Mathematical tables, consisting of logarithmic and other tables, required in the various branches of mathematics. London. $3\frac{1}{2}$ sh.

Geometrie.

Lehrbuch der Mathematik für Gymnasien und Realschulen nebst vielen Uebungsaufgaben und Excursen, von J. H. T. Müller, Schulrathe und Director des Realgymnasiums zu Gotha. Zweiter Theil, Erste Abtheilung, die Grundeigenschaften der unbegrenzten geometrischen Gebilde im Raume und die gesammte Planimetrie enthaltend. Auch unter dem besonderen Titel: Lehrbuch der Geometrie für Gymnasien und Realschulen, nebst vielen Uebungsaufgaben und Excursen, von J. H. T. Müller. Erste Abtheilung, die Grundeigenschaften der unbegrenzten geometrischen Gebilde im Raume und die ganze Planimetrie enthaltend. Mit zehn Kupfertafeln und den zum gesammten mathematischen Unterricht erforderlichen vierstelligen Hülfstafeln als besonderer Beilage. Halle. 1844. 8. 1 Thlr. 6 ggr.

Dieses Lehrbuch der Geometrie ist nach einem ganz neuen Plane bearbeitet, und unterscheidet sich von allen übrigen uns bekannten in mehreren wesentlichen Punkten, die wir jetzt den Lesern in möglichster Kürze vor die Augen zu führen versuchen wollen.

Der allgemeine Grundgedanke, welcher bei der Abfassung dieses Werks den Verfasser fortwährend geleitet hat, ist zuvörderst der, dass die Sätze nicht in der Folge, wie sie sich den Beweisen nach am bequemsten an einander reihen lassen, sondern wie sie sich ihrem Inhalte nach einander am besten anschliessen, geordnet worden sind, so jedoch, dass darunter die Folgerichtigkeit der Beweise durchaus keinen Abbruch erleidet.

Eine nothwendige Folge aus diesem leitenden Grundgedanken war nun aber, dass der Verfasser die seit Euclides fortwährend festgehaltene Trennung der sogenannten Planimetrie und Stereometrie von einander gleich von vorn herein ganz aufheben, und vom Anfange an den Raum als Object der Geometrie sogleich in völliger Allgemeinheit auffassen musste. Die Nothwendigkeit dieser allgemeineren Auffassung wird bei dem Zwecke, dessen Erreichung der Verfasser sich überhaupt vorsetzte, sogleich einleuchten, wenn man z. B. nur überlegt, dass, wenn von den möglichen Lagen zweier Geraden die Rede war, natürlich die kreuzende Lage nicht fehlen durfte; bei drei Geraden war deren Parallelität im Raume nicht zu umgehen; an die Lehre von den Winkeln musste sich als das durchaus Analoge unmittelbar die Lehre von den Keilen oder Flächenwinkeln anschliessen; drei Ebenen bedingten die Aufnahme der Ecken; u. s. w.

Ueberhaupt aber musste der Verfasser, wenn er sich selbst treu bleiben wollte, die meisten geometrischen Objecte aus allgemeineren Gesichtspunkten auffassen, als dies sonst meistens zu geschehen pflegt, in welcher Beziehung wir hier nur u. A. die gleich anfänglich ganz allgemeine Darstellung der Lehre von den Winkeln hervorheben, welche, worin jeder erfahrene Lehrer dem Verfasser voll-

kommen beipflichten muss, für den künftigen Unterricht in der Trigonometrie von der grössten Bedeutung ist, und zu dessen Erleichterung die erspriesslichsten Dienste leistet.

Aus dem Grundgedanken, welcher bei der Abfassung dieses Werks leitend war, geht endlich auch von selbst hervor, dass auf möglichste Gruppirung der Sätze, ferner auf das Hervorheben des Dualismus in der Geometrie besonderer Fleiss verwandt, und auch von den Analogieen so oft wie möglich Gebrauch gemacht werden musste, so dass nämlich die für die Punkte und Geraden erwiesenen Sätze überall, wo es thunlich war, beziehungsweise auf die Geraden und Ebenen übertragen wurden.

Nachdem wir jetzt das vorliegende Werk, so weit es die uns vorgeschriebene Kürze gestattet, im Allgemeinen zu charakterisiren versucht haben, fühlen wir, bevor wir zur Angabe des Inhalts der einzelnen Abschnitte übergehen, uns gedrungen, der grossen Consequenz, mit welcher der Verfasser den sich selbst vorgezeichneten, nicht leichten Weg gegangen ist, die rühmlichste Anerkennung zu Theil werden zu lassen. Und bei der ungemein grossen Erweiterung der Geometrie in neuerer Zeit, wo es auch selbst für den, welcher sich fortwährend speciell mit diesen Gegenständen beschäftigt, sehr schwierig ist, die Uebersicht nicht zu verlieren, kann über den Nutzen eines solchen Werks wie das vorliegende keine Frage sein; vielmehr ist dasselbe längst ein Bedürfniss gewesen. Da es ferner eine wahre Sünde an der Wissenschaft sein würde, wenn man die neueren Eroberungen auf dem Gebiete derselben dem Unterrichte, für welchen dieselben jedenfalls von der grössten Bedeutung sind, noch länger entziehen wollte, so ist auch in dieser Rücksicht das vorliegende Werk von besonderer Wichtigkeit, und muss den Lehrern an höheren Unterrichtsanstalten dringend empfohlen werden, wobei wir zugleich die Ueberzeugung auszusprechen nicht anstehen, dass schwerlich auf einem anderen Wege, als dem von dem Verfasser eingeschlagenen, dieses Ziel glücklich zu erreichen sein dürfte.

Nachdem nun der Verfasser in dem ersten Abschnitte, welcher die Ueberschrift führt: Grundeigenschaften der unbegrenzten und halbbegränzten geometrischen Grössen, und dessen Zweck und Wichtigkeit aus den vorhergehenden gegebenen allgemeinen Andeutungen über den Zweck des Werks von selbst erhellen wird, eine möglichst breite Basis für alles Folgende zu gewinnen versucht hat, geht er im zweiten zu den begränzten ebenen Figuren über, und stellt mit absichtlicher Vermeidung der Congruenz, ohne die eine Figur mit der anderen zu vergleichen, wodurch natürlich viele Abweichungen von den gewöhnlichen Beweisarten nöthig gemacht werden, dem Verfasser aber der grosse Vortheil gebracht wird, dass später die Zusammenstellung fremdartiger Sätze umgangen werden konnte, die hauptsächlichsten Eigenschaften der begränzten ebenen Figuren zusammen.

Den natürlichsten Eintheilungsgrund für die drei übrigen Abschnitte boten die verschiedenen geometrischen Verwandtschaften dar, nämlich die Congruenz, die Gleichheit mit Einschluss der Affinitätsgleichheit, die Aehnlichkeit und Affinität. Die Folgerungen aus den verschiedenen Verwandtschaftseigenschaften wurden in jedem Abschnitte abgesondert nachgegeben, so dass auch hierbei das Zusammengehörige möglichst bei einander bleiben konnte.

Einen sehr wesentlichen Theil des Werks bilden endlich die Anhänge zu den einzelnen Abschnitten, welche nicht für den öffentlichen Unterricht bestimmt sind, und in die Alles verwiesen worden ist, was mehr die Anregung der Selbstthätigkeit der Schüler zum Zweck hat. Aber auch hier hat der Verfasser möglichst auf die Gruppirung von Sätzen und Aufgaben gesehen, und jeden Gegenstand als ein kleines abgeschlossenes Ganzes darzustellen versucht.

Den sehr reichen Inhalt der einzelnen Abschnitte und der Anhänge speciell anzugeben, verbietet uns hier leider die Beschränktheit des Raumes, weshalb wir aus diesem grossen Schatze nur Einiges herausgreifen, was uns besonders auch durch seine Neuheit bemerkenswerth zu sein scheint. Dahin gehören u. A. auf S. 122 vier neue allgemeine Congruenzsätze für Dreiecke, bei denen als drittes Element der Congruenzbedingungen die Gleichheit des Flächeninhalts hinzugezogen worden ist; S. 147 — S. 151 eine vollständige Zusammenstellung aller möglichen Coordinatenmethoden; Manches über die geometrischen Oerter und die harmonischen Beziehungen, wobei der Verfasser, auch um des Folgenden willen, mit Recht kein Bedenken trug, den Begriff des Sinus und Cosinus mit aufzunehmen; die an verschiedenen Stellen gegebenen Zusammenstellungen geometrischer Beziehungen, u. s. w. In den Anhängen ist auch auf das Rücksicht genommen worden, was von praktischer Bedeutung ist, z. B. auf die Theorie des Proportionalzirkels, des Pantographen oder Storchschnabels und des Nonius oder Verniers.

Schliesslich müssen wir noch einer sehr mühsamen, aber auch sehr verdienstlichen, und namentlich denen, welche ihre Zeit dem Studium der Werke der griechischen Geometer im Original widmen wollen, sehr nützlichen Arbeit gedenken, welcher sich der Verfasser unterzogen hat, indem derselbe nämlich in einer Ausdehnung, wie dies wohl noch nicht geschehen ist, überall die griechischen Kunstausdrücke nebst ihren lateinischen Bedeutungen aufgenommen hat. Die durch den Mangel an allen Vorarbeiten nur noch vergrösserte Schwierigkeit einer solchen Arbeit ist allein derjenige gehörig zu würdigen im Stande, welcher die Schriften der griechischen Mathematiker selbst aus den Originalen kennt.

Die auf ähnliche Art wie bei Kunze's Geometrie in grosser Sauberkeit ausgeführten Figurentafeln, welche auch bei anderen, vorzüglich für den Unterricht bestimmten Werken nachgeahmt zu werden verdienten, gereichen dem Werke ebenfalls zu besonderer Empfehlung.

Nochmals empfehlen wir dieses neue System der Geometrie, dessen Fortsetzung wir mit Verlangen entgegen sehen, allen denen angelegentlichst, welche sich für die Fortschritte dieser herrlichen Wissenschaft und deren ungemein grosse Wichtigkeit für das gesammte Unterrichtswesen interessiren.

Zugleich mit dem vorhergehenden Werke sind erschienen:

Vierstellige Logarithmen der natürlichen Zahlen und Winkelfunctionen nebst den Gaussischen und andern Hülfstafeln zur Auflösung der höhern numerischen Gleichungen und zur Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate von J. H. T. Müller, Schulrathe und Di-

rector des Gothaischen Realgymnasiums. Halle. 1844. 8 ggr.

Diese Tafeln enthalten:

1. Auf S. 1 die fünfstelligen Logarithmen der gerade am Häufigsten vorkommenden Zahlen von 10000 bis 15000.

2. Auf S. 2 und 3, also neben einander, die vierstelligen Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 10000.

3. Auf S. 4 bis 9 die Gaussischen Tafeln zur einen Hälfte in einer den Gebrauch wesentlich erleichternden Gestalt. Es verursachte nämlich bei der zeitherigen Einrichtung der Tafeln für $\log(a-b)$ wegen der doppelten Columnen nicht allein das Aufschlagen sondern auch die jedesmal aus zwei Rechnungen bestehende Interpolation mehr Zeitaufwand und grössere Aufmerksamkeit, indem die durch die Zwischenrechnung gefundene Zahl bald additiv, bald subtractiv war. Um dies zu vermeiden, hat der Verfasser die Werthe zu $\log(a-b)$ für gleichmässig fortschreitende Argumente neu berechnet, und dann mit den Matthiesen'schen Tafeln verglichen, wobei er, so wie auch hin und wieder bei der nachher zu erwähnenden Formelsammlung, von Herrn Director Hansen durch manchen Wink über die zweckmässige Einrichtung des Ganzen unterstützt wurde. Dadurch ist nicht nur das Aufschlagen, sondern auch das Einschalten erleichtert und letzteres durchgängig gleichförmig geworden.

4. S. 10 und 11 die vierstelligen Quadrate aller Zahlen von 0 bis 1 durch alle Zehntausendtel.

5. S. 12 bis 15 die Viertelquadrate aller Zahlen von 0 bis 2 durch alle Zehntausendtel, welche bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate, so wie der Gräfe'schen Methode zur Auflösung der numerischen Gleichungen, eine grössere Erleichterung als die Logarithmen gewähren.

6. Die Logarithmen der goniometrischen Functionen, welche in einer solchen Ausdehnung gegeben worden sind, dass sie, soweit dies bei vierstelligen Logarithmen möglich ist, eine Schärfe von 1 Secunde gewähren.

7. Eine Tafel der Kreisbogen in Theilen des Halbmessers $= 1$, so wie der wichtigsten Functionen von π.

8. Alle natürlichen goniometrischen Functionen von 30 zu 30 Minuten.

9. Eine kleine Tafel der dreistelligen Logarithmen, welche gerade noch Platz fand.

Eine sehr deutliche Anleitung zum Gebrauche der sämmtlichen Tafeln, so wie eine Sammlung der wichtigsten Formeln, auch für die ebene und sphärische Trigonometrie, ist der Schrift vorausgeschickt.

Durch die mühsame Zusammenstellung dieser so vieles Nützliche enthaltenden Sammlung abgekürzter Tafeln hat sich der Verfasser nicht bloss um die Schulen, für welche gerade eine solche Sammlung allerdings ein Bedürfniss war, sondern auch um viele Praktiker ein dankbar anzuerkennendes Verdienst erworben, und wir können daher nur wünschen, dass sein Fleiss, sein Eifer und seine Geschicklichkeit durch einen recht weit verbreiteten Gebrauch dieser auch äusserlich sehr gut ausgestatteten Tafeln die gebührende Anerkennung finden und einigermassen belohnt werden möge.

Grossmann: Genetisches Lehrbuch der ebenen Geometrie. Für Realschulen und Gymnasien. Mit 2 Tafeln. Stuttgart. 1845. 8. $\frac{3}{8}$ Thlr.

Löschke, K. A. J.: Geometrie für den Schul- und Privatgebrauch. 8. Schweidnitz. 1844. 8 ggr.

Lehrbuch der ebenen Geometrie. Von Dr. Chr. Nagel, Rector der Realanstalt in Ulm. 4te verbesserte und vermehrte Aufl. Mit 16 lithogr. Tafeln. Ulm. 1844. 20 ggr.

Lehrbuch der Stereometrie und der ebenen Trigonometrie. Von Dr. Ch. Nagel. I. Abth.: Stereometrie. II. Abth.: Ebene Trigonometrie. Zweite Auflage. Ulm. 1844. 8. 23 ggr.

Finck, P. J. E.: Géométrie élémentaire, suivie de la Trigonométrie rectiligne et sphérique. Troisième édition. In-8. Strassbourg. 1844. avec 12 pl. 4 fr.

Adhemar, J.: Descriptive Geometrie, deutsch bearbeitet mit Anwendung der isometrischen Projectionslehre von Mollinger. gr. 8. Mit 80 Tafeln in Folio. Solothurn. 1844. 8 Thlr.

Praktische Geometrie.

Littrow, J. J. v.: Vergleichung der vorzüglichsten Maasse, Gewichte und Münzen mit den im Oesterr. Kaiserstaate gebräuchlichen. 2te, für Decimal- und gewöhnliche Rechnung eingerichtete Auflage von L. v. Littrow. gr. 8. Wien. 1844. $\frac{3}{4}$ Thlr.
(Sehr vollständig und empfehlenswerth.)

Cubik-Knekt för Uträkning af Fyrkantigt och Rundt Wirke. Stockholm, Berg; 59 sid. 8:o, h. 36 sk. (Bokh. Westerlunds förl.)

André, E.: Kubik-Tabellen für alle runden Hölzer in denen man richtig und schnell ihren wahren Holzgehalt, in Kubik-Schuhen, findet. Lex. 8. Wien. 1844. 2 Thlr.

Pfeil, J. F.: Tabellen zur Berechnung des Kubikinhalts runder und vierkantig geschnittener Hölzer nebst Preisberechnungstabelle in Thaler- und Guldenwährung. Für Forstbeamte bearbeitet und mit einer Gebrauchsanweisung versehen. 8. Leipzig. 1844. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

Trigonometrie.

Recht, G.: Die Elemente der Trigonometrie und der Anwendung der Algebra auf Geometrie. gr. 8. München 1844. 12 ggr.

Mechanik.

Compendium der populären Mechanik und Maschinenlehre, von Adam Burg, k. k. Regierungsrathe, ordent. öffentl. Professor der Mechanik und Maschinenlehre am k. k. polytechnischen Institute in Wien. Erster Theil. Mechanik fester Körper. Beide Theile 4 Thlr.

Dieses in zweckmässiger Kürze abgefasste Compendium verdient seiner Deutlichkeit wegen vorzüglich Praktikern empfohlen zu werden, da es, ohne sich übrigens auf weitläufige Beschreibungen und Berechnungen zusammengesetzter Maschinen einzulassen, alle wesentlichen Grundlehren, auf die es bei Maschineneinrichtungen in den gewöhnlicheren Fällen ankommt, enthält. Dass die Anwendung des höheren Calculs überall vermieden worden ist, versteht sich von selbst. Der zweite Theil wird die Mechanik flüssiger Körper enthalten. Die schön ausgeführten Kupfertafeln sind in einem besonderen Hefte beigegeben.

Elementar-Lehrbuch der Mechanik fester Körper. Nach den neuesten Quellen für die k. k. Artillerieschulen bearbeitet von Anton Fink, Hauptmann und Professor der Mathematik im k. k. Bombardier-Corps. Wien. 1845. 8. 2 Thlr. 16 ggr.

Dies deutlich geschriebene Lehrbuch enthält eine grösstentheils analytisch gehaltene Darstellung der gewöhnlichen Lehren der Statik und Mechanik fester Körper, ohne Anwendung der Differential- und Integralrechnung, mit Rücksicht auf praktische Anwendung. Dass die Lehre von der Wurfbewegung und andere in der Artillerie besonders in Anwendung kommende Lehren der Mechanik ausführlicher als in anderen Elementar-Lehrbüchern dieser Wissenschaft behandelt worden sind, lässt die Bestimmung des Buchs schon von selbst erwarten. In der Statik geht der Verfasser von dem Parallelogramme der Kräfte aus, und hat sich bei der Darstellung dieses wichtigen Princips an den allgemein bekannten Beweis von Duchayla gehalten.

Biering's Mechanik. Heft 3. Kopenhagen. $\frac{2}{3}$ Rbd.

Buquoy, Prof. v.: Prodromus zu einer neuen verbesserten Darstellungsweise der höhern analyt. Dynamik. gr. 8. 2te Lieferung. 1844. 8 ggr.

(Erste Lieferung erschien 1842. 8 ggr.)

Coriolis, G.: Traité de la mécanique des corps solides et du calcul de l'effet des machines. Seconde édition. In-4., plus 2 pl. Paris. 1844. 15 fr.

Praktische Mechanik.

Schubert, J. A.: Elemente der Maschinenlehre. 2te Abtheil. Von der Bearbeitung fester Körper im Allgemeinen, von den einfachen Werkzeugen und von den Werkzeugsmaschinen. gr. 8. Mit 35 Tafeln in Fol. Dresden. 1844. 10 Thlr.

Astronomie.

Astronomische Briefe von J. H. Mädler. Mitau. 1844. 8. 18 ggr.

Diese astronomischen Briefe sind zuerst in den wissenschaftlichen Beilagen der Augsburger Allgemeinen Zeitung veröffentlicht worden, und erscheinen hier nochmals überarbeitet und vervollständigt in einer geordneten Sammlung.

Comte, Aug.: Traité philosophique d'astronomie populaire, ou Exposition systématique de toutes les notions de philososhie astronomique, soit scientifiques, soit logiques, qui doivent devenir universellement familières. In-8. plus une pl. Paris. 1844. 7 fr.

Biot: Traité élémentaire d'astronomie physique. 4 volumes in-8., avec 4 atlas. En vente: Tome I. 4me édition avec 10 planches. 7 fr. 50 c. Tome II. avec atlas de 23 pl. 12 fr.

Narrien, John: Practical Astronomy and Geodesy. 8. London. 1844.

Om Himmelskropparne och Deras Rörelse; eller De Första Grunderna af Astronomien Populärt Framställda af F. Arago. Öfwersättning af Clemens Ullgren. Calmar, Wåhlin; 279 sid. 8.o, med 5 pl., h. 1 R:dr 32 sk. (Bokh. Looströms förl.)

Kreil, K.: Beobachtungen über den grossen Kometen von 1843. gr. 4. 1844. 6 ggr.

Jahn, G. A.: Leipziger kleine astronomische Ephemeriden für das Jahr 1845. 8. Leipzig. 1844. 16 ggr.

Seidelin, J.: Tabel over Solens Declination og Tid-Equatio-

nen til hver Dags Sandmiddag og Middelmiddag, samt over Maanens ovre Culminations Middelklokkeslet for Greenwichs Meridian i 1846. 32 ss.

Littrow, E. L. v.: Kalender für alle Stände für das Jahr 1845. gr. 8. Wien. 1844. 10 ggr.
(Auf den nützlichen Inhalt dieses Kalenders ist schon früher mehrmals hingewiesen worden.)

Die Chronologie in ihrem ganzen Umfange, mit vorzüglicher Rücksicht auf ihre Anwendung in der Astronomie, Weltgeschichte und Urkundenlehre, nebst einem Vorschlage zu einer streng wissenschaftlich geregelten Zeitrechnung, durch höhere Arithmetik begründet und erläutert von Wilhelm Matzka, Dr. der Philosophie, k. k. öffentl. ordentl. Professor der Mathematik an der k. k. philosophischen Lehranstalt zu Tarnow. Wien. 1844. 8. 2 Thlr. 12 ggr.
Dieses mit dem grössten Fleisse und der grössten Sorgfalt ausgearbeitete Werk enthält eine vollständige Darstellung der mathematischen Chronologie und hilft einem wahren Bedürfnisse ab, da in Ideler's beiden bekannten Werken (Berlin 1825 und Berlin 1831), vortrefflich in ihrer Art, doch mehr das Historische als das Mathematische hervortritt. Ganz recht hat aber der Verfasser des vorliegenden Werks gethan, dass er, wie er auch in der Vorrede ausdrücklich erklärt, von der ihm durch Ideler dargebotenen historischen Grundlage bei seinen mathematischen Entwickelungen unmittelbar ausgegangen ist, da er in dieser Beziehung gewiss keinen besseren Gewährsmann finden konnte. Die Beschränktheit des Raums verbietet uns, den reichen Inhalt dieses Werks hier im Detail anzugeben; schwerlich wird aber Jemand in demselben über irgend einen Punkt vergeblich Belehrung suchen. Sehr zweckmässig sind unter dem Titel Vorbegriffe der Chronologie die Lehren der höheren Arithmetik oder der sogenannten Zahlenlehre, welche in der Chronologie vorzüglich zur Anwendung kommen, im Zusammenhange dargestellt worden, und dabei hat der Verfasser zugleich durch Einführung zweckmässiger, zum Theil neuer Bezeichnungen für möglichste Abkürzung der allgemeinen Rechnungen gesorgt. Dass in einem so speciell und gründlich wie das vorliegende seinen Gegenstand behandelnden Werke auch manche neue Untersuchungen nicht fehlen können, versteht sich von selbst, und als besonders verdienstlich müssen auch noch die meist neu entworfenen, in einem besondern Anhange beigefügten, so wie auch hin und wieder in dem Werke zerstreu't vorkommenden Hülfstafeln zur Abkürzung chronologischer Rechnungen hervorgehoben werden. Ausserdem ist das Werk auf schönes Papier vortrefflich gedruckt, und verdient daher nochmals in jeder Beziehung der Aufmerksamkeit der Leser des Archivs, auch ausserhalb Deutschland, empfohlen zu werden, da uns wenigstens auch in einer anderen Sprache kein so vollständiges und gründliches, die neueren Forschungen so sorgfältig und vielseitig berücksichtigendes Werk über mathematische Chronologie bekannt geworden ist.

Bobrik, Dr. Eduard: Handbuch der practischen Seefahrtskunde. Mit einer vollständigen Sammlung logarithmischer,

geographischer und astronomischer Tabellen, Kupfertafeln und Karten, und einem Wörterbuche der nautischen Kunstausdrücke in den verschiedenen europäischen Seesprachen. Zum Selbstunterrichte und für Lehrer in der geographischen und astronomischen Steuermannkunde, in der Journalführung, in der Zutakelung und Lenkung des Schiffs, oder in der practischen Schifferkunde, so wie in den Vorbereitungen durch mathematische und physische Geographie; durch Arithmetik, Geometrie; durch Hydrostatik, Hydrodynamik und Schiffbaukunde. 2 Bde. gr. 8. 8 Thlr.

Physik.

Baumgartner, A.: Die Naturlehre in ihrem gegenwärtigen Zustande mit Rücksicht auf mathematische Begründung. 8te Aufl. gr. 8. 2 Theile. Wien. 4 Thlr.

Diese bis jetzt erschienene erste Abtheilung der achten Auflage enthält die Einleitung und die zwei ersten Abschnitte des allgemein bekannten Werks.

Örsteds Naturlare, 2. H. Kopenhagen. 1844. 90 s.

Faraday, M.: Experimental Researches in Electricity. Vol. 2. 8. London. 1844. 9 sh.

Kreil, K.: Magnetische und meteorologische Beobachtungen zu Prag. 4ter Jahrgang. gr. 4. Prag. 1844. 3 Thlr. 12 ggr.

Der Kreislauf des Blutes und die Planetenbahnen. Ein physiologisch-mathematischer Versuch von Dr. med. König. Weissensee. 1844. 8. 15 ggr.

„Schon längst legte ich mir“, sagt der Verf. in der Vorrede, „in Erwägung der unleugbaren Thatsachen, dass das Blut in seiner Bahn oft in einer der Schwerkraft entgegengesetzten Richtung strömt, was weder durch Venenklappen, noch durch Saugkraft, noch durch die Muskelkraft des Herzens allein befriedigend zu erklären ist, und dass zweitens diese Bahn eine in sich selbst zurücklaufende geschlossene ist, die Frage vor, ob es nicht denkbar sei, dass es im menschlichen Körper eine, der allgemeinen Schwerkraft analoge Kraft gebe, durch deren Wirkung, gleichsam eine Art organischer Gravitation, der Blutumlauf so vermittelt werde, wie die Bahnen der Planeten, und welche daher den Menschen zu dem in der Wirklichkeit machte, wofür er schon so lange dem Namen nach gegolten hat, zu einem Mikrokosmus. Die Beobachtung, dass die Pulsfrequenzen sich umgekehrt verhalten wie die Quadratwurzeln aus den Körperlängen, musste mich in dieser Idee nur bestärken, denn, wenn man, wie es üblich ist, die Pulsfrequenz als einen Ausdruck für die Blutgeschwindigkeit ansieht, so enthält diese Beobachtung eine unmittelbare Bestätigung derselben. Dies gab dem nun folgenden Versuch, die erwähnte Hypothese durch Anwendung

auf einen concreten Fall so viel als möglich an den Prüfstein der Erfahrung zu legen, seine Entstehung."

So wenig ich selbst wegen Mangels an hinreichenden anatomischen und physiologischen Kenntnissen mir ein Urtheil über diese Schrift anmaassen darf, so glaube ich doch dem Verf. die Bemerkung schuldig zu sein, dass dieselbe, wie dies öfters bei solchen Schriften der Fall ist, keineswegs in das Gebiet luftiger naturphilosophischer Reflectionen gehört, sondern dass in derselben überall eine gesunde Anwendung mathematischer Sätze und Rechnungen hervortritt, und dass dieselbe daher wohl eine nähere Prüfung durch einen hinreichend mathematisch gebildeten Anatomen und Physiologen verdienen möchte, was ich dem Verf. schon um seines warmen Eifers willen, mit welchem er in der Vorrede der Anwendung der Mathematik in der Arzneiwissenschaft das Wort redet, von Herzen wünsche. Bei den Herren Aerzten wird er da freilich meistens tauben Ohren predigen. G.

Vermischte Schriften.

Jahresbericht für die Mitglieder der Hamburgischen Gesellschaft zur Verbreitung mathematischer Kenntnisse. Fastnacht. 1844.

Inhalt: Bericht über die zur Auffindung und Bezeichnung von Höhen in dem abgebrannten Theile der freien Hansestadt Hamburg ausgeführten und für den nicht abgebrannten Theil derselben vorgeschlagenen Nivellirungen. Von dem Herrn Ingenieur Röbbelin. — Nachtrag zu dem Aufsatze: „Ueber die Höhen einiger Gebäude in Hamburg, im Jahresbriefe für 1842." Von dem Herrn Conferenzrath Schumacher in Altona. — Tafeln zur Verwandlung Hamburgischer Gewichts-Einheiten in Französische und Englische, so wie umgekehrt.

Unterhaltungen aus dem Gebiete der Naturkunde von D. Fr. Arago. Aus dem Französischen übersetzt von Dr. E. F. Grieb. Sechster Theil. Schluss des Werkes. Stuttgart. 1844. 8. 1 Thlr. 23 ggr.

Dieser Theil enthält die von Arago gehaltenen historischen Lobreden auf Laplace (S. 1 — S. 9), Fourier (S. 10 — S. 22), Alexander Volta (S. 23 — S. 114), Thomas Young (S. 115 — S. 157), Humphry Davy (S. 158 — 188); ferner die Höhen der wichtigsten Punkte der Erde über der Meeresfläche (S. 189 — S. 196), Tafeln zur Verwandlung der Barometer- und Thermometerscalen (S. 197 — 199), und zur Verwandlung der französischen Maasse (S. 200 — S. 208). Hierauf folgt eine sehr ausführliche und mit grosser Sorgfalt verfasste Historisch-kritische Analyse des Lebens und der Arbeiten Sir William Herschel's (S. 209 — S. 489), und den Beschluss machen ein Aufsatz über die totale Sonnenfinsterniss vom 8ten Juli 1842 (S. 490 — 514), und der in der Sitzung der De-

putirtenkammer vom 16ten Mai 1842 von Arago erstattete Bericht über die neue, auf Staatskosten zu veranstaltende Ausgabe der mathematischen Werke des ehemaligen Institutsmitgliedes Laplace (S. 515 — S. 549). — Man sieht hieraus, dass in diesem Theile des Interessanten viel enthalten ist. Die Uebersetzung könnte hin und wieder etwas fliessender sein und weniger an das französische Original erinnern, liest sich jedoch im Ganzen gut.

Gruithuisen, Fr. v. P.: Naturwissenschaftlich-astronom. Jahrbuch für physische und naturhistorische Himmelsforscher und Geologen mit den für das Jahr 1846 vorausbestimmten Erscheinungen am Himmel. 7. Jahr. Mit 2 lithogr. Tafeln. 8. München. 1844. $2\frac{2}{3}$ Thlr.

Astronomisch-meteorologisches Jahrbuch für Prag von Karl Kreil. Vierter Jahrgang: 1845. Prag. 1844. 8. 1 Thlr. 8 ggr.

Ausser der gewöhnlichen astronomischen Ephemeride enthält dieser Jahrgang zwei grössere Abhandlungen unter den Titeln: Erläuterung des Jahrbuchs und Geschichte des Entstehens und der bisherigen Leistungen des magnetischen Vereins, von denen besonders der letztere vielfaches Interesse, und zwar nicht bloss für Laien in der Wissenschaft, darbietet. Der erste dieser beiden Aufsätze kann eigentlich als eine allgemein verständliche Erläuterung des Kalenders betrachtet werden, und wird daher auch für ein grösseres Publikum sehr lehrreich sein, so wie diesem Jahrbuche wegen seines allgemein lehrreichen und verständlichen Inhalts überhaupt eine möglichst grosse Verbreitung zu wünschen ist.

Mémoires de l'académie impér. des sciences de St. Petersbourg. 6 série, 1. partie: sciences mathémat. et physiques. Tome 4. in 6 livrais. 4. St. Petersburg. 1844. 6 Thlr. 18 ggr.

Nachricht.

Die Akademie der Wissenschaften zu Petersburg bereitet eine neue Ausgabe aller Werke Eulers vor. Die ganze Sammlung wird 25 bis 28 Bände in gross Quart umfassen, jeden zu 80 bis 90 Bogen, und soll in 10 Jahren vollständig erschienen sein. Die Herausgabe ist einer Commission übertragen, bestehend aus den Akademikern Fuss, Ostrogradsky, Struve, Lenz, Bouniakovsky und Jacobi. Besonders bemerkenswerth ist es, dass Herr Fuss eine grössere Anzahl noch ungedruckter und bis jetzt unbekannter Werke Eulers aufgefunden hat, welche der neuen Sammlung einverleibt werden sollen. Die Titel der wichtigsten dieser Werke sind folgende:

Fragmens de grands ouvrages.

1. Manuscrit sans titre, contenant les chapitres 1 à 16 d'un Traité de la théorie des nombres. 587 §§. 112 pages in-4. En latin.

2. Manuscrit sans titre, sur l'application du calcul différentiel à la géométrie des courbes, destiné, à ce qu'il paraît, à former la troisième partie des Institutiones calculi differentialis. L'enveloppe contient la table des chapitres 1 à 6, mais le 6me et la fin du 5me manquent. 179 §§. 104 pages in-4., et 8 feuillets de figures. En latin.

3. Manuscrit intitulé: Statica. 18 §§. de notions préliminaires, et 193 §§. sur l'équilibre des forces appliquées à un point. 68 pages in-4. En latin.

4. Manuscrit intitulé: Astronomia mechanica. Chapitre 1 à 7; 219 §§. et un appendice; le tout 182 pages in-4. et 4 feuillets de figures. En latin.

5. Manuscrit sans titre, renfermant les chapitres 1 à 7 d'un ouvrage de dioptrique. 141 §§. 88 pages in 4. et 3 feuillets de figures. En français.

6. Manuscrit intitulé: Théorie générale de la dioptrique. 186 §§. 48 pages in-4. et 2 feuillets de figures. En français.

„NB. Ces deux dernières pièces paraissent entièrement différentes et du grand ouvrage sur la dioptrique, publié en latin en 3 volumes, et du Précis d'une théorie générale de la dioptrique, inséré dans les Mémoires de l'Académie de Paris de l'an 1765. — Tous ces manuscrits en général quoique fragments, ne sont cependant pas des brouillons (à l'exception peut-être du No. 3), mais des copies nettes, très serrées, et tellement soignées qu'on peut les lire sans la moindre difficulté.

Mémoires.

1. Theorema arithmeticum ejusque demonstratio.
2. Considerationes circa analysin diophanteam.
3. Vera aestimatio sortis in ludis.
4. Réflexions sur une espèce singulière de lotérie nommée lotérie génoise.

XXII.

Literarischer Bericht.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Sédillot, M. L. A., Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux. Première livraison. In 8. 1844. Paris.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Wörterbuch der angewandten Mathematik. Ein Handbuch zur Benutzung beim Studium und praktischen Betriebe derjenigen Künste und Gewerbe, welche Anwendungen der reinen Mathematik erfordern. Zugleich als Fortsetzung des Klügel'schen Wörterbuchs der reinen Mathematik. Im Vereine mit mehreren Gelehrten und Praktikern herausgegeben von G. A. Jahn, Dr. philos. und Lehrer der Mathematik zu Leipzig. Erster Band. A—L. Mit acht Tafeln Abbildungen. Leipzig. 1845. 3 thlr. 18 ggr.

Als Klügel im Jahre 1803 sein mathematisches Wörterbuch begann, hatte er laut der Vorrede zum ersten Theile die Absicht, dasselbe in drei Abtheilungen herauszugeben, von denen die erste der reinen, die zweite der angewandten, die dritte der technischen Mathematik*) gewidmet seyn sollte. Es war ihm aber nur ver-

*) M. s. über diese Eintheilung den Artikel Mathematik im dritten Theile.

gönnt, die erste Abtheilung bis zu dem Buchstaben 𝔓 fortzuführen, und deren Vollendung anderen Händen zu überlassen, welche im Jahre 1834 erfolgte. Dreissig Jahre waren also seit dem Anfange dieser ersten, nebst den Supplementen aus acht Theilen bestehenden Abtheilung verflossen. Es ist schwer die Anzahl der Bände zu bestimmen, welche die angewandte und technische Mathematik umfasst haben würden. Aber zwölf sehr starke Bände hätte man doch mindestens nur auf die angewandte Mathematik, nämlich auf die mechanischen, optischen und astronomischen Wissenschaften rechnen müssen, wenn dieselben nur einigermassen in einer der in der ersten Abtheilung gegebenen Bearbeitung entsprechenden Weise hätten bearbeitet werden sollen. Ueber den Umfang der technischen Mathematik wagen wir hier gar kein Urtheil zu fällen. Ein Werk von solcher Ausdehnung, dessen Vollendung in einer kürzern Reihe von Jahren nach den bei der ersten Abtheilung gemachten Erfahrungen gar nicht abzusehen war, zu beginnen, musste namentlich bei den grossen Fortschritten, welche die angewandte Mathematik täglich macht, um so mehr sehr bedenklich erscheinen, weil in vielen Theilen eine scharfe Gränzlinie zwischen Mathematik und Physik gar nicht mehr zu ziehen ist, und ein vielfaches Hinüberstreifen in die letztere Wissenschaft, die schon ein vollständiges Wörterbuch besitzt, daher nicht wohl umgangen werden kann. Man konnte sich, wenn etwas geschehen sollte, nur darauf beschränken, wieder eine Theilung der angewandten Mathematik vorzunehmen, und besondere Wörterbücher der Mechanik, Optik und Astronomie herauszugeben, und sollte es noch einmal dazu kommen, dass eine dieser drei Abtheilungen wirklich in Angriff genommen würde, so würde dies jedenfalls zuerst die Astronomie sein, da für diese ein ausführliches Wörterbuch für Theorie und Praxis von vielen Seiten her als ein dringendes Bedürfniss erkannt wird, und in ihr nach der gegenwärtigen Lage der Sache wohl noch am Ersten eine gewisse Vollendung zu erreichen seyn dürfte. Aber auch schon diese Abtheilung allein, für welche bereits mancherlei Vorbereitungen, auch rücksichtlich der Herbeischaffung des literarischen Apparats gemacht worden sind, würde gewiss wenigstens sechs Bände umfassen. Das vorliegende jetzt bis zu dem Buchstaben 𝔏 fortgeschrittene Wörterbuch der angewandten Mathematik, welches sich auf dem Titel zugleich als eine Fortsetzung des Klügel'schen Wörterbuchs der reinen Mathematik ankündigt, soll die ganze angewandte und technische Mathematik umfassen, und ist im Ganzen auf 9 bis 10 Lieferungen, jede von etwa 10 Bogen, überhaupt also auf zwei mässig starke Bände berechnet, aus welchem geringen Umfange wohl schon von selbst hinreichend hervorgehen dürfte, dass dasselbe keineswegs als eine Fortsetzung des Klügel'schen Wörterbuchs im eigentlichen Sinne betrachtet werden kann, da es mit diesem in jeder Beziehung streng wissenschaftlichen, auch die Geschichte der Wissenschaft überall ausführlich berücksichtigenden Werke einen Vergleich nicht auszuhalten im Stande ist, wie jedem Unbefangenen der flüchtigste Blick in beide Werke auf der Stelle lehren wird.

Dieses unumwundene Urtheil glaubte der Unterzeichnete dem Klügel'schen Wörterbuche, ganz abgesehen von dem nicht unbedeutenden Antheile, welchen er selbst an diesem in der Wissen-

schaft einzig dastehenden Werke hat, und zugleich der Verlagshandlung, welche für dasselbe die grössten Opfer gebracht hat, schuldig zu sein, auch namentlich deshalb, weil eine Fortsetzung desselben in einer oder der anderen Weise von den unmittelbar dabei betheiligten Personen noch keineswegs gänzlich aufgegeben, sondern vielmehr neuerlich nur erst wieder in Anregung gebracht worden ist. Nur bedarf eben die Art und Weise der Fortsetzung die reiflichste Ueberlegung, und den Rath einsichtsvoller Männer, ehe man überhaupt wagen darf, Hand an's Werk zu legen.

Wenn nun aber auch das vorliegende Wörterbuch durchaus nicht eine Fortsetzung des von Klügel unternommenen Werks im eigentlichen Sinne genannt werden darf, so ist doch auf der andern Seite der Nutzen und die Verdienstlichkeit desselben, als selbstständiges für sich bestehendes Werk betrachtet, in gewisser Beziehung nicht zu verkennen. Dasselbe liefert über die sämmtlichen wichtigeren Theile der angewandten und technischen Mathematik ganz kurze Artikel, die nur selten theoretische Ausführungen enthalten, begnügt sich vielmehr meistens mit einer allgemeinen Erläuterung der Begriffe und blossen Angabe der wichtigsten, die unmittelbarste Anwendung gestattenden, und zu derselben nöthigsten Resultate, und dann mit der Angabe der besten Werke, in denen der Leser weitere Belehrung suchen kann, in welcher letzteren Beziehung, wie es scheint, ohne die literarischen Notizen auf eine oft sehr nutzlose Weise zu häufen, meistens eine verständige Auswahl getroffen worden ist. Jedoch ist dabei eine gewisse, in der Mehrzahl der Bearbeiter aber hinreichende Entschuldigung findende, Ungleichheit nicht zu verkennen, indem u. A. die zu den Kriegswissenschaften und der Feuerwerkerei gehörenden, und die kaufmännischen Artikel, meist mit einer weit grösseren Ausführlichkeit bearbeitet worden sind als die meisten eigentlich mathematischen Artikel, wofür sich viele in die Augen fallende Beispiele anführen lassen würden, wenn dies die uns hier gebotene Kürze gestattete. Ueberhaupt ist uns wenigstens das ganze Werk mehr in der Art eines mathematischen Conversations-Lexikons als eines die Wissenschaft nach allen Seiten hin ergründenden Werks, wie doch das Klügel'sche Wörterbuch seiner ganzen Anlage nach ist und sein soll, erschienen. Aber gerade deshalb kann dasselbe für einen Jeden, der eine augenblickliche kurze Belehrung über irgend einen Gegenstand wünscht, in vielen Fällen recht nützlich sein und überhaupt in einem gewissen Kreise recht vortheilhaft wirken und zur weitern Verbreitung der Wissenschaft beitragen, weshalb wir es besonders allen denjenigen empfehlen, die nicht Mathematiker von Profession sind, aber doch für die gewöhnlichern Anwendungen der Mathematik ein lebendiges Interesse haben, namentlich auch allen Praktikern und Künstlern, so wie unter den Lehrern der Mathematik an höheren Unterrichtsanstalten vorzugsweise denen, welche, wie dies häufig der Fall ist und begreiflicherweise sein muss, ihre Studien hauptsächlich der reinen Mathematik zugewandt haben, aber doch bei ihrem ihnen meistens nur wenig freie Zeit übrig lassenden mathematischen und physikalischen Unterrichte öfters in den Fall kommen dürften, eine augenblickliche nur wenig Zeit in Anspruch nehmende nicht tiefer eingehende Belehrung über einen Gegenstand der angewandten oder

technischen Mathematik in möglichster Kürze für die Zwecke des Unterrichts zu wünschen. Bei der Schnelligkeit, mit denen die fünf Lieferungen des ersten Bandes auf einander gefolgt sind, lässt sich auch einer baldigen Vollendung des zweiten Bandes, den wir seiner Zeit gleichfalls in diesem literarischen Berichte anzeigen werden, wohl mit Sicherheit entgegen sehen; und gewiss wird dieses Werk seiner ganzen vorher näher charakterisirten Anlage nach das Seinige zu der sehr zu wünschenden immer grösseren Verbreitung mathematischer Kenntnisse in den gewöhnlichern Kreisen des Lebens beitragen, weshalb wir ihm möglichst schnellen Fortgang wünschen. Die äussere Ausstattung ist sehr anständig. In dem ersten Bande haben wir u. A. in dem ziemlich ausführlichen, auch die neueren Untersuchungen berücksichtigenden, und zu dem besten im ganzen Buche gehörenden Artikel „Linsengläser“ die Figuren auf den dem ersten Bande beigegebenen acht Figurentafeln vermisst, die daher in dem zweiten Bande noch nachzuliefern sein werden.

G.

Arithmetik.

Theorie der periodischen Decimalbrüche nebst Tabellen zur leichten Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Decimalbrüche. Von Dr. E. H. Nagel, Rector der Realschule in Ulm. Ulm. 1845. 8. 20 ggr.

Durch Abfassung dieses Schriftchens, in welchem man die Theorie der periodischen Decimalbrüche auf eine sehr fassliche Weise vollständiger entwickelt findet als in den Lehrbüchern der Arithmetik, so wie durch die angehängten Tafeln, hat sich der Herr Vf. um den arithmetischen Unterricht auf Schulen ein Verdienst erworben.

Peto, T., neue Potenziallehre sammt dem Beweise der Unrichtigkeit der von den Mathematikern bis jetzt angenommenen Definition vom Potenziren. Oedenburg. 1844. 6 ggr.

J. G. Arbon, (Lector in de Wis- en Zeevaartkunde by de Koninklyke Marine, Honorair Lid van de Commissie tot het examineren der Zee-Officieren, enz.) Verhandeling over de binomiaal coefficienten, bevattende een aantal merkwaardige eigenschappen van dezelve, benevens eene beknopte theorie der getallen-reeksen, naar de binomiaal-wet geordend; gr. 8. Te Rotterdam, by de Wed. A. H. Krap. 1844. f 2, 40.

San-Matino, Agatino, Demonstrazione del teorema fondamentale della teoria delle funzioni analitiche di Lagrange. Catania. In 8.

Jerome de la Lande's logarithmisch trigonometrische Tafeln. Vermehrt durch die Tafeln der Gaussischen Logarithmen; durch die Logarithmen der Atomgewichte unzerlegter und einiger zusammengesetzten chemischen Stoffe; durch die Logarithmen anderer Zahlen, die in der Chemie und Physik oft gebraucht werden und durch einige mathematische Formeln. Herausg. von Heinr. Gottl. Köhler. 2. Stereotypausg. 16. Leipzig 1844. 14 ggr.

Geometrie.

Wolff, F., Lehrbuch der Geometrie. 1. Theil. Ebene Elementar-Geometrie, Trigonometrie, Theilungslehre. 4. verb. Auflage, mit 7 lithogr. Tafeln. Berlin 1845. gr. 8. 1 thlr. 16 ggr.

Nagel, Dr. Chr., Lebrbuch der ebenen Geometrie. Ulm 1844. 20 ggr.

Kauffmann, E. F., Lehrbuch der Stereometrie. Zum Gebrauche beim Unterricht in Realschulen und Gymnasien, sowie zum Selbstunterricht. 2. verbesserte u. verm. Aufl. Mit 4 Kupfertafeln. Stuttgart 1844. 8. 18 ggr.

Lehrgebäude der niederen Geometrie. Für den Unterricht an Gymnasien und höheren Realschulen entworfen von Carl Anton Bretschneider, Professor am Realgymnasium zu Gotha. Mit neun in Kupfer gestochenen Figurentafeln. Jena 1844. 2 thlr. 16 ggr.

So weit es die Beschränktheit des uns hier verstatteten Raumes erlaubt, wollen wir versuchen im Folgenden den Lesern des Archivs eine möglichst klare Anschauung von diesem in vielen Beziehungen ausgezeichneten Werke zu verschaffen, welches der Aufmerksamkeit nicht bloss aller Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten, sondern überhaupt aller Derer, welche sich für die Fortschritte der Geometrie in formeller und materieller Beziehung interessiren, sehr empfohlen zu werden verdient.

In einer kurzen Einleitung wird von den Grundbegriffen und der Eintheilung der Geometrie gehandelt, und eine Uebersicht der wichtigsten Sätze aus der allgemeinen Grössenlehre gegeben, welche in der Geometrie zur Anwendung kommen. Den ganzen Stoff der niederen Geometrie theilt der Vf. in zwei Abtheilungen, welche mit den Namen Synthetische Geometrie und Analytische Geometrie bezeichnet werden, und jede dieser beiden Abtheilungen zerfällt in drei Bücher, nämlich die Synthetische Geometrie in die Geometrie der Lage, die Geometrie der Gestalt und die Geometrie des Maasses; die Analytische Geometrie in die Goniometrie, Trigonometrie (ebene und sphärische), und die Coordinaten-Geometrie mit Einschluss der Lehre von den Kegelschnitten. Fünf Anhänge beschliessen hierauf das Werk: I. Die wich-

tigsten geometrischen Constructionen in der Ebene. II. Von den geometrischen Oertern in der Ebene, und von den Kegelschnitten insbesondere. III. Von der Methode der Projectionen und einigen damit zusammenhängenden Gegenständen. IV. Von der Quadratur der Parabel und Ellipse. V. Bestimmung des Flächeninhalts sphärischer Dreiecke und Polygone.

Schon aus dieser allgemeinen Angabe des Inhalts sieht man, dass der Vf. sich eine systematische Behandlung der Geometrie zu einer ganz besondern Aufgabe gemacht, und nach einer möglichst einfachen und naturgemässen Verknüpfung der einzelnen Sätze vorzüglich gestrebt hat, weshalb er denn auch den seit alter Zeit herkömmlichen Unterschied zwischen ebener Geometrie und Stereometrie gleich von vorn herein ganz aufgegeben hat, was gewiss in der vorher angegebenen Rücksicht nur vollkommen gebilligt werden kann. Alle einzelnen Kapitel sind sehr vollständig, jedoch meistens in der Art bearbeitet worden, dass die betreffenden Fundamentalsätze, welche Jeder unbedingt kennen muss, von der weiteren Ausführung des Gegenstandes getrennt worden sind, was jedenfalls dem Unterrichte sehr förderlich sein muss und den erfahrenen Lehrer bekundet. Ihrer grossen praktischen Wichtigkeit wegen sind die Goniometrie und Trigonometrie besonders ausführlich dargestellt, und der ersteren ist die ihr vollkommen zustehende Würde einer für sich bestehenden selbstständigen Wissenschaft mit Recht gesichert worden. Einen geringeren Raum hat der Vf. dagegen für die Coordinaten-Geometrie in Anspruch genommen. Die Anhänge enthalten vieles aus der sogenannten neueren Geometrie, und in Bezug auf dieselben muss noch besonders lobend hervorgehoben werden, dass in dem zweiten Anhange die drei Kegelschnitte als Oerter in der Ebene rein geometrisch betrachtet worden sind, da nach unserer Ueberzeugung eine rein geometrische Darstellung der Lehre von den Kegelschnitten überall einen wesentlichen Theil des mathematischen Elementar-Unterrichts bilden sollte, weshalb wir auch gewünscht hätten, dass der Vf. diesem Anhange eine noch etwas grössere Ausführlichkeit gegeben hätte.

Dass es an vielen eigenthümlichen Darstellungen und Ausführungen nicht fehlt, versteht sich bei diesem Vf., dessen frühere sämmtlich durch besondere Eleganz und Nettigkeit sich auszeichnende geometrische und namentlich trigonometrische Arbeiten bekannt genug sind, von selbst, weshalb wir uns begnügen, in dieser Beziehung hier nur Zweierlei hervorzuheben, ohne damit sagen zu wollen, dass nicht noch andere ganz eben so empfehlenswerthe Ausführungen an vielen Stellen des Buchs anzutreffen sein sollten. Einmal meinen wir die Lehre von der Lage der Geraden und Ebenen im Raume, welche der Vf. ohne alle anderen Hülfsmittel als die bekannten Sätze von den Winkeln und Parallellinien durchgeführt hat; und dann die in den Vorbemerkungen zu der analytischen Geometrie gegebene Entwickelung der geometrischen Bedeutung der negativen und imaginären Zahlen, die übrigens, wie der Vf. in der Vorrede auch selbst sagt, ihren eigentlichen Urheber nicht verleugnet.

Die Vorrede enthält mehrere sehr richtige pädagogische Bemerkungen und darf bei'm Lesen des Buchs nicht überschlagen werden. Da das Buch bei dem geometrischen Unterrichte auf dem

Realgymnasium zu Gotha als Lehrbuch zum Grunde gelegt werden soll, so muss dies wegen der Reichhaltigkeit seines Inhalts ein sehr gutes Vorurtheil für den Zustand des mathematischen Unterrichts auf dieser Lehranstalt erwecken.

Die äussere Ausstattung ist, auch was die Figurentafeln betrifft, in jeder Beziehung ausgezeichnet.

Catalan, Eugène, Elémens de Géométrie, avec planches. Paris 1843. 5 fr. 50 c.

Lardner, Dr., Treatise on Geometry and its Application to the arts. London 1844. 8. with 200 figures. 6 sh.

Newman, F. W., The Difficulties of Elementary Geometry, especially those which concern the Straight Line, the Plane, and the Theory of Paralles. Oxford 1844. 8. 5 sh.

Kuhn, C., Descriptive Geometrie. Mit Einschluss der Principien der Isometrischen Projectionslehre, für Schulen und zum Selbstunterrichte. Mit 60 Tabellen gravirter Constructionen. Gross Median-Quart-Velin. Augsburg 1844. 3 thlr.

Olivier, Th., Cours de Géométrie descriptive. 2ème Partie avec Atlas 4. Paris 1844.

Boucharlat, J. L., Théorie des Courbes et des Surfaces du second Ordre, ou traité complet d'application d'Algèbre à la Géométrie. Paris 1844.

Praktische Geometrie.

Die praktische Geometrie ohne Instrumente. Mit einem Anhange enthaltend: Kreisbogen und Segmenten-Tabellen nebst einer Aufgabe aus der Markscheidekunst. Ein nützliches Taschenbuch für praktische Geometer, von Friedrich Pross, Professor der Mathematik an der Königl. polytechnischen Schule zu Stuttgart. Mit 5 Figurentafeln. Stuttgart 1844. 20 ggr.

Diese kleine Schrift scheint uns nicht bloss für praktische Geometer, sondern auch für Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten empfehlenswerth zu sein, weil letztere darin manche zweckmässige Uebungsaufgaben für ihre Schüler finden werden. Der Inhalt derselben ist folgender: Lehrsätze aus der theoretischen Geometrie, das Ziehen und Ausstecken gerader Linien, das Bestimmen der Distanzen, das Errichten und Fällen der Perpendikel, das Ausmessen und Ausstecken der Winkel, das Ziehen der Parallellinien, das Ausmessen der Figuren, das Vertheilen der Flächen, Kreisbogen- und Segmenten-Tafeln, eine Aufgabe aus der Markscheide-

kunst. Bei der Lösung aller dieser Aufgaben bedient sich der Herr Vf. keiner anderen Instrumente als der Kette und Stäbe, und ist wegen dieser geringen praktischen Hülfsmittel natürlich genöthigt, überall die besondere Hülfe der Geometrie in Anspruch zu nehmen, aus welchem Grunde eben fast alle diese Aufgaben, wie schon oben bemerkt wurde, sich zu zweckmässigen geometrischen Uebungen für Schüler eignen. Unter den vorbereitenden geometrischen Lehrsätzen finden sich einige an sich bemerkenswerthe Sätze, und vorzüglich nimmt der Herr Vf. von dem folgenden Satze seinen Auslauf: Wenn zwei Dreiecke einen gleichen Winkel haben, oder wenn ein Winkel des einen Dreiecks einen Winkel des andern zu zwei Rechten ergänzt, se verhalten sich die Producte der diese Winkel einschliessenden Seiten wie die Ueberschüsse der Summen der Quadrate dieser Seiten über das Quadrat der dritten Seite. — Eine noch grössere Mannigfaltigkeit würde der Herr Vf. den behandelten Aufgaben und deren Auflösungen haben geben können, wenn er sich an Instrumenten ausser der Kette und der Stäbe noch den Gebrauch des eben so einfachen als in der Praxis nützlichen Winkelkreuzes oder der Kreuzscheibe (equerre d'arpenteur) gestattet hätte. Endlich wollen wir noch bemerken, dass eine gleiche Tendenz mit der vorliegenden Schrift ein anderes schönes, aber wohl nur wenig bekannt gewordenes Werkchen hat, welches ebenfalls der Aufmerksamkeit der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten bei dieser Gelegenheit recht sehr empfohlen zu werden verdient, und folgenden Titel führt: Solutions peu connues de différens problèmes de Géométrie pratique; pour servir de supplément aux Traités connus de cette Science; recueillies par F. J. Servois, Professeur de Mathématiques aux Ecoles d'Artillerie. A Metz et a Paris. An XII. In dieser Schrift, in welcher sich mehrere elegante Auflösungen geometrischer Probleme finden, gestattet sich der Vf. den Gebrauch der Piquets ou Jalons avec le Cordeau ou la Chaine und tout au plus des Equerre d'Arpenteur (p. 1.).

Trigonometrie.

Steiner, Elemente der ebenen Trigonometrie u. d. Stereometrie. Breslau 1844. 8. 10 ggr.

—

Lehrbuch der ebenen Trigonometrie für die oberen Klassen höherer Lehranstalten, so wie für den Selbstunterricht. Nach einer streng wissenschaftlichen Methode bearbeitet und mit einem Anhange versehen von Dr. August Wiegand. Halle 1845. 8. 8 ggr.

Ein kurzes, aber recht deutliches Lehrbuch der ebenen Trigonometrie, in welchem der Herr Vf. sich neben der Strenge der Beweise namentlich auch deren Allgemeinheit hat besonders angelegen sein lassen.

Meyer, A., Leçons de trigonométrie sphérique. In 8. avec une planche. Bruxelles 1844.

Die Gauss'schen Gleichungen der Bogendreiecke und zwei merkwürdige Sätze vom Raum. Vom Professor Dr. Georg Paucker. Mitau 1844. 8. 9 ggr.

Eine schöne kleine Schrift, die insbesondere auch der Aufmerksamkeit der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten empfohlen zu werden verdient. Der Herr Vf. giebt in derselben zuerst einen eleganten geometrischen Beweis der Gausssischen Gleichungen, die unsers Wissens bisher wohl nur analytisch bewiesen worden sind, und entwickelt dann ebenfalls grösstentheils nur durch geometrische Betrachtungen verschiedene, besonders aber zwei oder drei merkwürdige Sätze, von denen der erste S. 30. auf folgende Art ausgedrückt wird: Der sechsfache Inhalt des Raumvierecks, mit dem Halbmesser der umschriebenen Kugel verbunden, giebt eine Grösse, welche auf dieselbe Art aus den drei Verbindungen der Gegenkanten zusammengesetzt ist, wie der Inhalt eines ebenen Dreiecks aus den drei Seiten. Der Herr Vf. sagt, dass er diesen Satz bereits im Jahre 1813 bei Gelegenheit der Ausarbeitung seines stereometrischen Hefts für das Gymnasium zu Mitau gefunden, seine Bekanntmachung damals aber unterlassen habe, weil er ihm in seiner Abfassung zu vereinzelt erschien; seitdem habe ihn auch Herr Professor Bretschneider zu Gotha seinerseits gefunden und in diesem Archiv. Thl. I. S. 6. bekannt gemacht, jedoch ohne die in der vorliegenden Schrift gegebenen geometrischen Beweise. Einen zweiten Satz vom Parallelepipedon drückt der Herr Vf. S. 35. auf folgende Art aus: Die Endflächen und Querflächen (Diagonalparallelogramme) eines Scheibenraums (Parallelepipedums) stehen in denselben Beziehungen zu einander wie die Seiten und Querbänder (Diagonallinien) einer Zeilung (Parallelogramms). Ein dritter Satz endlich wird S. 37. auf folgende Art ausgedrückt: Der Inhalt eines Scheibenraums, mit dem Halbmesser desselben verbunden, giebt eine Grösse, welche auf dieselbe Art aus den drei Querflächen zusammengesetzt ist, wie der Inhalt eines Dreiecks aus den drei Seiten. Insbesondere auch wegen der Zierlichkeit der in derselben angestellten geometrischen Betrachtungen wünschen wir nochmals, dass diese kleine Schrift von den Lehrern an höheren Unterrichtsanstalten nicht unbeachtet bleiben möge.

Praktische Mechanik.

Schubert, J. A., Elemente der Maschinenlehre. 1. Theil. 2. Dresden 1844. 10 thlr.

Lehrbuch der Anwendung der Mechanik auf Maschinen. Von J. V. Poncelet. Deutsch herausgegeben von Dr. C. H. Schnuse. Erster Band. Mit acht lithographirten Tafeln. Darmstadt. 1845. 8. 3 thlr.

Dieses Werk eines der ersten französischen Mathematiker, der sich nicht bloss um die Mechanik, sondern bekanntlich insbesondere auch um die Geometrie die grössten Verdienste erworben hat, verdiente eine Verpflanzung auf deutschen Boden vollkommen, weil in unserer Literatur schwerlich ein eben so treffliches, mit wissenschaftlicher Strenge abgefasstes, Lehrbuch der praktischen Mechanik existiren dürfte, und weil durch die Uebersetzung gewiss insbesondere manchem Praktiker ein angenehmer Dienst geleistet werden wird, auch überhaupt die, durch den hohen Preis des Originals erschwerte, möglichst grosse Verbreitung dieses vorzüglichen Werks sehr zu wünschen ist. Die äussere Ausstattung der Uebersetzung ist in jeder Beziehung vorzüglich, und wir sehen der Fortsetzung mit Verlangen entgegen.

Moseley, H., Illustrations of practical Mechanics. London 1844. 8. with numerous woodcuts. 8 sh.

Optik.

Brewster, D., Treatise on Optics, new Edition. London 1844. with 176 woodcuts. 6 sh.

Rosse, Earl of, The Monster Telescopes with an Account of the Manufacture of the Specula, and full Descriptions of all the Machinery connected with there Instruments. 8. Illustr. with engravings. London 1844. 2 s. 6 d.

Astronomie.

Fleischhauer, Versuch einer gemeinfasslichen, nur auf Elementarkenntnisse gegründeten Volkssternkunde für Schule und Haus. Nach den neuesten Ergebnissen astronom. Forschungen bearbeitet. Erster Theil: Die Sonnenweltordnung. Mit einem biogr. Anhange älterer und neuerer Astronomen und Mathematiker. 12. Darmstadt 1844.

Diesterweg, F. A. W., Lehrbuch der mathematischen Geographie und populären Himmelskunde. Zum Schulgebrauch und Selbstunterricht. Mit 5 Tafeln und 3 Sternkarten. 2. verm. und verb. Aufl. 8. Berlin 1844. 1 thlr. 4 ggr.

Wöckel, Populäre Vorlesungen über die Sternkunde. Nürnberg 1844. 1 thlr. 16 ggr.

Herschel, John, Treatise on Astronomy, new Edition. 8. London 1844. 6 sh.

Dent, Edward J., Le Dipleidoscope, ou Instrument méridien, breveté. 8. Paris 1845.

Pearson, W., An Introduction to the practical astronomy. 2. vol. London 1844. 4. with Pl. 7 L. 7 s.

Plantamour, E., Observations astronomiques faites à l'observatoire de Genève, dans l'ânnée 1841, 42., 43. 4. Genf 1844. 3 thlr.

Plantamour, E., Resultats des Observations magnétiques faites à Genève dans les ânnées 1842, 43. gr. 8. Genf 1844. 1 thlr. 16 ggr.

Smyth, W. H., Cycle of Celestial Objects, for the Use of Naval, Military, and Private Astronomers. Observed, reduced, and discussed. 2 vols. 8. London 1844. 2 L. 2 s.

Karsten, H., kleiner astronomischer Almanach auf das Jahr 1845. Rostock 1844. 12 ggr.

Almanacco nautico per l'anno 1845, publicato dell'ingegnere dottor Vincenzo Gallo. Anno quinto. Triest 1844. In 8. Con e tavola incisa.

Verzeichniss geographischer Ortsbestimmungen nach den neuesten Quellen und mit Angabe derselben von C. L. v. Littrow, Director der k. k. Sternwarte zu Wien und Professor der Astronomie an der Universität. Aus dem neuen physikalischen Wörterbuche besonders abgedruckt. Leipzig 1844. 526 Seiten. 8. 2 thlr. 12 ggr.

Dies ist jedenfalls das vollständigste Verzeichniss geographischer Längen und Breiten, welches die gesammte geographische Literatur bis jetzt besitzt, und mit grosser Mühe und Sorgfalt zusammengestellt, wodurch der Herr Vf. sich ein grosses Verdienst um die Wissenschaft erworben hat; dasselbe wird künftig ein unentbehrliches Hülfsmittel für jeden Geographen, Astronomen und Physiker sein, und in den Händen keines dieser Gelehrten fehlen dürfen, wenn namentlich, was sehr zu wünschen ist, der Herr Vf. sich entschliesst, von Zeit zu Zeit Nachträge zu demselben zu liefern, insofern späterhin, wie dies kaum anders sein kann, theils ganz neue, theils genauere Bestimmungen zu seiner Kenntniss gelangen. Die Einrichtung dieses Verzeichnisses ist sehr bequem. Zuerst folgen ohne Rücksicht auf die Erdtheile und einzelnen Länder die verschiedenen Orte in alphabetischer Ordnung auf einander, und daneben in vier Rubriken: 1) die nördliche oder südliche Breite; 2) die östliche oder westliche Länge von Paris in Bogen und, was besonders des astronomischen Gebrauchs wegen sehr zu loben ist, 3) auch in Zeit; 4) die Angabe

der Autorität oder der Quelle der aufgeführten Bestimmungen. Dann sind in einem zweiten Verzeichnisse die verschiedenen Orte nach den Erdtheilen und einzelnen Ländern wieder in alphabetischer Folge zusammengestellt, natürlich ohne neue Angabe der Längen und Breiten, da diese in dem ersten alphabetischen Verzeichnisse leicht aufgeschlagen werden können. Dass der Herr Vf. sich eifrig bemüht hat, überall aus den besten Quellen zu schöpfen, und dass zu der Abfassung dieses Werks die Herbeischaffung eines sehr bedeutenden literarischen Apparats nöthig gewesen ist, sieht man aus der den beiden alphabetischen Verzeichnissen vorausgeschickten Uebersicht der Verweisungen; aus der Vorrede ergiebt sich aber, dass dabei auch ein ausgedehnter Briefwechsel und gelegentliche Nachforschungen auf Reisen erforderlich gewesen sind, wodurch der Werth des Buchs nur erhöhet werden muss. Bei dem Anblicke dieses so vollständigen Verzeichnisses der Längen und Breiten lässt sich schwer der Wunsch unterdrücken, dass immer mehr vervielfältigte hypsometrische Bestimmungen den Herrn Vf. in den Stand setzen möchten, durch ein eben so ausführliches Verzeichniss der Höhen über der Meeresfläche, als der dritten Coordinaten, welche zur vollkständigen Bestimmung der Lage eines Orts auf der Erde noch nöthig sind, das sich bereits erworbene Verdienst noch zu erhöhen.

Handbuch der Schifffahrts-Kunde, mit einer Sammlung von Seemanns-Tafeln, einer See-Karte und einer magnetischen Karte. Im Auftrage der Hamburgischen Gesellschaft zur Verbreitung mathematischer Kenntnisse verfasst von C. Rümker, Director der Sternwarte und Navigations-Schule in Hamburg. Vierte Auflage. Hamburg 1844. 5 thlr.

Da dieses Buch, wenn auch in dem Kreise, für welchen es zunächst bestimmt ist, wie schon die wiederholten Auflagen deutlich genug zeigen, bekannt genug, doch nicht zur Kenntniss sehr vieler Leser des Archivs gelangen möchte, so dürfte hier eine etwas ausführlichere Anzeige desselben wohl am Orte sein, da es allerdings, besonders in der ihm von Herrn Director Rümker in dieser vierten Auflage gegebenen neuen Gestalt, recht sehr verdient, in einem grössern Kreise bekannt und auch von Lehrern an höheren Unterrichtsanstalten überhaupt nicht unbeachtet gelassen zu werden.

Dem ganzen Werke ist eine für den beabsichtigten Zweck gewiss völlig ausreichende, in der vorliegenden neuesten Ausgabe viel vollständigere, und dem gegenwärtigen Zustande der Wissenschaft weit mehr als in den älteren Ausgaben sich anschliessende Darstellung der ebenen und sphärischen Trigonometrie vorausgeschickt, wogegen, was jedenfalls nur vollkommen gebilligt werden kann, die in den älteren Ausgaben sich findende Einleitung in die Arithmetik und Geometrie ganz weggelassen worden ist, da es andere Bücher genug giebt, aus denen die Schüler der Navigationsschulen diese Dinge auch ganz so, wie sie dieselben für ihren nächsten Zweck gebrauchen, erlernen können. Bei der Entwickelung der Beweise der Sätze in beiden Trigonometrieen hat der Herr Vf. sich hauptsächlich der constructionellen Methode bedient, wie Jeder weiss, der die Bedürfnisse und Wünsche der Schiffer in diesen

Dingen einigermassen kennt, ganz in deren Interesse, da von dieser sehr achtbaren, meist mit einem sehr gesunden Verstande begabten Klasse von Leuten, wenn sie überhaupt sich wissenschaftlichen Bestrebungen hingeben, stets eine vollkommen deutliche und klare, dabei aber auch möglichst anschauliche Einsicht in die Natur des Gegenstandes verlangt wird. Unter den von dem Herrn Vf. gegebenen geometrischen Darstellungen finden sich, namentlich in der sphärischen Trigonometrie, mehrere, die auch in einem weiteren Kreise bekannt zu werden verdienen, so wie auch eine grosse Anzahl vollständig ausgeführter numerischer Beispiele, die von allen Lehrern an höheren Unterrichtsanstalten bei ihrem trigonometrischen Unterrichte vortheilhaft benutzt werden können. — Auf die Trigonometrie folgt die Steuermanns-Kunde, und wir können allen Lehrern, keineswegs bloss denen an Navigationsschulen, die Versicherung geben, dass sie in diesem Abschnitte eine nicht geringe Anzahl allgemein interessanter trigonometrischer Aufgaben finden werden, u. A. die in dem Aufsatze Nr. XXX. in diesem Hefte des Archivs behandelte Aufgabe, für welche Herr Director Rümker sowohl S. 72. eine eigne, als auch S. 81. eine von Herrn Hofrath Gauss ihm mitgetheilte elegante Auflösung gegeben hat. Sämmtliche Aufgaben in diesem, so wie überhaupt in allen Abschnitten sind durch vollständig ausgerechnete Beispiele erläutert. — Auf die Steuermanns-Kunde folgt unter der Ueberschrift Astronomische Vorkenntnisse eine sehr deutliche, durch sehr gute Zeichnungen erläuterte Darstellung aller derjenigen Lehren der Astronomie, welche vorzüglich bei Beobachtungen nöthig sind, wobei wieder viele schöne durch numerische Beispiele erläuterte Aufgaben vorkommen, u. A. S. 151. des Pothenot'schen Problem auf der Sphäre, mehrere Aufgaben von Gauss u. dergl. — Auf diesen Abschnitt folgt nun der letzte ausführlichste und wichtigste Theil des Werks, welcher unter der Ueberschrift Astronomische Schiffs-Rechnung eine sehr ausführliche, im höchsten Grade deutliche und durch eine Menge ausgerechneter Beispiele erläuterte Darstellung der nautischen Astronomie enthält, wobei wir aber bemerken müssen, dass wir der Meinung sind, dass es überhaupt für alle diejenigen, welche, bloss mit transportabeln Instrumenten ausgerüstet, sich astronomischen Beobachtungen, namentlich Zeit, Längen- und Breitenbestimmungen widmen wollen, kaum einen besseren praktischen, immer aber auf die strenge Theorie zurückgehenden Wegweiser geben dürfte, als diesen Theil des vorliegenden Handbuchs, weshalb wir dasselbe namentlich auch allen Lehrern der Mathematik empfehlen, die in demselben Alles mit grösster Deutlichkeit dargestellt finden werden, was für den vorher näher bezeichneten Zweck in Bezug auf die zweckmässigsten Beobachtungs- und Rechnungsmethoden, so wie auf Kenntniss des Gebrauchs und der Berichtigung der Instrumente zu wissen nöthig ist. — Eine sehr vollständige Sammlung nautischer Tafeln (XXXVI Tafeln auf 531 Seiten) beschliessen das Werk, von denen wieder ganz dieselbe Bemerkung gilt wie vorher, dass diese Tafeln nämlich, die wir leider der Beschränktheit des Raums wegen hier nicht einzeln anführen können, überhaupt eine für alle Beobachter mit transportabeln Instrumenten sehr nützliche Sammlung astronomischer Tafeln bilden.

Einiges dem Herrn Verfassers vorzugsweise Eigenthümliche ist schon vorher hervorgehoben worden. Die Beschränktheit des Raums erlaubt uns nur noch unter mehrerem Anderen auf die Erklärung der Merkator'schen Projection (S. 85. und S. 86.), die Reduction der Zeit des Mittels der Höhen auf das Mittel der Zeiten (S. 181.), und auf die für Längenbestimmungen so wichtige Reduction der Monddistanzen nebst den dazu gehörenden Tafeln hinzuweisen. Besonders machen wir auch nochmals auf die durch das ganze Werk sich hindurch ziehende mehr synthetische als analytische Methode, und die erläuternden an die besten englischen Werke ähnlicher Art erinnernden Holzschnitte, so wie auch auf die grosse Anzahl numerischer Beispiele aufmerksam.

Vergleichen wir endlich im Allgemeinen diese neueste Ausgabe mit den früheren, so zeichnet sich dieselbe vor diesen durch einen weit wissenschaftlicheren Charakter auf das Vortheilhafteste aus, ohne dabei etwas von ihrer praktischen Brauchbarkeit zu verlieren, und legt dadurch zugleich ein höchst erfreuliches Zeugniss von dem übrigens auch anderweitig hinreichend bekannten (m. s. z. B. das Vorwort des Herrn Conferenzraths Schumacher zu Herrn Rümkers Sterncatalog. Hamburg 1843. 4.) trefflichen Zustande der Hamburger Navigationsschule ab.

Ein genaues und vollständiges Druckfehlerverzeichniss ist nachträglich noch gedruckt worden, und wird von den Besitzern des Buchs auf dem Wege des Buchhandels bezogen werden können, worauf wir hier besonders hinzuweisen absichtlich nicht unterlassen wollen.

Je schwerer es für einen scharf begränzten Kreis von Lesern zunächst bestimmten Büchern gewöhnlich wird, sich allgemeinern Eingang zu verschaffen, desto mehr haben wir es für unsere Pflicht gehalten, diejenigen Leser des Archivs, welche sich überhaupt für die Anwendungen der Mathematik interessiren, auf das vorliegende Werk aufmerksam zu machen.

Mittlere Oerter von 12000 Fixsternen für den Anfang von 1836, abgeleitet aus den Beobachtungen auf der Hamburger Sternwarte von Carl Rümker. Hamburg 1843. 4. 3 thlr.

Dieser Fixstern-Catalog ist wohl nur jetzt erst vollständig in den Buchhandel gekommen. Alle Beobachtungen, auf denen derselbe beruhet, sind allein von Herrn Rümker an dem vortrefflichen Repsold'schen Meridian-Kreise der Hamburger Sternwarte gemacht, der im Jahre 1836 aufgestellt wurde, welches auch der Grund ist, dass alle Fixsternpositionen auf den Anfang von 1836 reducirt worden sind. Es lag vorzüglich in Herrn Rümker's Absicht, die noch in der Histoire Céleste und in Bessel's Zonen vorkommenden Lücken zu ergänzen, und zu den in diesen reichen Sammlungen aufgehäuften Schätzen neue hinzuzufügen, weshalb dieser Catalog wesentlich nur kleine bisher noch nicht bestimmte Sterne enthält, ohne dabei schon früher bestimmte Sterne, die sich dem Beobachter darboten, auszuschliessen. Daher wird dieser neue Sterncatalog, welchen Herr Conferenzrath Schumacher in Altona auf Herrn Rümkers Wunsch mit einem Vorwort begleitet hat, insbesondere bei Kometen-Beobachtungen künftig unentbehrlich sein, weshalb auch vorzüglich auf solche kleine

Sterne die Aufmerksamkeit gerichtet worden ist, die bei früheren Kometen, z. B. dem Halley'schen, als Vergleichungssterne gedient haben.

Newton, W., Familiar Introduction to the Science of Astronomy, illustrated by numerous Diagrams; to which are added Problems on the Use of the Globes, and a Description of the Orrery and Armillary Sphere. 3d edition. London 1844. 12. 3 sh.

Weiland, C. F., der nördliche gestirnte Himmel. — Die sichtbare Seite der Mondoberfläche. Planiglob. Weimar 1844. gr. 4. à $1\frac{1}{2}$ Ngr.

Dubus, F. J., Types de calculs de navigation et d'astronomie nautique. In 4. Saint-Brieux. 1845. 2 thlr. 20 ggr.

Physik.

Brandes, H. W., Vorlesungen über die Naturlehre, für Leser, denen es an mathematischen Vorkenntnissen fehlt. 4. Lieferung mit Kupfern. gr. 8. Leipzig 1844. 1 thlr.

Botto, G. D., Elementi di fisica generale esperimentale ad uso delle regie scuole di filosofia. Torino 1843. In 8. 4 tavole. 5. 50.

Stöpel, A., die Lehre vom Magnetismus und von der Electricität, für Lehrer an Mittelschulen und Freunde der Naturkunde. Tangermünde 1844. Mit 2 Figurentafeln. 8. 16 ggr.

Herger, J., die Systeme der magnetischen Curven, Isogonen und Isodynamen, nebst anderweitigen empyrischen Forschungen über die magnetischpolaren Kräfte, ausgeführt in 37 graph. Darstellungen auf 31 Tafeln in Folio. Leipzig 1844. 1. Lieferg. 3 thlr.

Lardner and Walker, Treatise on Electricity, Magnetism and Meteorology. 2 vol. London 1844. 8. 12 s.

Haldat, docteur de, Recherches sur la concentration de la force magnétique vers les surfaces des corps magnétisés. In 8. Nanci 1845.

Nuovo igrometro, memoria del professore G. Alessandro Majocchi. Estratta dagli-Annali di fisica, chimica etc. In 8. con e tavola litografica.

Kämtz, L. F., A complete course of Meteorology. With Notes by Martins, and an appendice by L. Lalanne. Translated, with additions, by Charles V. Walker. 1 vol. post 8vo 15 Plates. London 1844. 12 s. 6 d.

Chavannes de la Giraudière, Le Vapeur depuis sa découverte jusqu'à nos jours. Resumé historique de son application aux usines, etc. In 18. plus une pl. Tours 1844.

Oersteds Naturlare. 2 H. Copenhagen 1844. 90 s.

Mathematische Psychologie.

Neue Behandlung des mathematisch-psychologischen Problems von der Bewegung einfacher Vorstellungen, welche nach einander in die Seele eintreten. Zugleich als Beitrag zu einer schärfern Begründung der mathematischen Psychologie Herbart's. Von Theodor Wittstein, Dr. Phil. Hannover 1845. 4.

Bekanntlich hat Herbart der Psychologie eine mathematische Grundlage zu geben und diese Wissenschaft dadurch schärfer als früher zu begründen gesucht. Unter den Mathematikern, die sonst mit Recht so gern Alles eifrig ergreifen, was eine neue Anwendung ihrer Wissenschaft darzubieten verspricht, ist indess, so viel uns bekannt geworden ist, bis jetzt nur Herr Professor Drobisch in Leipzig mit Glück auf dem von Herbart eingeschlagenen Wege weiter gegangen. Daher ist es sehr erfreulich, dass nun auch der Herr Vf. der vorliegenden Schrift seinen Scharfsinn dieser neuen Anwendung der Lehren der Mathematik zuwendet. Auch ist dieselbe allen denen, welche die mathematische Psychologie noch gar nicht kennen, vorzüglich deshalb zu empfehlen, weil der Herr Vf., ohne sonst irgend etwas vorauszusetzen, von den ersten Begriffen beginnt und namentlich auch, was insbesondere die Mathematiker dankbar erkennen werden, alle diejenigen Sätze deutlich und bestimmt hervorhebt, welche als Axiome der neuen Wissenschaft zum Grunde gelegt werden; denn nur auf diese Weise wird es möglich, über die Sicherheit und Strenge der weiteren Betrachtungen gehörig urtheilen zu können. Ausser der erwähnten kurzen Darstellung der Elemente der mathematischen Psychologie überhaupt, welche den Inhalt der Vorbegriffe und der ersten und zweiten Abtheilung bildet, wird dann in der dritten Abtheilung noch eine neue, von den von Herbart selbst und nachher von Drobisch in der Schrift Quaestionum mathematico-psychologicarum Fasc. I. Spec. IV. gegebenen Auflösungen verschiedene, Auflösung des auf dem Titel näher bezeichneten psychologischen Problems gegeben. Je mehr es allerdings zu wünschen ist, dass immer mehr Kräfte sich der weiteren Bearbeitung der mathematischen Psychologie zuwenden, desto mehr empfehlen wir den Lesern des Archivs neben den frühern Schriften von Drobisch auch die vorliegende Schrift.

XXIII.

Literarischer Bericht.

Ueber mathemathische Methode.

Untersuchungen über die wissenschaftliche Methode mit besonderer Anwendung auf die Mathematik, von Dr. Aloys Mayr, öffentlichem ordentlichem Professor der Mathematik und Astronomie an der Julius-Maximilians-Universität zu Würzburg, Würzburg. 1845. 8. 1 Thlr. 12 ggr.

In den nachfolgenden Untersuchungen, sagt der Herr Vf. in der Vorrede, habe ich die wesentlichsten Fragen über die wissenschaftliche Methode erörtert, die Fragen über die Hilfsmittel des Denkens, über die Definitionen und Zeichensprachen, über die Axiome und Beweise, über die Auffindung der Lehrsätze und über die Elementarisirung und Ordnung aller Wissenschaften. Mehrere dieser Fragen habe ich von einem neuen Gesichtspunkte aus betrachtet, wie die Lehren über die Zeichen und Axiome; für andere, wie für die Lehren über die Analogie und Induction, habe ich bestimmte und unabänderliche Gesetze festzustellen gesucht. Ich war bemüht, die Beweise, sowohl die directen als die indirecten, ihrem innersten Wesen nach aus einander zu setzen, und gleichsam zu zergliedern, und den ganzen Vorgang, wie er in allem Denken stattfindet, und immerdar stattfinden wird, zu enthüllen und aufzudecken. Vor allem wünsche ich aber, dass die Untersuchungen über die bestimmten, der Mathematik coordinirten, Vernunft-Wissenschaften beachtet, und einer ernsten Prüfung unterworfen werden mögen. Ich habe die Lehren über die Methode mit beständiger Rücksicht auf die Mathematik untersucht und vorgetragen, und die gefundenen Resultate in dieser sichersten und am meisten vorgeschrittenen Wissenschaft zu erproben gesucht, einmal weil in ihr die meisten Aussichten auf einen günstigen Erfolg gegeben sind, und dann, weil es besser ist, sogleich zu bestimmten Untersuchungen überzugehen, und die strengen Forderungen der Methode an sich selber zu stellen, anstatt die Untersuchungen im Allgemeinen zu halten, und Forderungen an Andere zu machen, die man vorher nicht an sich selber gemacht hat. Endlich kann es für eine allgemeine Methodenlehre nur erwünscht sein, wenn sie die Probe einer wirklichen Wissenschaft aushalten kann. Uebrigens bin ich bemüht gewesen, die Gesetze in solcher Allgemeinheit zu entwickeln, dass sie nicht für die Mathematik allein, sondern für alle Wissenschaften gelten mögen.

Ueber diese vorzugsweise ein philosophisches Interesse in Anspruch nehmende Schrift, deren eigentliche Tendenz vorher absichtlich mit den eigenen Worten des Herrn Vfs. angegeben worden ist, ein bestimmtes Urtheil auszusprechen, darf sich der Unterzeichnete nicht anmaassen, weil strenge gründliche umfassendere philosophische Studien ihm seit längerer Zeit ferner gelegen haben. Aber so viel darf derselbe versichern, dass ihn bei der Lectüre dieser Schrift die nüchterne und deutliche, mehr an ältere philosophische Schulen erinnernde, ein vages philosophisches Räsonnement überall verschmähende Darstellung wohlthuend angesprochen, und er selbst aus derselben manche Belehrung geschöpft hat. Er wünscht daher auch, dass diese Schrift insbesondere auch von Lehrern der Mathematik an höhern Unterrichtsanstalten nicht ganz unbeachtet bleiben möge, welches öfters das unverdiente Loos solcher die Philosophie mit der Mathematik in Verbindung bringenden oder die erstere auf die letztere anwendenden Schriften zu sein pflegt. Auch glaubt derselbe, dass die Mathematiker in der vorliegenden Schrift mehr für ihre Wissenschaft wirklich Erspriessliches finden werden, als in manchen andern zu seiner Kenntniss gekommenen Schriften von ähnlicher Tendenz, so sehr dieselben auch oft auf einem hohen Kothurn einherschreiten mögen.

G.

Geschichte der Mathematik.

Storia della scienze matematiche in Italia, di Guglielmo Libri. Versione di Luigi Masieri dottore in fisica e matematica.— Milano 1843—44. Puntata V e VI. In 8. 1. 30.
(M. s. Literar. Bericht Nr. XVII. S. 257.)

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

Rost, F. M., die Elemente der Zahlen und Raumgrössenlehre. I. Band. Arithmetik und ebene Geometrie. 2te vermehrte Aufl. mit 3 Figurentafeln. gr. 8. Berlin 1845. 1 Thlr. 16 ggr.

Lehmus, Dr. D. C. L., die reine Mathematik und die mechanischen Wissenschaften. — Zum Leitfaden für den Lehrer, zur Ergänzung für den Schüler bearbeitet. Mit einer Figurentafel. gr. 8. Berlin 1845. 1 Thlr. 12 ggr.

Reynaud, Baron, Traité élémentaire de mathématiques et de physique suivi de notions sur la chimie et sur l'astronomie. 4ème edition. Tom. I. Paris 1845. 7 fr. 50 c.

Christie, S. H., Elementary Course of Mathematics, for the use of the Royal Military Academy, and for Students in general. Vol. I. Arithmetic and Algebra. 8vo. London 1845. 21 s.

Elementi di matematica, continenti l'aritmetica, la geometria solida e piana e la trigonometria piana e sferia. Napoli. Quattro volumi in 8. 11. 20.

Arithmetik.

Pelliat, A. Examen critique de l'arithmétique et exposition de la théorie rationelle de cette science. Mémoire adressé à l'acad. des sciences. Paris 1845. 4. 40 cent.

Ohm, Dr. Martin, Kurzes, gründliches und leichtfassliches Rechnenbuch, brauchbar in allen Bürger-, Gewerbs- und Militair-Schulen, besonders aber an lateinischen Schulen und Gymnasien. Nebst einem Anhange, Tabellen zur Vergleichung der Maasse und Gewichte verschiedener Länder und namentlich der Zollvereins-Staaten enthaltend. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. Erlangen 1845. gr. 8. 10 ggr.

Emerson's Unterricht im Kopfrechnen, für deutsche Schulen bearbeitet von Dr. Bassler. 8vo. Leipzig 1845. 6 ggr.

Francoeur, L. B. Traité d'arithmétique appliquée à la banque, au commerce, à l'industrie etc. In 8. Paris 1845. 4 fr.

Exercises in Arithmetic, after the Method of Pestalozzi. London 1844. 1 s. 6 d.

Lübsen, H. B., ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, zum Selbstunterricht und mit Rücksicht auf die Zwecke des prakt. Lebens bearbeitet. 2te verb. und verm. Aufl. gr. 8. Oldenburg 1845. 1 thlr. 8 ggr.

Lefebure de Fourcy, Leçons d'algèbre. Cinquième édition. In 8. Paris 1844. 7 fr. 50 c.

Young, J. R. An Elementary Treatise on Algebra, Theoretical and Practical; with an Appendix on Probabilities and Life Annuities. 4. edit., considerably enlarged. 12mo. Lond. 44. 6 sh.

Arndt, J. A., Beispiele und Aufgaben aus allen Theilen der Arithmetik und Algebra. 2. Aufl. gr. 8. Leipzig 1845. 1 thlr. 6 ggr.

Die erste Auflage dieser zu empfehlenden Aufgabensammlung ist im Literarischen Bericht. Nr. II. S. 25. angezeigt.

Poinsot, M., Reflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres. (Aus Liouville's Journal.)

Theorie der independenten Darstellung der höhern Differentialquotienten. Von Reinhold Hoppe. Leipzig. 1845. 8. 1 thlr.

Es ist in dem Archive öfters darauf hingewiesen worden, wie sehr in der Analysis noch eine vollständigere Ausführung der Lehre von den höhern Differentialquotienten, namentlich eine Darstellung derselben für die verschiedenen Functionsformen in allgemeinen Formeln zu wünschen sei. Denn wenn auch für die ältere Analysis diese Lehre von geringerer Bedeutung war, weil bei den Reihenentwickelungen durch den Maclaurin'schen Satz die Unter suchung der Convergenz oder Divergenz der Reihe auf eine unverzeihliche Weise bei Seite gesetzt wurde, und deshalb bloss die Werthe der Differentialquotienten von den verschiedenen Graden für den speciellen Werth Null der unabhängigen veränderlichen Grösse zur Anwendung kamen, so erfordert doch das gegenwärtige strengere Verfahren der neueren Analysis bei der nicht mehr zu umgehenden Entwickelung des sogenannten Restes der Maclaurin'schen Reihe durchaus die Kenntniss des allgemeinen $n$ten Differentialquotienten der betreffenden Function in seiner allgemeinsten Gestalt für jeden Werth der unabhängigen veränderlichen Grösse x, oder die allgemeine Darstellung dieses $n$ten Differentialquotienten in independenter Form als Function von x. Uebrigens aber ist die Kenntniss der allgemeinen Werthe der höhern Differentialquotienten auch noch für manche andere Geschäfte der Analysis von Wichtigkeit. Daher halten wir es für ein verdienstliches Unternehmen, dass der Herr Vf. der vorliegenden Schrift in derselben die Theorie der independenten Darstellung der höhern Differentialquotienten in einer solchen Ausführlichkeit im Zusammenhange zu entwickeln versucht hat, wie dies früher noch nicht geschehen ist. Das wissenschaftliche Interesse dieser von dem mathematischen Scharfsinne des Herrn Vfs. und seiner Gewandtheit in analytischen Entwickelungen, namentlich auch in der Zurückführung sehr zusammengesetzter Ausdrücke auf einfachere Formen, theilweise durch Einführung zweckmässiger Bezeichnungen, ein recht erfreuliches Zeugniss ablegenden Schrift wird aber jedenfalls besonders noch dadurch erhöhet. dass es demselben gelungen ist, eine allgemeine Methode zur Herleitung allgemeiner Ausdrücke für die höhern Differentialquotienten zu finden, und dieses ganze Geschäft, mehr als dies bisher geschehen ist, auf allgemeine Principien zurückzuführen und, gewissermassen wenigstens, zu einer eigenthümlichen Rechnungsmethode abzurunden, worüber hier nach dem Zwecke und der ganzen Anlage dieser Literarischen Berichte leider etwas Näheres nicht beigebracht werden kann, sondern auf die Schrift selbst verwiesen werden muss. Nur so viel wollen wir bemerken, dass in der Einleitung die Theorie des Summenzeichens ausführlich entwickelt, und *A.* von den einfachen Summen; *B.* von den Doppelsummen; *C.* von den vielfachen Summen; *D.* von der Anwendung des Summenzeichens auf Summen unendlicher Reihen; *E.* von der Anwendung des Summenzeichens zur Multiplication der Reihen, gehandelt worden ist. Ausser den

ihm eigenthümlichen Untersuchungen hat der Herr Vf. auch die mehr vereinzelt stehenden Arbeiten seiner Vorgänger nicht unberücksichtigt gelassen, und besonders im letzten (vierundzwanzigsten) Kapitel von denselben gehandelt, wenn wir auch der Meinung sein müssen, dass er in dieser Beziehung noch etwas mehr hätte thun können, was aber wohl zum Theil in einer besonders bei jüngeren Gelehrten leicht zu entschuldigenden, nicht vollständigen Kenntniss der betreffenden Literatur seinen Grund haben mag.

Ausser wegen ihres vorher hervorgehobenen allgemein wissenschaftlichen Interesses glauben wir die vorliegende Schrift auch allen den Studirenden, welche, nachdem sie einen Cursus der Differentialrechnung gehört haben, sich in diesem wichtigen Theile der höheren Analysis noch mehr festsetzen und Uebung in allgemeinen analytischen Entwickelungen erwerben wollen, aus Ueberzeugung empfehlen zu dürfen, indem sie aus dem auf verständige Weise betriebenen Studium derselben gewiss einen weit grösseren und weit reellern Gewinn für ihre weitere Ausbildung schöpfen werden, als aus den gewöhnlichen Beispielsammlungen, weshalb wir wünschen, dass diese Schrift in die Hände recht vieler solcher Studirender kommen möge.

Zugleich haben wir durch die vorhergehende etwas ausführlichere Anzeige dem Herrn Vf. das Interesse, mit welchem wir seine Schrift gelesen haben, an den Tag legen wollen.

Thomas Tate, Treatise on Factorial Analysis, with the Summation of Series; containing New Developments of Functions etc. London 1845. 4 sh.

In der neuesten Nummer der astronomischen Nachrichten (No 529. Bd. XXIII. S. 1.) empfiehlt Herr Geheimerath Bessel als die besten jetzt existirenden logarithmischen und trigonometrischen Tafeln unter denen, welche die trigonometrischen Linien von Secunde zu Secunde bis auf sieben Decimalen enthalten, die kürzlich von dem in Diensten der Ostindischen Compagnie stehenden Capitain Herrn Shortrede herausgegebenen, schon im Literarischen Berichte Nr. XIX. S. 291. kurz angezeigten, Tafeln. So bald ich selbst diese Tafeln erhalten habe, werde ich von denselben eine ausführlichere Anzeige in dem Literarischen Berichte liefern. G.

J. A. Hansen, (Onderwyzer in de Wiskunde te Deventer.) Tafels ten dienste bij het meetkunstig rekenen, bevattende de Kwadraten en Kubieken, de Kwadraat- en Kubiekwortels, en de Logarithmen der getallen van 1 tot 1000; benevens de Logarithmus-Sinus en Tangen, voor de vijf eerste of laatste graden voor elke minuut, overigens van 10 tot 10 minuten; kl. 8vo. Te Deventer, bij J. P. Brinkgreve. 1844. f 0,40.

Böhm, J. G., logarithmisch - trigonometrisches Handbuch. gr. 8. Innsbruck, 1845. 14 ggr.

Geometrie.

Elemente der Geometrie, oder theoretische und praktische Planimetrie, von Dr. Constant Wurzbach, vormals Officier in der k. k. Armee, gegenwärtig Universitäts-Bibliotheks-Scriptor und Mitglied der philosophischen Facultät an der k. k. Franzens Universität zu Lemberg. Mit 352 Figuren auf 19 Tafeln. Lemberg 1845. 8. 1 thlr. 12 ggr.

Diese zunächst für den Gebrauch solcher Zöglinge, welche sich zum Eintritt in's Militair vorbereiten, bestimmte Schrift enthält, ohne irgend eine besondere Eigenthümlichkeit, die gewöhnlichen Elemente der ebenen Geometrie und die ersten Anfangsgründe des Feldmessens, so weit dabei trigonometrische Kenntnisse nicht in Anspruch genommen werden, in leicht verständlicher Darstellung. Ausser den gewöhnlichen Messinstrumenten sind in der Lehre vom Feldmessen auch einige andere kleine, aber zweckmässig eingerichtete Instrumente beschrieben, wie z. B. der sogenannte Katopter zum Abstecken senkrechter Ordinaten auf einer gegebenen Abscissenlinie, welcher bekanntlich aus nichts weiter als aus einem gegen eine bestimmte Visirlinie unter einem Winkel von 45° geneigten ebenen Spiegel besteht und hiernach gewiss leicht von einem Jeden selbst construirt werden kann, aber allerdings allgemeiner als bisher eingeführt zu werden verdient, da er die Stelle des Winkelkreuzes oder der Kreuzscheibe vertreten kann, und vor letzterer jedenfalls den Vortheil der weit leichteren Transportabilität besitzt, da man ihn in der Tasche bei sich tragen kann. Gewiss wird übrigens die Genauigkeit dieses kleinen sehr zweckmässigen Instruments erhöhet werden, wenn man es mit einem kleinen Fernrohre versieht und die nöthige Vorrichtung zur Correction der Lage des Spiegels gegen die Visirlinie anzubringen nicht versäumt, Alles natürlich auf die einfachste Weise.

Die harmonischen Verhältnisse. Ein Beitrag zur neueren Geometrie von C. Adams (Lehrer der Mathematik an der Gewerbsschule zu Winterthur). Erster Theil. Mit 4 Kupfertafeln. Winterthur 1845. 8.

Seiner Lehre von den Transversalen, welche die Leser des Archivs aus Nr. XV. des Literarischen Berichts. S. 230. kennen, lässt der Herr Vf. jetzt die vorliegende Schrift über die harmonischen Verhältnisse folgen, deren erster Theil den folgenden Inhalt hat: Erster Abschnitt. Die Verhältnisse und Strahlenbüschel: a) das harmonische Verhältniss; b) das anharmonische Verhältniss; c) die Involution. Zweiter Abschnitt. Anwendung der harmonischen Verhältnisse auf geometrische Figuren: a) geradlinige Figuren; b) der Kreis. — Der zweite künftig erscheinende Theil wird die harmonischen Verhältnisse des körperlichen Raumes, und eine ausführliche Theorie der Kegelschnitte, der dritte (vielleicht noch erscheinende Theil) die Theorie der Flächen des zweiten Grades enthalten. Der Herr Vf. bezeichnet in der sehr lesenswer-

then Vorrede, in welcher er das Verhältniss der älteren und neueren Geometrie zu einander auf eine, wie es uns scheint, sehr richtige Weise würdigt, dieses Werk im Allgemeinen als einen Versuch, in einem einzelnen Zweige die neuere Geometrie so mit der alten zu verschmelzen, dass jene ihren Charakter der Allgemeinheit, diese ihre wohlbegründete Strenge der Form beibehält, und dennoch beide ein eng verbundenes, abgeschlossenes und organisches Ganze bilden, wobei sich von selbst verstehe, dass er die vorhandenen ihm zugänglichen Hülfsquellen benutzt habe, dass aber manche Partieen, wie z. B. die Collineation, in ganz neuer, rein geometrischer, Darstellung erscheinen. Wir können diesem Zwecke, welchen der Herr Vf. sich bei dem vorliegenden Werke, und auch schon früher bei seiner Lehre von den Transversalen vorgesetzt hat, nicht bloss unsern vollkommenen Beifall geben, sondern haben von jeher selbst die Ueberzeugung gehabt, dass eine solche Verschmelzung der sogenannten neueren Geometrie mit der alten dringend Noth thue, wenn erstere wahrhaft fruchtbringend wirken soll, weshalb wir der Meinung sind, dass die vorliegende, von uns freudig begrüsste Schrift, einem wahren Bedürfnisse theilweise abhelfe, und der Herr Vf. alle Ermunterung verdiene, auf dem betretenen Wege rüstig vorwärts zu schreiten. Zugleich wird er dann sehr dankenswerthe Vorarbeiten zu einem das ganze Feld der Wissenschaft umfassenden, völlig consequent durchgeführten Lehrgebäude der Geometrie liefern, welches freilich immer noch ein sehr fühlbares Bedürfniss bleibt, wie der Herr Vf. auch selbst in der Vorrede angedeutet hat. Dass die rechte Zeit zur Herausgabe eines solchen grossen Werks aber noch nicht gekommen ist, davon sind wir ebenfalls vollkommen überzeugt.

Die Darstellung in der vorliegenden Schrift ist sehr deutlich, einfach und streng, und dass dabei überall die euklidische Methode, welche ihr altes wohlbegründetes Ansehen, so viel man dasselbe auch zu schmälern sich von manchen Seiten her bemühen mag, doch gewiss niemals verlieren wird, befolgt worden ist, verdient besondere Anerkennung, und wird gewiss zur Erhöhung des Nutzens, welchen der Herr Vf. durch diese Schrift zu stiften beabsichtigt und gewiss auch stiften wird, wesentlich beitragen. Eben so war es der Tendenz derselben völlig angemessen, dass analytische oder vielmehr sich algebraischer Hülfsmittel bedienende Betrachtungen ganz ausgeschlossen worden sind, und die Darstellung durch Proportionen nach der Weise der Alten consequent durchgeführt worden ist. Dass endlich auch manches Neue in dieser sich auch durch ihre äussere Ausstattung sehr empfehlenden Schrift enthalten ist, haben wir schon oben angedeutet.

Wir glauben daher, dass diese Schrift in jeder Beziehung den Liebhabern der feineren Geometrie empfohlen zu werden verdient, und auch wegen ihrer grossen Deutlichkeit von gründlich vorbereiteten Schülern zu ihrer weitern geometrischen Ausbildung mit grossem Vortheil benutzt werden kann, eben so wie des Herrn Vfs. früher erschienene Lehre von den Transversalen.

Lenthéric, Cours de géométrie théorique et pratique. Montpellier 1845. In 8. Avec 9 planches. 4 fr.

Démonstration géométrique de la fausseté de ce principe:

Dans tout triangle les angles égaux sont opposés à des côtés égaux, et réciproquement, sur lequel reposent nombreux théorèmes. Avec figures. Réforme de la géométrie. Premièr age. In 8. Tours 1844.

L. Dupin, Stéréométrie, ou Décomposition du cube en polyèdres réguliers, irréguliers et corps ronds formant entre eux plus de 120 polyèdres, appliqués à l'étude de la géométrie, etc. In 12, avec 12 pl. Paris 1844.

G.P. Dandelin, Mémoire sur quelques points de métaphysique géometrique présenté à l'acad. le 3. Dec. Bruxelles 1842. 4. mit 3 Taf. (Auch im 17. Bande der „Nouveaux mémoires de l'acad. de Brux.“ abgedruckt).

Guiot, Auguste, Elémens de perspective linéaire, comprenant la théorie et les procédés pratiques de cette science, etc. In 8. plus un atlas in 4. oblong d'un quart de feuille et 37 pl. Paris 1845. 15 Fr.

Thomson, J., First Six and the Eleventh and Twelfth Books of Euclid's Elements, with Nots and Illustrations, the Elements of Plane Trigonometry, and an Appendix; in Four Books. 3d edition. Part 1. containing the First Six Books of Euclid, and the Elements of Plane Trigonometry. 12. London 1844. 3 s.

The Elements of Euclid; containing the First Six Books, and the First Twenty-one Propositions of the Eleventh Books. With the Planes Shaded. From the Text of Dr. Simson. 12. Cambridge 1845. 6 s.

W. Rutherford & S. Fenwick, elementary Propositions in the geometry of Coordinates, both of two and three dimensions. London. 1845. 2 sh. 6 d.

Dietrich, Carl, analytische Geometrie auf der Kugel. gr. 8. mit 1 Figurentafel. Berlin 1845. 8 ggr.

A Treatise on the Application of Analysis to Solid Geometry, by D. F. Gregory and W. Walton. London 1845. cloth. 10 s. 6 d.

Lucas, S. P. A., (auteur de la „Quadrature du cercle“) traité d'application des tracés géométriques aux lignes et aux surfaces du deuxieme dégré. Tome 1. 4. Paris 1844.

Anger de la Loriais, Traité des lignes du second ordre. 2 Bde. Paris 1845. Mit 47 Tafeln.

Praktische Geometrie.

Elliol, complete treatise on practical Geometry and mensuration with numerous exercices. 8. Edinburgh 1845. 5 sh.

Elliol, Key to it. 6 sh.

Bonajuto Del-Vecchio, Brevi cenni geometrico-pratici. Florenz. 12. Mit 12 Taf. 3½ l.

Trigonometrie.

Rummer, F., Lehrbuch der ebenen Trigonometrie nebst einer Sammlung von Aufgaben. Als Anhang zu dessen Lehrbuch der Geometrie. Mit 2 Figurentafeln. 8. Heidelberg 1845. 9 ggr.

Mazure et Bellissant, Tables trigonométriques, donnant pour touts les angles de quart de cercle calculés de 5 en 5 minutes centésimales et appliqués à toutes les hypoténuses possibles, les sinus, cosinus ou segments des bases avec des décimales, ainsi que les compléments de touts les angles; servant de table des cordes et propres à ramener à l'horizont les lignes et surfaces inclinées, etc. Paris 1844. In 8. 6 f.

Mechanik.

Denzler, L., Theoretische Abhandlung über d. Flugbahn d. Geschosse. Nebst einem Anhang, enth. verschiedene dem Artillerieofficier unentbehrliche mathemat. Notizen. Mit 25 Figuren auf 2 Tafeln. Zürich 1845. 10 ggr.

Praktische Mechanik.

Gerstner, Franz Joseph, Ritter von, Handbuch der Mechanik, mit Beiträgen von neuern englischen Constructionen vermehrt und herausgegeben von F. A. Ritter von Gerstner. gr. 4.

3 Bde. (I. Bd. 83 Bogen, II. Bd. 69 Bogen u. III. Bd. 72 Bogen). Mit 109 Kupfertafeln in gr. 2. Wien 1844. 24 thlr.

Demme, der praktische Maschinenbauer. Ein Handbuch für Maschinenbauer, Mechaniker, Kunstdrechsler und Fabrikbesitzer. Nach den besten Werken über diesen Gegenstand bearbeitet. 18. Lief. Mit 31 Taf. Abbildungen. 8. 2 thlr. 16 ggr.

Demme, der praktische Maschinenbauer. 19. Lieferung. 8. Mit 24 Tafeln Abbildungen. Quedlinburg 1845. 2 thlr. 12 ggr.

Poncelet, J. V., Traité de mécanique industrielle, exposant les différentes methodes pour déterminer et mésurer les forces motrices ainsi que le travail mécanique des forces. Bruxelles. Avec beaucoup de planches. 1844. 18 fr.

De Pambour, Théorie des machines à vapeur, suivi d'un appendice, contenant etc. 2me edition. In 4. avec un atlas in 4. Paris 1844. 50 fr.

Astronomie.

Eichstrom, F., graphische Darstellung des Laufes der Planeten im J. 1845. Ein Blatt gr. Imp. Fol. Mit erläuterndem Text in 8. Stuttgart 1845. 12 ggr.

Le Hon, Manuel d'astronomie, de météorologie et de géologie, à l'usage des gens du monde, accompagné de planches pour l'intelligence du texte, in 8. Bruxelles 1844. 1 thlr. 12 ggr.

Blunt, C. F., The Beauty of the Heavens, a practical Display of the Astronomical Phenomena of the Universe, exhibited in 104 Scenes, accompanging and illustrating a fämiliar Lecture on Astronomy, from original Drawings, Paintings and Observatory Studies. New edit. London 1845. 2 sh. colorirt 28 sh.

Practical Astronomy and Geodesy. By John Narrien, Professor of Mathematics in the Royal Military College, Sandhurst. Being the Third Volume of the Sandhurst College Text-Books. 8vo. London 1845. 14 sh.

Connaissance des temps ou des mouvemens célestes, à l'usage des astronomes et des navigateurs, pour l'an 1847; publiée par le bureau des longitudes (avec des additions). In 8. Paris 1845. Avec additions. 8 fr. 50 c.; sans additions. 5 fr.

F. Kaiser, De Sterrenhemel, verklaard. Amsterdam 1845. 3⅗ fl.

Physik.

Pouillet, Elemens de physique experimentale et de météorologie. 4. édition. 2vol. 8. Paris 1844. 16 fr.

Archives de la Société magnétique de Cambrai. Vol. I. In 8. Cambrai 1845. 24 fr.

Sabine, Observations made a the Magnetical and Metereological Observatory at Toronto, in Canada. Printed by Order of Her Majesty's Governement, under the superintendence of Lieut.-Col. Edw. Sabine. Vol. 1. London 1840. 41. 42. 4. 2 l. 2 sh.

Hopkins, T., On the Atmospheric Changes which produce Rain, Wind, Storms, and the Fluctuations of the Barometer. Manchester 1845. 8. 4 s.

Vermischte Schriften.

The Cambridge Mathematical Journal. Nr. XXI. Mai 1844. I. On a Law existing in the Successive Approximations to a Continued Fraction. — II. Notes on Conic Sections. — III. On the Theory of Algebraic Curves. — IV. The Polar Equation to the Tangents to a Conic Section. — V. Demonstration of a Proposition in Physical Optics. — VI. On a Multiple Definite Integral. — VII. Chapters in the Analytical Geometry of (n) Dimensions. — VIII. On a Question in the Theory of Probabilities. — IX. On the Balance of the Chronometer. — X. On a Problem in Precession and Nutation. — XI. Notes on Magnetism. Nr. II. — XII. Mathematical Note.

Nr. XXII. November 1844. I. Memoir of the late D. F. Gregory, M. A., Fellow of Trinity College, Cambridge. — II. On the Partial Differential Equations to a Family of Envelops. — III. On the Axis of Spontaneous Rotation. — IV. On Brianchon's Hexagon. — V. Notes on Linear Transformations — VI. On a Problem in Central Forces. — VII. Note on the Spontaneous Axis of Rotation. — VIII. Applications of the Symbolical Form of Maclaurin's Theorem. — IX. On the use of the Symbol $e^{\Theta\sqrt{-1}}$ in certain Transformations. — X. Note on Orthogonal Isothermal Surfaces. — XI. On the Solution of Equations in Finite Differences. — XII. Note on Geometrical Discontinuity. — XIII. Note on the Law of Gravity at the Surface of a Revolving Homogeneous Fluid. — XIV. Mathematical Note.

The Mathematician. Edided by Thomas Stephens Davies, F. R. S. L. et Ed. F. S. A.; William Rutherford, F. R. A. S.; and Stephen Fenwick. London 1844.

Number I. Prospectus. — On Conditional Coefficients, and on some Elementary Expansions. — On the Ietersection of two Curves of the Second Degree. — Properties of the Associated Spherical Triangles. — On the Determination of the Magnitude and Position of a Sphere Tangent to four given Spheres in mutual contact. — On the same. — On the Theory and Application of Lagrange's Method of Multipliers. — On Conjugate Diameters of Lines and Surfaces of the second order. — Mathematical Exercices. — On the Algebraical Analysis of Porisms.

Number II. On the Algebraical Analysis of Porisms (concluded). — Geometrical Propositions. — Solutions of a Problem relating to Attraction. — Analytical Demonstration of a Geometrical Theorem. Interesting Applicaton of the preceding Theorem. — On Horner's Synthetic Division. — On the Straight Line of Quickest Descent. — Properties of the Parabola. — On the Transformation of Algebraic Equations — Demonstration of the Four Fundamental Formulas of Trigonometry. — Solutions of Mathematical Exercices (continued). — A. Locus: from Lhuilier's Polygonometrie. — On the Conditions of Equilibrium of Forces acting on Four Spheres in mutual contact. — Mathematical Notes. — Horner on Algebraic Transformation (to be continued).

(Preis der Nummer 3 s. 6 d.).

Auch von dieser neuen englischen mathematischen Zeitschrift wird das Archiv nicht bloss fortlaufend den Inhalt, sondern auch Auszüge, insofern dieselben für das betreffende Publikum vorzugsweise von besonderem Interesse sind, liefern.

Annuaire pour l'an 1845. Présenté au Roi par le bureau des longitudes. In 18. Paris. Sans notices. 1 fr.

Berichtigung.

In dem Ausdrucke des vorletzten Integrals auf S. 191. (Z. 6. v. u.) im 2ten Hefte des sechsten Theils setze man $\log 8(2m-1)$ für $\log 2(2m)^2$.

XXIV.

Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Guy, M. P.: La division abrégée, ou Méthode rigoureuse et facile pour simplifier cette opération de l'arithmétique. In 8. 1 pl. Paris 1845. 1 fr. 50 c.

Lehrbuch der Mathematik für den Schul- und Selbstunterricht von Dr. W. A. Wilde, Professor am Gymnasium zu Stargard. Erster Band. Auch unter dem Titel: Lehrbuch der Arithmetik für den Schul- und Selbstunterricht. Erster Band. Die sechs Grundrechnungen. Leipzig 1845. 18 ggr.

Dieses neue Lehrbuch der Mathematik ist auf vier Bände berechnet, von denen die beiden ersten der Arithmetik, die beiden andern der Geometrie gewidmet sein werden. Es soll die Elementar-Mathematik mit Einschluss der Kegelschnitte enthalten, und jedes Bändchen soll ein für sich abgeschlossenes Ganze bilden, auch einzeln ausgegeben werden, was dem zweckmässigen Gebrauche des Buchs beim Unterrichte offenbar nur förderlich sein kann. Der vorliegende erste arithmetische Theil enthält nach einer Einleitung in die Mathematik überhaupt in neun Abschnitten: die Lehre von der Zahlenbildung im Allgemeinen (Anhang: Von Zahlensystemen im Allgemeinen); die Addition und Subtraction; die negative Zahl; die Multiplication und Division; unbestimmte Division oder von der Theilbarkeit der Zahlen im Allgemeinen; die gebrochene Zahl; den Decimalbruch; Potenziation und Radication; die irrationale Zahl (Anhang: die imaginäre Zahl).

Schon in dieser Aufzählung wird man ein Streben nach systematischer Anordnung bemerken. Die Beweise sind überall vollständig gegeben, da der Vf., der Vorrede zufolge, es aus mehreren triftigen Gründen nicht billigen kann, wenn in den meisten Lehrbüchern die leichtern Beweise ganz ausgelassen und viele andere nur kurz angedeutet werden. Die Methode der Darstellung ist mit Recht die euklidische, und überhaupt haben wir, so weit wir uns bis jetzt mit dem Buche bekannt gemacht haben, Strenge und Deutlichkeit nirgends vermisst. An einer hinreichenden An-

zahl von erläuternden Beispielen fehlt es gleichfalls nicht, und die Arbeit kann daher überhaupt als eine wohlgelungene bezeichnet werden. Das baldige Erscheinen der übrigen Theile ist zu wünschen.

Encyklopädische Darstellung der Theorie der Zahlen und einiger anderer damit in Verbindung stehender Gegenstände; zur Beförderung und allgemeineren Verbreitung des Studiums der Zahlenlehre durch den öffentlichen und Selbst-Unterricht elementar und fasslich vorgetragen von A. L. Crelle. (Besonders abgedruckt aus dessen Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. XXVII, XXVIII und XXIX.) Erster Band. Berlin 1845. 4. 4 thlr.

Nachdem der geehrte Herr Vf. in der Vorrede dieses ausführlichen Werks über die Zahlenlehre oder Theorie der Zahlen deren Begriff und Verhältniss zu den übrigen Theilen der Mathematik gehörig festgestellt, sich über den Nutzen dieser grösstentheils der neueren Zeit angehörenden Wissenschaft ausgesprochen und endlich auch darauf hin gewiesen hat, dass dieselbe noch weit weniger allgemein bekannt und verbreitet sei als die meisten übrigen Theile der Mathematik, spricht er sich von S. XI. an über den eigentlichen Zweck und die Einrichtung seines Werks bestimmter auf folgende Art aus.

„Aus diesen Erwägungen“ sagt er „geht nun hervor, dass es vielleicht ein nützliches Bemühen sein dürfte, zu versuchen, ob sich nicht dazu beitragen lasse, die Theorie der Zahlen mehr zum Gemeingut zu machen; und von diesem Bemühen geht die folgende Sammlung von Sätzen aus. Ihrer Einrichtung und Anordnung liegen folgende Betrachtungen zum Grunde.“

„Damit Wahrheiten, deren Erkenntniss die Urtheilskraft in Anspruch nimmt, recht Vielen von verschiedener Fassungskraft, und selbst Personen im jugendlichen Alter, zugänglich werden mögen, dürfte es vor Allem nöthig sein, sie so aus einander zu setzen, dass das Urtheil bei den Sätzen und Beweisen nur Schritt um Schritt dem Vortrage folgen darf, um zum Ziele zu gelangen. Alle einfachen Schlussfolgen müssen, scheint es, angegeben, keine darf übersprungen werden; denn zu sagen, welche Schlussfolgen und wie sie an einander zu fügen sind, oder fehlende zu ergänzen, kann nicht eine Aufgabe für den Schüler sein, da selbst öfters über das Erste die Lehrer nicht einig sind und das Rechte und Beste verfehlen können, wie es schon der Umstand zu erkennen giebt, dass gar viele Verschiedenheit in der Anordnung und Aufeinanderfolge der Sätze und in der Art und Anordnung der Beweise möglich ist.“

„Sodann wird sich das vorliegende Buch der äussersten Deutlichkeit, nicht bloss durch Vollständigkeit der Beweise und Erörterungen, sondern auch durch die Art ihrer Darlegung befleissigen.“

„So nun, von der Ansicht ausgehend, dass einmal alles nur Mögliche geschehen sollte, um den Lernenden mit der möglichsten Leichtigkeit auf den Standpunkt der vollendeten Deutlichkeit und Einsicht zu führen, hat sich der Vf. es hier zur Regel gemacht, nie einen Schluss zu überspringen, während er gleich-

wohl sich bemühte, Alles so zusammenzudrängen und mit so wenigen Worten zu sagen, als es ihm möglich war."

„Der Vf. wird ferner überall bemüht sein, nicht sowohl dem Lernenden recht viele Resultate und pikante Sätze mitzutheilen, deren viele in der Zahlenlehre wirklich, wenigstens dem Scheine nach, an sich selbst fast nur Curiosa sind, während sie freilich in der That kostbare Samenkörner für die weitere Entwickelung darbieten: er wird vielmehr trachten, ihm die Sätze als Gegenstände aufzustellen, an welchen das Urtheil zu üben sei; denn das ist, wie oben bemerkt, gerade von der Zahlentheorie insbesondere der Nutzen."

„Die äussere Form, welche der Vf. seiner Schrift gegeben hat, nemlich die Form einer blossen Sammlung von Sätzen, ohne bestimmte Theilung in grössere und kleinere Abschnitte, kann sonderbar zu sein scheinen. Allein der Vf. hatte sie zu wählen mehrere Gründe."

„Zuerst nemlich ist es nach seiner Ueberzeugung bei dem gegenwärtigen Zustande der Zahlentheorie noch gar nicht möglich, ein consequentes System davon aufzustellen."

„Sodann hat der Vf. gar nicht die Absicht, jeden Lernenden, der sich seines Buches bedienen will, zu einem Kenner der gesammten Zahlentheorie zu machen, sondern er wollte nur insbesondere Jedem Material zur Uebung seines Urtheilsvermögens darbieten."

„Endlich hatte der Vf. zu der Wahl der Form seiner Schrift auch einen persönlichen Grund. Er ist nemlich in einem jetzt schon vorgerückten Alter und mit einer gänzlich zerrütteten Gesundheit, der Beendigung keiner Arbeit, die er unternimmt, mehr sicher. Begann er nun eine Schrift nach irgend einem weit ausgreifenden System, so würde jede Unterbrechung das, was fertig wurde, zum Stückwerk von geringem Nutzen machen. So, wie die Schrift jetzt sein wird, schadet ihr eine Unterbrechung nichts weiter, als dass das, was noch kommen sollte, wenn es überhaupt etwas werth war, fehlt. Was da ist, behält immer seinen verhältnissmässigen Antheil am Zweck. Auch kann man, wenn man etwa insbesondere irgend etwas ausheben will, dies recht gut thun. Man darf nur die vorausgehenden Sätze, welche sich angegeben finden, aufsuchen und durchgehen; die übrigen bleiben dann zur Seite liegen."

Indem ich hiermit diese Auszüge aus der in mehreren Beziehungen lesenswerthen Vorrede schliesse, bemerke ich nur, dass mir gerade in dem von dem Herrn Vf. selbst zuletzt angegebenen Umstande, nämlich in der äussern Form des Werks, eine besondere Eigenthümlichkeit in Bezug auf dessen allgemeine Gestaltung zu liegen scheint, weshalb ich auch auf denselben die Leser des Archivs besonders hinweise. Bei den Bezeichnungen hat sich der Herr Vf. an seine Vorgänger nicht sclavisch gebunden, und auch nicht selten neue, so viel als möglich, deutsche Benennungen gebildet. Eine ausführliche Angabe des Inhalts des vorliegenden ersten Bandes erlaubt hier leider der Raum nicht, und ich bemerke daher in dieser Beziehung, ohne zu glauben, damit ganz das Richtige getroffen zu haben, ganz in der Kürze und bloss im Allgemeinen nur so viel, dass in diesem ersten Bande hauptsächlich diejenigen Lehren der Zahlentheorie enthalten sind,

welche wenigstens nicht unmittelbar und unbedingt die eigentliche Auflösung der unbestimmten Aufgaben oder die sogenannte unbestimmte Analytik in Anspruch nehmen, womit ich des Gegenstandes kundigen Lesern genug, wenn auch freilich in ziemlich unbestimmter Weise, gesagt zu haben glaube, dessenungeachtet aber noch hinzufüge, dass natürlich die Theilbarkeit der Zahlen, die Reste, das Fermat'sche und Wilson'sche Theorem in ihren verschiedenen Gestalten, das Reciprocitäts-Gesetz u. s. w. eine Hauptrolle in diesem ersten Bande spielen.

Ein bestimmtes Urtheil über das vorliegende Werk zu fällen, muss ich mich gänzlich enthalten, weil jedes Urtheil über ein Werk des von mir hochverehrten Herrn Vfs., wie es auch beschaffen sein möchte, von meiner Seite nur befangen erscheinen müsste. Wie viele Andere fühle auch ich mich demselben in nicht wenigen Beziehungen persönlich zu dem innigsten Danke verpflichtet, ein Gefühl, welches, wenn ich auch selbst nicht mehr zu den Jünglingen zu zählen bin, da ich im nächsten Jahre bereits auf eine fünf und zwanzigjährige amtliche Wirksamkeit als Lehrer im Staatsdienste zurückblicken kann, doch nichts von seiner früheren Wärme verloren hat und nie etwas verlieren wird. Ohne das geringste, in jetziger Zeit nicht selten hervortretende Haschen nach sogenannten glänzenden Erfolgen hat der Herr Vf. eine lange Reihe von Jahren mit der reinsten und uneigennützigsten gänzlichen Hingebung dem Dienste der Wissenschaft geweiht, und mit Aufopferungen mancherlei Art zu deren weitern und allgemeinern Verbreitung und zur grösseren Ausbildung und besseren Begründung mehrerer einzelner Disciplinen nicht wenig beigetragen, von welchem Bestreben auch das vorliegende Werk sowohl im Allgemeinen als auch in seiner ausführlichen Vorrede der reinste Spiegel ist, welche letztere wir daher auch insbesondere jüngeren Gelehrten zur Beherzigung empfehlen möchten. Jedenfalls ist dieses Werk, so weit es in seinem ersten Bande vorliegt, die vollständigste Sammlung, wenn auch der Herr Vf. selbst den Namen eines consequent durchgeführten Systems ablehnt, doch keineswegs ohne systematischen Zusammenhang an einander gereiheter Sätze der Zahlenlehre, welches wir bis jetzt besitzen, und wird daher hinfüro in keiner mathematischen Bibliothek fehlen dürfen, von keinem, der sich für die Fortschritte dieses so höchst interessanten Theils der Mathematik, dessen Wichtigkeit für die ganze Wissenschaft sich bis jetzt noch gar nicht absehen lässt, entbehrt werden können. Ich schliesse mit dem innigsten Wunsche, dass die Vorsehung dem Herrn Vf. Kraft schenken möge, dieses angefangene Werk in möglichst kurzer Frist zu vollenden.

G.

Geometrie.

Fischer, J., Elements of Geometry for Naval Schools. Published by order of the Lords of the Admirality. London 1845. 18.

Geometrische Aufgaben nach der Methode der Alten, für Schulen bearbeitet von Dr. F. Luke, Oberlehrer am Gymnasium zu Culm. Erster Theil. Planimetrische Aufgaben. Thorn 1845. 8. 1 thlr. 4 ggr.

Der vorliegende erste Theil dieser Sammlung enthält 100 planimetrische Aufgaben. Jeder Aufgabe ist die Analysis, die Construction, die Determination und der Beweis beigegeben, ganz der Methode der alten Geometer gemäss. Ein Verzeichniss der behandelten Aufgaben ist vorgedruckt. Wenn auch gleich an ähnlichen Büchern kein sehr fühlbarer Mangel ist, so muss doch der geometrische Unterricht nach euklidischer Methode nach unserer festen Ueberzeugung immer die Hauptgrundlage des ganzen mathematischen Unterrichts bleiben, und jedes Beförderungsmittel desselben nach dieser Richtung hin muss, wenn es nur seinen Zweck richtig erkannt hat, dankbar aufgenommen werden. Wir sind daher überzeugt, dass auch die vorliegende Aufgabensammlung manchem Lehrer der Mathematik bei seinem Unterrichte ein gutes Hülfsmittel sein wird. Dass die Anzahl der neuen Aufgaben nicht gross sein kann, ist bei einem schon so vielfach behandelten Gegenstande nicht anders zu erwarten. Indess kommt es hierbei hauptsächlich auf die Methode an, und diese, scheint uns, hat der Herr Vf. meist richtig getroffen, in welcher Beziehung daher auch die Schrift vorzugsweise von uns der Beachtung der Lehrer an höheren Unterrichts-Anstalten empfohlen wird.

Mayr, Dr. A., Die tangirenden Flächen erster und zweiter Ordnung. 4. Würzburg 1845. 16 ggr.

Trigonometrie.

Delatouche, Gustave, Trigonométrie rectiligne à l'usage des élèves qui se destinent aux écoles du gouvernement. Avec 2 planches. Paris 1845.

Summarium der Goniometrie, en der regtlijnige en sphaerische Trigonometrie, dienende als handleiding, bij het volgen van Academische Lessen over deze deelen der Meetkunde; gr. 8vo. Te Leiden 1845. f 1,00.

Eerste Beginselen der Meetkunst (tot aan de vlakken) en Driehoeksmeting, ten gebruike voor het middelbaar en privaat Onderwijs; kl. 8vo. Te Rotterdam, bij H. A. Kramers. f 1,20.

Geodäsie.

Schlieben, W. E. A., Vollständiges Hand- und Lehrbuch der gesammten niederen Messkunde. 3te gänzlich umgearbeitete

und stark vermehrte Aufl., zum Selbstunterrichte bearbeitet von J. B. Montag. Mit 48 Figurentafeln. 8. Quedlinburg 1845. 1 thlr. 8 ggr.

Mechanik.

Langsdorf, G. W. von, Lehrbuch der Elementar-Mechanik. gr. 8. Stuttgart 1845. 21 ggr.

Astronomie.

Arago, Leçons d'astronomie professées à l'observatoire royal. Recueillies par un de ses élèves. 4ème edit. Paris 1845. $3\frac{1}{2}$ fr.

Jeans, H. W., Rules for finding the names and positions of all the Stars of the First and Second Magnitude. Royal 8vo. London 1845. cloth. 3 s. 6 d.

Der Merkurdurchgang durch die Sonnenscheibe am 8. Mai 1845 und die Sonnenfinsterniss d. 6. Mai 1845 in ihren verschiedenen Umständen beschrieben. Nebst einer kurzen Erklärung der Merkurs- und Venusdurchgänge, sowie der Sonnenfinsternisse überhaupt. Mit 1 Tafel Abbildungen. 8. Leipzig 1845. 8 Ngr.

Hansen, Mémoire sur la détermination des perturbations absolues dans les ellipses d'une excentricité et d'une inclinaison quelconques. Traduit de l'allemand par M. Victor Mauvais. In 8. Paris 1845.

Physik.

Baumgartner, A., die Naturlehre in ihrem gegenwärtigen Zustande, mit Rücksicht auf mathematische Begründung. 8. verm. und umgearb. Aufl. 2. Abthl. gr. 8. Wien 1845. Preis beider Abtheilungen 4 thlr. (Vergl. Literar. Ber. Nr. XXI. S. 325.).

Vermischte Schriften.

The Cambridge Mathematical Journal. Nr. XXIII. February 1845. I. On the Theory of Linear Transformations (A. Cayley). — II. On Magic Squares (R. Moon). — III. On the Theory of Developments. Part. I. (G. Boole). — IV. Demonstration of a Fundamental Proposition in the Mechanical Theory of Electricity (W. Thomson). — V. On the Reduction of the General Equation of Surfaces of the Second Order (W. Thomson). — VI. On Certain Integral Transformations (B. Bronwin). — VII. On Certain Continued Fractions (Percival Frost).

Bulletin de la classe physico-mathématique de l'acad. imper. des sciences de St. Petersbourg. Tome IV. Nr. 1—3. gr. 4. St. Pétersbourg 1845. Compl. 2 thlr.

Anzeige eines herauszugebenden Werkes.

Der Zweck, dessen Erreichung der Unterzeichnete bei dieser Arbeit im Auge gehabt, war im Allgemeinen erstens: die Steiner'sche Methode als solche im Sinne ihres Erfinders weiter auszubilden; zweitens: den Umfang ihres Gebietes, sowohl von Seiten der Allgemeinheit als auch der Individualität und insbesondere der quantitativen Form der geometrischen Ideen zu zeigen, und drittens: durch beides zugleich die Ueberzeugung zu verschaffen, dass die neuere Geometrie, in Steiner's Weise behandelt, nichts mehr und nichts weniger als die consequente, durch die Erweiterung der Wissenschaft überhaupt nothwendig gewordene Fortbildung der Geometrie der Alten ist.

Ich habe daher nur solche Eigenschaften behandelt, welche rein aus dem Wesen der Projektivität hervorgehen, und kaum unmittelbare Folgerungen aus der Congruenz der Dreiecke und dem pythagorischen Lehrsatze mir erlaubt; das Princip der Involutionen ist als besonderer Fall projektivischer Gebilde, und zwar, um den Gegenstand in seinen allgemeinsten und besondersten Beziehungen zu umfassen, nach allen den Seiten und Fällen, welche durch Steiner's umsichtsvolle Diskussion des allgemeineren Princips gegeben waren, dargestellt. — Während aber die Entwickelung des Princips vom Allgemeinen zum Besonderen fortschreitet, nimmt die Anwendung auf die Eigenschaften der Figuren den umgekehrten Gang, so dass im letzten Kapitel über die doppelte Berührung der Kegelschnitte fast alle vorhergehenden Sätze und Aufgaben ihren allgemeinsten und meistens auch ihren einfachsten Ausdruck erhalten. Andererseits aber sind gerade diejenigen Eigenschaften, welche, wie die der zug. Durchmesser, der Brennpunkte, der Oskulation und der doppelten Berührung, nach Steiners Ausdrucke bisher als etwas Eigenthümliches und „Wunderbares" dastanden, mit Vorliebe behandelt und ihr Zusammenhang mit allgemeineren Eigenschaften nachgewiesen worden. — In der äusseren Darstellung habe ich, so viel als das Wesen der neueren Geometrie verstattete, in den Grundsätzen der Betrachtung selbst aber durchaus mir die Alten zum Muster genommen. Daher ist jeder Aufgabe ihr vollständiger Beweis und den schwierigeren auch die Analysis beigefügt, und die Begründung der Lehrsätze unterscheidet sich nur insofern von der gewöhnlichen Weise, als sie denselben voran- statt nachgeschickt ist. Die Betrachtung bewegt sich fortwährend in reellen, d. h. durch Konstruktion gegebenen Vorstellungen; das sog. Gesetz der Continuität wird nirgends in Anspruch genommen, und es werden die gemeinschaftlichen Eigenschaften der als reelle und ideale unterschiedenen Linien und Punkte weder durch Uebertragung von der primitiven auf die correlative Figur, noch durch besondere Betrachtung beider für sich, sondern in Einem zugleich aus ihrer gemeinschaftlichen Definition entwickelt. Vor Allem aber habe ich mich, worin ein eigenthümlicher Vorzug der neueren Geometrie vor der der Alten besteht, eines einfachen, ungekünstelten, bloss der Natur

der Sache folgenden Ideenganges beflissen und zu diesem Zwecke das Ganze wiederholentlich umgearbeitet.

Den Inhalt betreffend, hoffe ich manches Neue darzubieten, wohin ich unter Anderem die Sätze über die zugeordneten Achsenpunkte und Brennsehnen, mehrere über Oskulation und doppelte Berührung und sämmtliche Konstruktionen der Kegelschnitte mittels imaginärer Bedingungen oder mittels solcher und zu oskulirender oder doppelt zu berührender Kegelschnitte rechne, abgesehen von den Sätzen, welche durch Verallgemeinerung bekannter Eigenschaften sich ergeben haben.

Der vollständige Titel des Werks ist „Das Wesen der Involutionen von Punkten und Strahlen, als gemeinschaftliches Princip individueller Eigenschaften der Figuren, namentlich der ein- und der umgeschriebenen Vielecke, der harmonischen Pole und Polaren, der zugeordneten Durchmesser und Achsenpunkte, der Brennpunkte und Brennsehnen, der gemeinschaftlichen Sekanten- und Tangentendurchschnitte, der Oskulation, der doppelten Berührung und sämmtlicher Konstruktionen der Kegelschnitte mittels sogenannter reeller und imaginärer Bedingungen — im Zusammenhange mit Jak. Steiners Geometrie — dargestellt."

Franz Seydewitz,
Lehrer der Mathematik und Physik am Königlichen Gymnasium zu Heiligenstadt.

Der Herr Verfasser des vorher angekündigten Werks hat durch mehrere in dem Archiv abgedruckte umfangreichere Abhandlungen sich nicht bloss als einen ausgezeichneten Kenner der sogenannten neueren Geometrie gezeigt, sondern auch den hinreichenden Beweis geliefert, dass er nicht nur das bereits Bekannte auf eine ansprechende Weise wieder zu geben, sondern vielmehr sich auch neue Wege zu bahnen und den bereits gewonnenen Umkreis der Wissenschaft nicht unwesentlich zu erweitern verstehe. Daher lässt sich von dem vorher angezeigten Werke in wissenschaftlicher Hinsicht nur etwas Vorzügliches erwarten, und dass das mathematische Publikum überhaupt, namentlich aber auch die Lehrer der Mathematik an höheren Unterrichts-Anstalten, lebhaften Antheil an demselben nehmen werden, darf eben so wenig bezweifelt werden, weil die sogenannte neuere Geometrie, worauf schon mehrmals in dem Archiv hingewiesen worden ist, jedenfalls ein für die immer grössere Beförderung des Gedeihens des mathematischen Unterrichts sehr wesentliches und wichtiges Hülfsmittel nicht bloss zu werden verspricht, sondern schon vielfach geworden ist, wofür die in dem Archive abgedruckten Abhandlungen mehrerer höchst achtbarer Lehrer der Mathematik und einige neuerlich erschienene, in den literarischen Berichten angezeigte Schriften das vollgültigste Zeugniss ablegen. Sowohl in dieser Rücksicht, als auch wegen der Neuheit seines, die Wissenschaft erweiternden Gegenstandes ist es daher sehr zu wünschen, dass dem Herrn Verfasser recht bald eine geeignete Gelegenheit zur Herausgabe seines verdienstlichen Werkes in einer dem Gegenstande würdigen Ausstattung geboten werden möge.

Greifswald, im Mai 1845. Grunert.

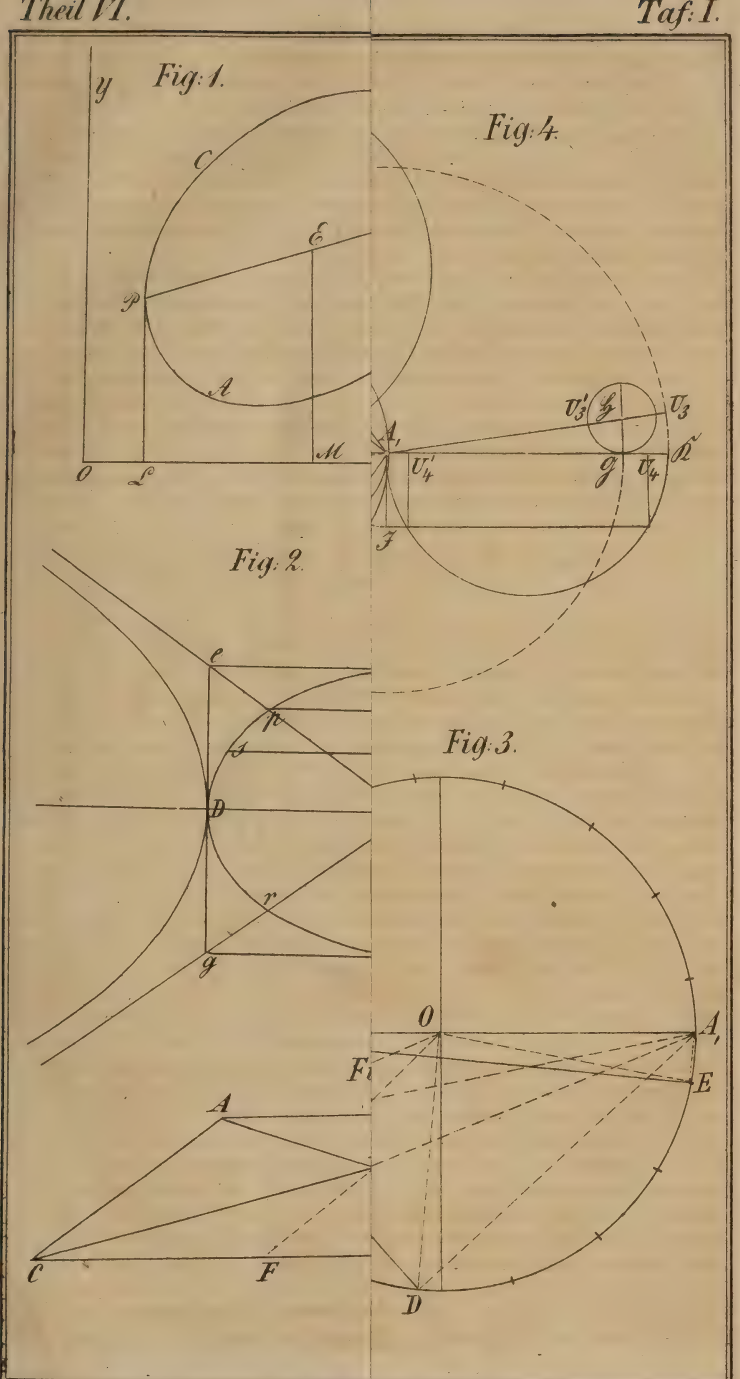
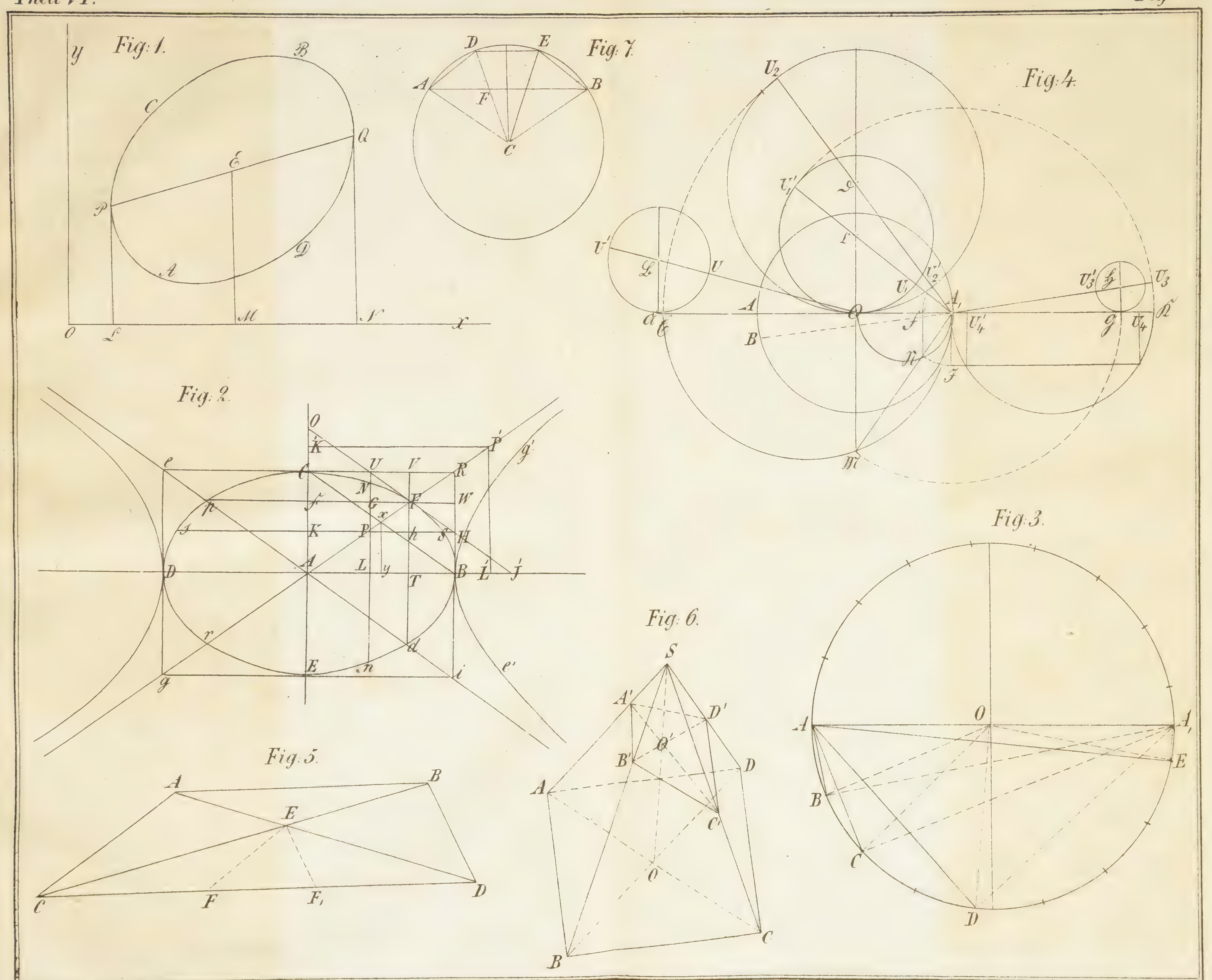
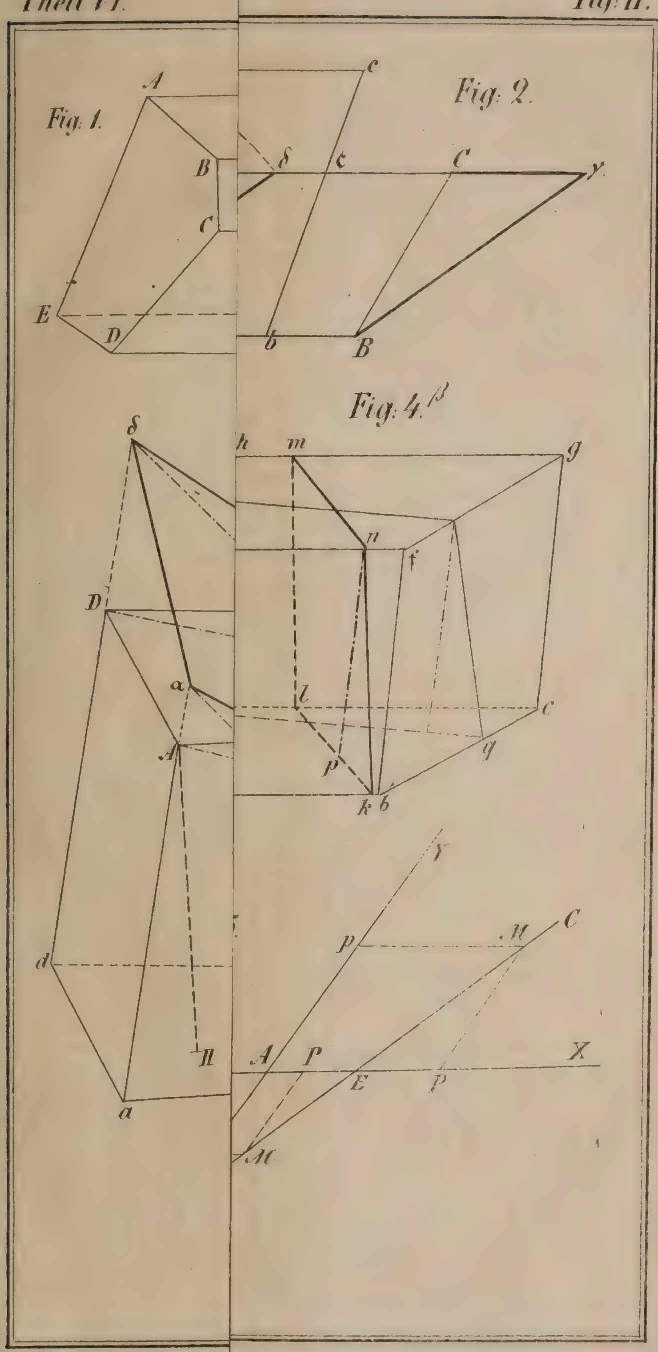
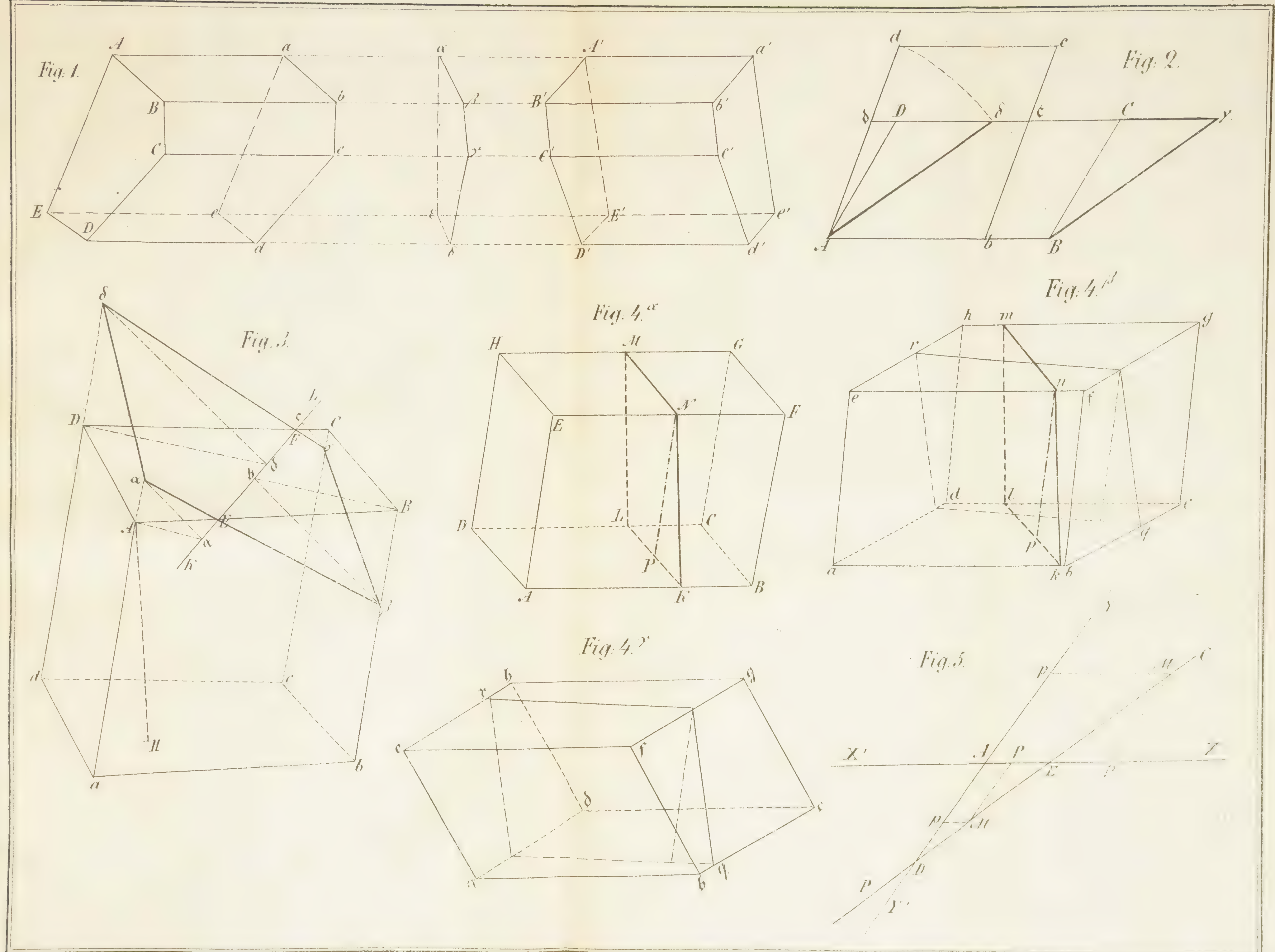
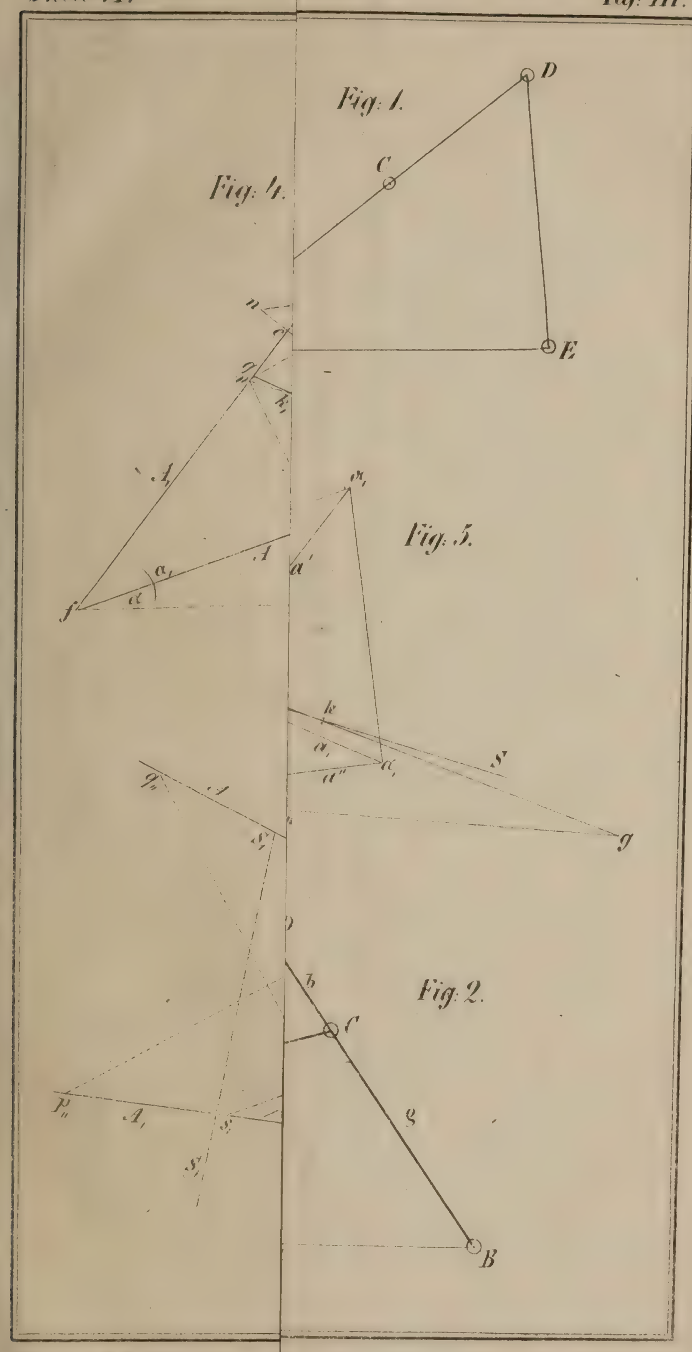


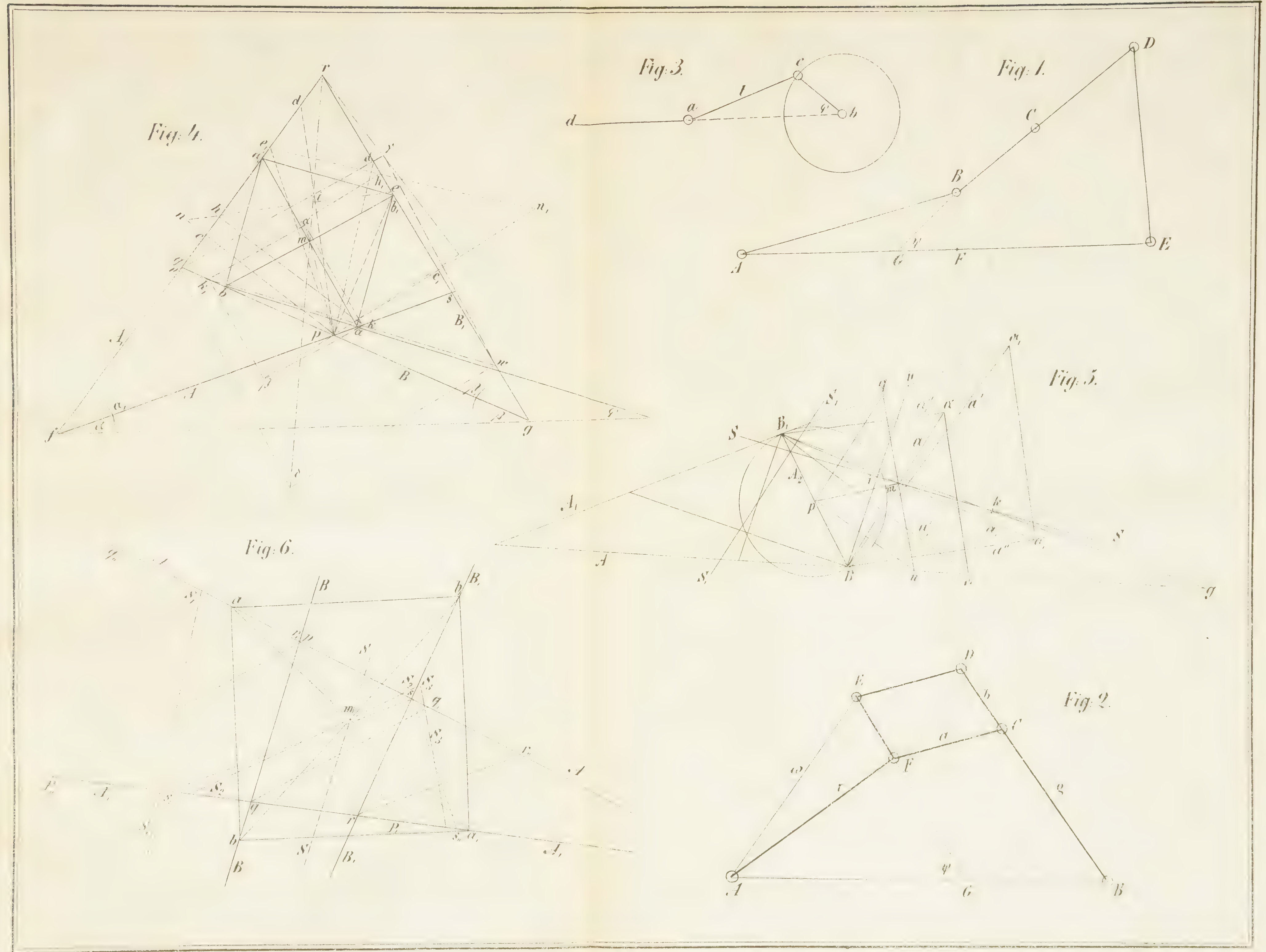
Fig. 1.
y
C
E
P
A
O
L
M
Fig. 4.
V'3
G
V3
A,
V'4
K
g
V4
J
Fig. 2.
e
p
s
D
r
g
Fig. 3.
O
A,
F
E
A
C
F
D

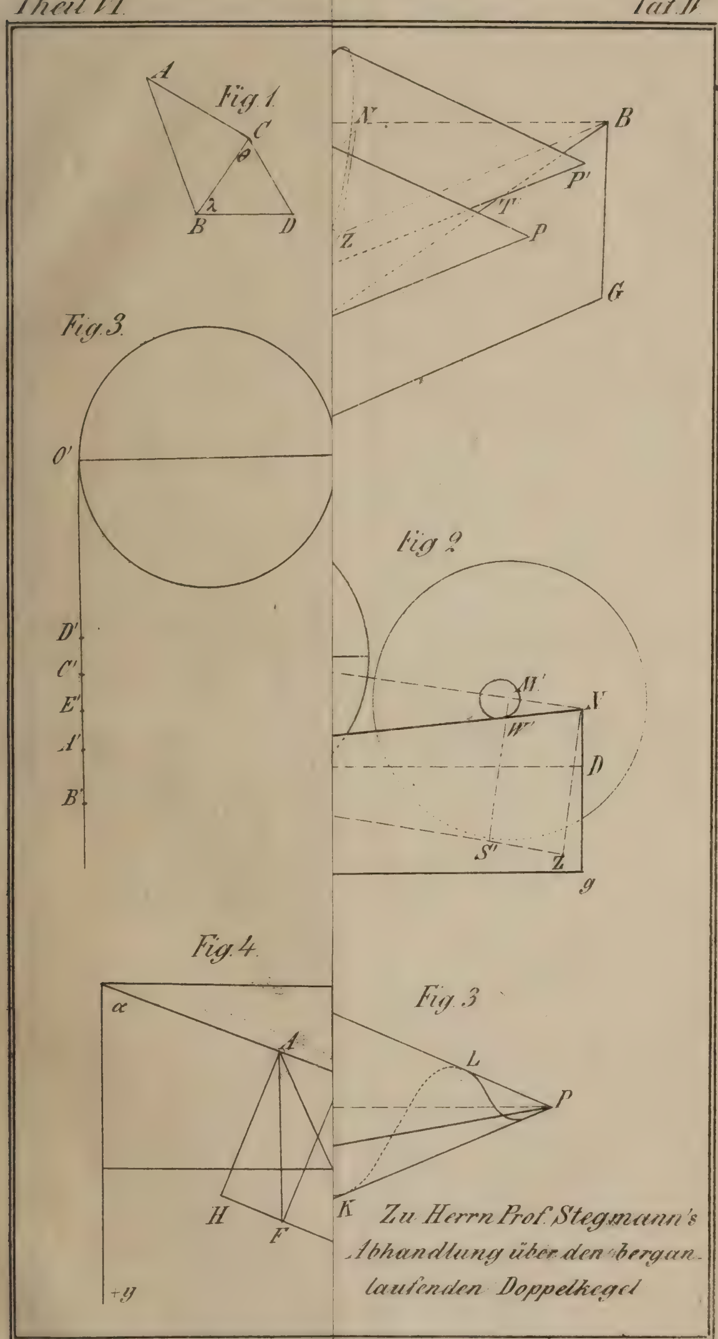

Fig: 1.
Fig: 2.
Fig: 3.
Fig: 4.
Fig: 5.
Fig: 6.
Fig: 7.

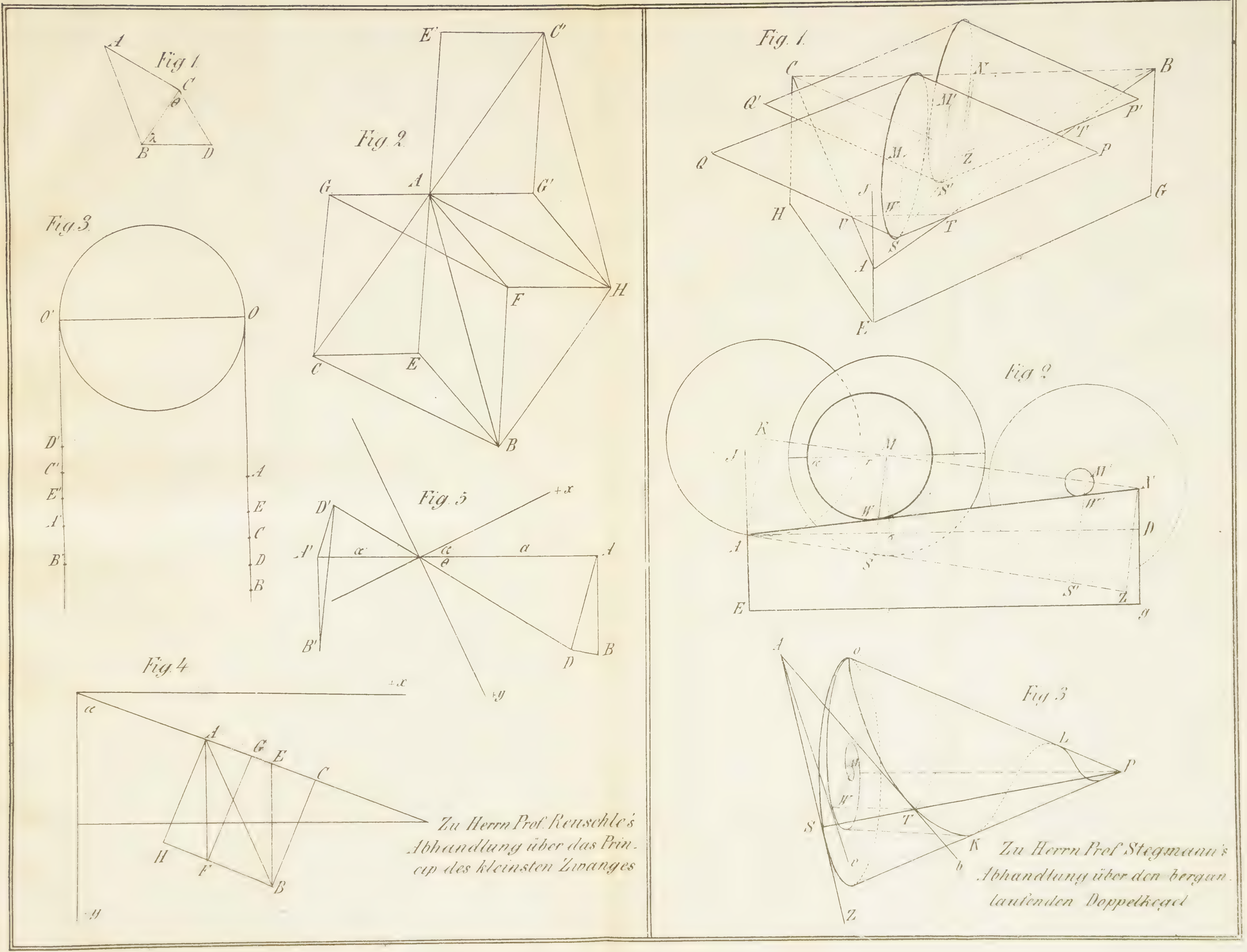

Fig: 1.
A
B
C
D
E
Fig: 2.
c
δ
c
C
γ
b
B
Fig: 4. β
δ
h
m
g
n
f
D
α
l
c
A
p
q
k
b
d
H
a
γ
p
M
C
A
P
X
E
P
M


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.α
Fig. 4.β
Fig. 4.γ
Fig. 5.


Fig. 1.
D
C
E
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 2.
C
B


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.


Fig. 1.
A
C
θ
λ
B
D
N
B
P'
T'
P
Z
G
Fig. 3.
O'
D'
C'
E'
A'
B'
Fig. 2
M'
V
W'
D
S''
Z
g
Fig. 4.
α
A
H
F
K
+y
Fig. 3
L
P
Zu Herrn Prof. Stegmann's Abhandlung über den bergan laufenden Doppelkegel


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Zu Herrn Prof. Reuschle's Abhandlung über das Princip des kleinsten Zwanges
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Zu Herrn Prof. Stegmann's Abhandlung über den berganlaufenden Doppelkegel

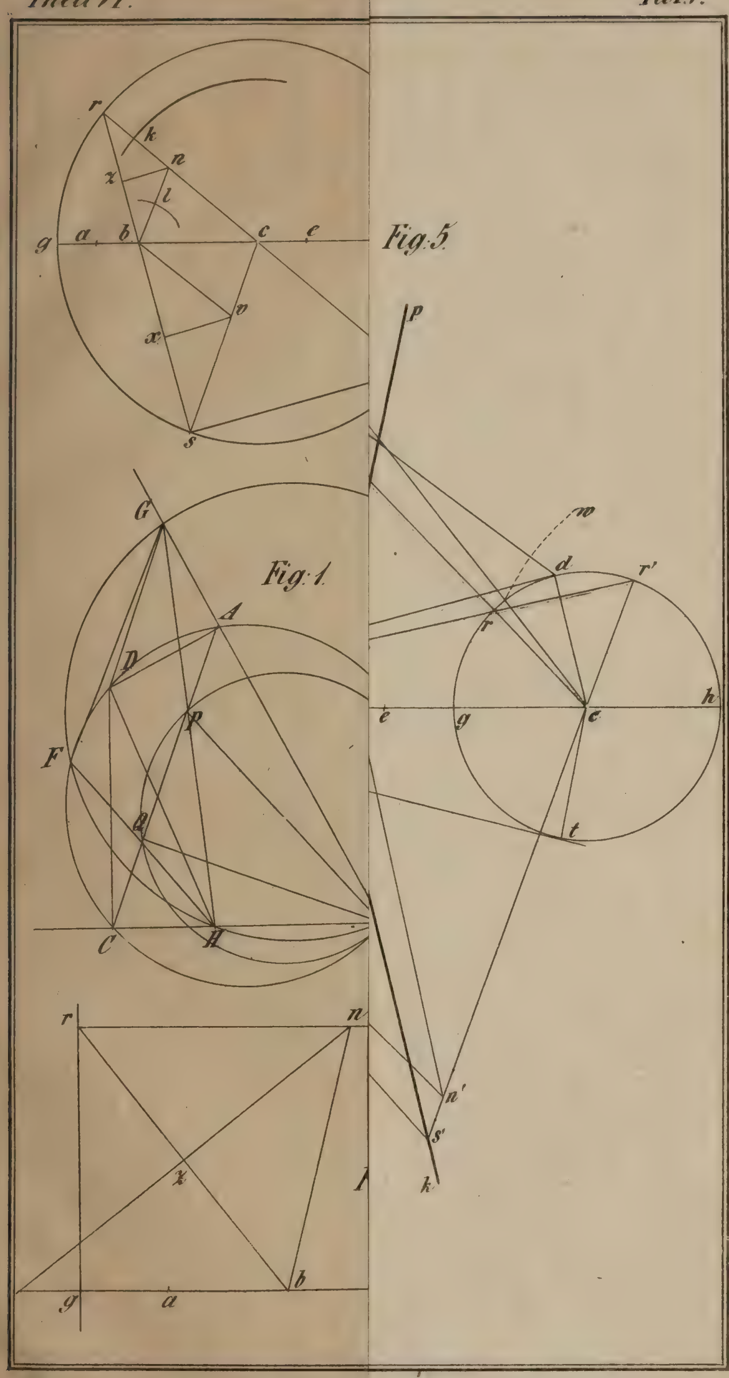
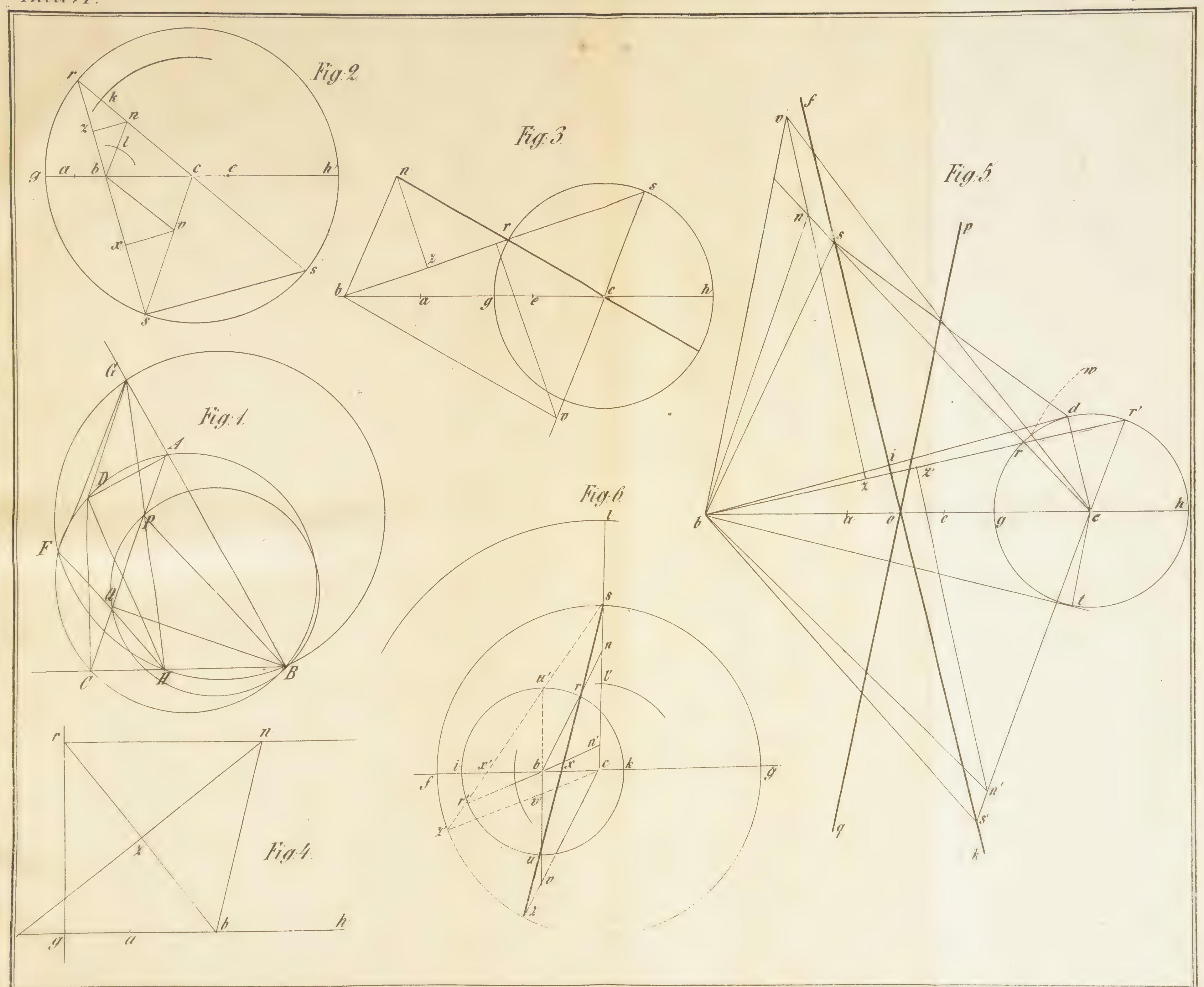


Fig. 5.
Fig. 1.
r
k
n
z
l
g
a
b
c
e
v
x
s
p
w
d
r'
h
t
n'
s'
k
G
A
D
P
F
Q
C
H
r
n
z
g
a
b


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.








UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
510.5AR C001
ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK
6 1845
3 0112 016759570